现代物理基础丛书　35

引　力　理　论

（上册）

王永久　著

科　学　出　版　社
北　京

内 容 简 介

本书系统地阐述了广义相对论的基本内容和相关领域近年来的新进展，包括作者和合作者们以及国内外同行学者们的近期研究成果. 全书包括绪论、广义相对论基础、一些特殊形式的引力场、广义相对论流体动力学、黑洞物理、广义相对论宇宙学、宇宙的暴胀、量子宇宙学、Brans-Dicke 理论和膜宇宙、广义相对论引力效应十篇，共 37 章 230 节.

本书可供理论物理、天体物理和应用数学专业的硕士生、博士生和研究人员阅读，也可供本科高年级学生和自学者参考.

图书在版编目(CIP)数据

引力理论. 上册/王永久著. —北京：科学出版社, 2011
ISBN 978-7-03-031070-5

Ⅰ. ①引… Ⅱ. ①王… Ⅲ. ①引力理论 Ⅳ. ①O314

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011) 第 088586 号

责任编辑：钱 俊 张 静／责任校对：张怡君
责任印制：钱玉芬／封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

铭浩彩色印装有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2011 年 6 月第 一 版 开本: B5(720 × 1000)
2011 年 6 月第一次印刷 印张: 49 3/4
印数: 1—2 000 字数: 966 000

定价: 98.00 元（上、下册）

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　　言

《引力理论和引力效应》一书自 1990 年出版以来有幸受到诸多读者的欢迎, 出版不到两年时间便已售完, 不少读者希望再版. 本书在对《引力理论和引力效应》进行修改的基础上增加了广义相对论近年来的新成果和新进展. 由于篇幅限制, 关于黑洞量子化的部分内容 (黑洞的面积量子化、质量量子化和电荷量子化) 以及宇宙学的部分内容 (宇宙暴胀的机制、圈量子宇宙和大爆炸的量子特性) 未做详细阐述, 有兴趣的读者可分别参阅《经典黑洞和量子黑洞》(王永久, 2008) 和《经典宇宙和量子宇宙》(王永久, 2010).

1687 年, 牛顿创立了第一个引力理论, 这是人类对自然界普遍存在的力 —— 引力的认识的第一次升华. 牛顿引力理论首次揭开了行星运动之谜, 奇迹般地预言了两个行星 (海王星和冥王星) 的存在并被天文观测所证实, 从此牛顿的名字誉满全球. 直至 20 世纪初, 这一理论是人们普遍接受的、唯一正确的引力理论. 随着人类智慧的发展, 牛顿引力理论的困难日益引起学者们的重视: 它无法解释天文学家观测到的事实 —— 水星近日点的移动, 无法解释物体的引力质量为何等于惯性质量……

牛顿引力理论无法用来研究宇宙. 用牛顿引力理论研究宇宙会导致著名的纽曼 (Newman) 疑难.

1916 年, 爱因斯坦以全新的观点创立了新的引力理论 —— 广义相对论, 这是人类对引力认识的第二次升华. 爱因斯坦引力理论将时-空几何和引力场统为一体, 以其简洁的逻辑和优美的结构令学者们叹服甚至陶醉. 它圆满地解决了牛顿引力理论的困难, 并将牛顿引力理论纳入自己的特殊情况 (弱场近似).

爱因斯坦引力理论的建立, 第一次为宇宙学提供了动力学基础, 使宇宙学成为一门定量的科学. 爱因斯坦的引力场方程可以用于宇宙, 作为宇宙演化的动力学方程. 因此, 应用广义相对论, 可以根据宇宙的现在研究宇宙的过去和未来.

引力理论的发展在很大程度上取决于爱因斯坦场方程的严格解及其物理解释. 本书第一部分以场方程的严格解为中心论述广义相对论的基本内容, 给出了爱因斯坦引力场方程的数十个严格解的推导过程和诸种生成解技术; 系统地叙述了广义相对论流体动力学; 阐述了黑洞的时空理论、经典黑洞热力学、黑洞熵的量子修正和黑洞的量子效应.

大爆炸宇宙学成功地解释了自 $t = 10^{-2}$ 秒 (轻核形成) 至 $t = 10^{10}$ 年 (现在) 宇宙演化阶段的观测事实. 其中包括元素的起源 (氦丰度测量)、星系光谱的宇宙学

红移、3K 微波背景辐射、星系计数、宇宙大尺度的均匀各向同性等. 宇宙背景辐射的观测两次获得诺贝尔物理学奖 (1978 年, 2006 年), 就是因为它们支持了大爆炸宇宙模型. 由于大爆炸宇宙模型普遍为人们所接受, 故称其为标准宇宙模型. 然而标准宇宙模型仍有它的困难, 就是在 $t=10^{-10}$ 秒这一极早期演化阶段中的四个问题: 奇点问题、视界问题、平直性问题和磁单极问题. 本书第七篇阐述了宇宙的暴胀理论. 这一理论解决了上述四个问题中的后三个. 它已经把我们带到 $t=10^{-36}$ 秒的宇宙极早期, 已接近宇宙的开端. 我们可以把加入了暴胀理论的大爆炸宇宙模型称为新的标准宇宙模型. 标准宇宙模型原来的四个困难问题还剩下一个, 即宇宙的初始奇点 (宇宙的创生) 问题, 这是本书第八篇 (量子宇宙学) 的内容.

广义相对论宇宙学是建立在爱因斯坦引力理论基础上的. 严格地说, 量子宇宙学应该建立在量子引力理论的基础上. 然而, 至今尚未建立一个令人满意的量子引力理论. 尽管如此, 人们仍然可以根据已经了解到的量子引力的某些特征, 去寻找各种途径, 尝试解决量子宇宙学的主要问题 —— 宇宙的创生问题. 20 世纪末, 哈特 (Hartle)、霍金 (Hawking)、维林金 (Vilenkin) 等提出, 用宇宙波函数来描述宇宙的量子状态, 宇宙动力学方程即惠勒–德维特方程. 这样, 只要确定宇宙的边界条件, 便可定量地研究宇宙的创生问题了. 本书第八篇阐述了哈特–霍金的量子宇宙学理论.

由引力场方程和场源物质及试验粒子的运动方程, 可以引出许多新的推论, 其中有一些具有明显的物理意义. 这些推论是牛顿力学中所没有的, 称为广义相对论引力效应. 本书第十篇收集了 141 种广义相对论引力效应. 除了和几个经典实验相对应的引力效应以外, 还有更多的引力效应不能为目前的实验所检验. 随着观测技术、引力辐射探测技术和空间技术的发展, 太阳系不再是检验引力理论的唯一场所, 这一点已经越来越明显. 可望在今后的 10 年内, 有更多的引力效应为新的实验所检验.

全书包括绪论、广义相对论基础、一些特殊形式的引力场、广义相对论流体动力学、黑洞物理、广义相对论宇宙学、宇宙的暴胀、量子宇宙学、Brans-Dicke 理论和膜宇宙、广义相对论引力效应十篇, 共 37 章 230 节.

作者与同事和合作者荆继良教授、余洪伟教授和唐智明教授获得过两次国际引力研究荣誉奖 (美国)、两次中国图书奖和一次教育部科技进步奖; 在几种相关杂志上发表过一些文章 (*Phys.Rev.D* 47 篇, *Ap.J.Lett.* 3 篇, *Ap.J.* 3 篇, *JCAP* 3 篇, *Nucl. Phys.* B 21 篇, *JHEP* 9 篇, *Phys. Lett. A&B* 32 篇,《中国科学》4 篇), 加上诸多国内外同行学者的原始论文, 其中部分相关内容经补充推导和加工整理已写入书中.

作者深深感谢刘辽教授、郭汉英研究员、张元仲研究员、D.Kramer 教授、C.Will 教授、V.Cruz 教授、易照华教授和王绶琯院士、曲钦岳院士、杨国桢院士、周又元

院士、陆埮院士, 他们曾对作者的部分论文的初稿提出过有益的意见, 对作者的科研工作给予热情的关心和支持.

作者和须重明教授、彭秋和教授、梁灿彬教授、赵峥教授、王永成教授、李新洲教授、桂元星教授、钟在哲教授、黄超光研究员、沈有根研究员、罗俊教授、李芳昱教授进行过多次讨论和交流, 受益颇多, 在此一并致谢.

作者还要感谢樊军辉教授、吕君丽教授、郭鸿钧教授、黎忠恒教授、鄢德平编审以及黄亦斌、罗新炼、陈菊华、黄秀菊、陈松柏、潘启元、张佳林、龚添喜诸位博士, 他们对作者的科研工作和本书的出版给予了热情的帮助和支持.

本书和作者的前两本书《经典黑洞和量子黑洞》(王永久, 2008)、《经典宇宙和量子宇宙》(王永久, 2010) 分别得到了国家 "973" 计划、国家理论物理重点学科和中国科学院科学出版基金的资助, 作者深表感谢.

王永久
于湖南师范大学物理研究所
2010 年 4 月

目　　录

第二篇　广义相对论基础

第三篇　一些特殊形式的引力场

第四篇 广义相对论流体动力学

第五篇　黑 洞 物 理

第一篇　绪　　论

1905 年, 爱因斯坦历史性地突破了经典物理学框架, 创立了狭义相对论, 完整地建立了相对论运动学、相对论动力学和相对论电动力学. 本篇力求系统地阐述四维形式的狭义相对论, 为读者能够顺利地进入广义相对论做必要的知识准备.

第 1 章　广义洛伦兹变换

1.1　非本征欧氏空间

狭义相对论的基本原理之一是光速不变原理.

对于任意一个洛伦兹 (Lorentz) 变换, 二次齐次式

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \tag{1.1.1}$$

是一个不变量; 对于光信号有

$$ds^2 = 0. \tag{1.1.2}$$

我们这里取的度规符号为 $(+ - - -)$.

不变量 (1.1.1) 给出一个欧几里得空间 (欧氏空间). 这里应注意, ds^2 不一定是正定的. 因此, 这一空间常称为伪欧氏空间 (非本征欧氏空间).

1.2　附 加 惯 例

1. 附标

在相对论中, 采用的坐标有时不都是实的, 如

$$x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z, \quad x^4 = \mathrm{i}ct, \tag{1.2.1}$$

或者写成

$$x^\mu, \quad \mu = 1, 2, 3, 4. \tag{1.2.2}$$

有时选取坐标都是实的, 如:

$$x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z, \quad x^0 = ct, \tag{1.2.3}$$

或者写成

$$x^\mu, \quad \mu = 1, 2, 3, 0. \tag{1.2.4}$$

2. 取和惯例

若在同一项中有上下一对附标相同, 则意味着取和:

$$A_\mu B^\mu = A_1B^1 + A_2B^2 + A_3B^3 + A_0B^0, \quad \mu = 1, 2, 3, 0,$$
$$A_iB^i = A_1B^1 + A_2B^2 + A_3B^3, \quad i = 1, 2, 3.$$

以下凡希腊字母作为附标, 其取值为 1,2,3,0 或 1,2,3,4; 凡拉丁字母作为附标, 其取值为 1,2,3.

3. 矢量

在三维空间中, 矢量记为 $\boldsymbol{A}$. 该矢量以分量表示可写为

$$A^1 = A_x, \quad A^2 = A_y, \quad A^3 = A_z;$$

或者写成

$$A^i, \quad i = 1, 2, 3.$$

在四维空间中矢量也可记为 $\boldsymbol{A}$, 它的分量为

$$A^1 = A_x, \quad A^2 = A_y, \quad A^3 = A_z, \quad A^0 = A_{ct} \quad \text{或}\ A^4 = A_{\mathrm{i}ct};$$

或者写成

$$A^\mu, \quad \mu = 1, 2, 3, 0(\text{或}\ 1, 2, 3, 4).$$

应注意, 四维矢量的前三个分量不一定是三维矢量的三个分量, 例如, 坐标微分四维矢量 $\mathrm{d}x^\mu$ 的前三个分量 $\mathrm{d}x^i$ 是三维矢量的分量. 但是四维速度矢量$u^\mu = \dfrac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}$ 的前三个分量 $u^i = \dfrac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\tau}$ 就不是三维速度矢量 $v^i = \dfrac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}$ 的分量. 换句话说, $v^\mu = (v^i, v^4)$ 不构成四维矢量.

1.3 狭义相对论中线元的表示式

1. 选用虚坐标

若令

$$x^1 = \mathrm{i}x, \quad x^2 = \mathrm{i}y, \quad x^3 = \mathrm{i}z, \quad x^4 = ct, \tag{1.3.1}$$

则线元 (1.1.1) 可表示为椭圆形式:

$$\mathrm{d}s^2 = \sum_\mu (\mathrm{d}x^\mu)^2, \quad \mu = 1, 2, 3, 4. \tag{1.3.2}$$

这是四维欧氏空间中的线元 (直线正交系).

如果直线正交坐标轴以四个单位矢量 $\boldsymbol{e}_\mu$ 表示之, 则有

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{e}_\mu \cdot \boldsymbol{e}_\nu = 0, \ \text{当}\ \mu \neq \nu; \\ &\boldsymbol{e}_\mu \cdot \boldsymbol{e}_\nu = 1, \ \text{当}\ \mu = \nu; \end{aligned} \tag{1.3.3}$$

和

$$\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \boldsymbol{e}_\mu \mathrm{d}x^\mu. \tag{1.3.4}$$

按 (1.3.4), $\mathrm{d}s \cdot \mathrm{d}s = \mathrm{d}s^2$ 恰为 (1.3.2).

条件 (1.3.3) 可写为

$$\boldsymbol{e}_\mu \cdot \boldsymbol{e}_\nu = \delta_{\mu\nu}. \tag{1.3.5}$$

这样, (1.3.2) 可表示为

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu, \tag{1.3.6}$$

$$g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}. \tag{1.3.7}$$

由 (1.3.7) 可以得到

$$A_\mu \equiv g_{\mu\nu}A^\nu = A^\mu. \tag{1.3.8}$$

上式表明, 在直线正交坐标系中, 协变矢量和逆变矢量没有区分的必要.

很容易得到两个矢量的标量积和矢量模的表示式:

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = g_{\mu\nu}A^\mu B^\nu = \sum_\mu A^\mu B^\mu, \tag{1.3.9}$$

$$|\boldsymbol{A}|^2 = g_{\mu\nu}A^\mu A^\nu = \sum_\mu (A^\mu)^2. \tag{1.3.10}$$

通常, 令

$$x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z, \quad x^4 = \mathrm{i}ct,$$

这时有

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu = -\sum_\mu (\mathrm{d}x^\mu)^2, \tag{1.3.11}$$

这对应于

$$\boldsymbol{e}_\mu \cdot \boldsymbol{e}_\nu = -\delta_{\mu\nu}, \tag{1.3.12}$$

或

$$g_{\mu\nu} = -\delta_{\mu\nu}. \tag{1.3.13}$$

对于这样的坐标系, 矢量的协变分量和逆变分量之间的关系为

$$A_\mu = g_{\mu\nu}A^\nu = -A^\mu. \tag{1.3.14}$$

标积和模表示为

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = g_{\mu\nu}A^\mu B^\nu = -\sum_\mu A^\mu B^\mu, \tag{1.3.15}$$

$$|\boldsymbol{A}^2| = g_{\mu\nu}A^\mu A^\nu = -\sum_\mu (A^\mu)^2. \tag{1.3.16}$$

2. 选用实坐标

$$x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z, \quad x^0 = ct, \tag{1.3.17}$$

则线元 (1.1.1) 表示为

$$\mathrm{d}s^2 = (\mathrm{d}x^0)^2 - \sum_p (\mathrm{d}x^p)^2, \tag{1.3.18}$$

此时 $\mathrm{d}s^2$ 为双曲线型, 符号为 $(+\ -\ -\ -)$. 它对应于以基矢量系 $\boldsymbol{e}_\mu(\mu = 1,2,3,0)$ 表征的直线坐标系. 可将 $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ 写为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \boldsymbol{e}_\mu \mathrm{d}x^\mu, \tag{1.3.19}$$

于是标积 $\mathrm{d}\boldsymbol{s} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$ 具有形式

$$\mathrm{d}\boldsymbol{s} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \mathrm{d}s^2 = (\mathrm{d}x^0)^2 - \sum_p (\mathrm{d}x^p)^2,$$

只要满足条件

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{e}_\mu \cdot \boldsymbol{e}_\nu = 0, \ 当\ \mu \neq \nu, \\ &e_0^2 = 1, \ e_p^2 = -1, \quad p = 1,2,3. \end{aligned} \tag{1.3.20}$$

上面的条件可写为

$$\boldsymbol{e}_\mu \cdot \boldsymbol{e}_\nu \equiv \eta_{\mu\nu}, \tag{1.3.21}$$

$$[\eta_{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} -1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & +1 \end{pmatrix}.$$

(1.3.21) 与实坐标相对应, 此时线元 $\mathrm{d}s^2$ 的表示式为 (1.3.18) 式. 如果将 (1.3.18) 与 (1.3.6) 比较, 则得到

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}. \tag{1.3.22}$$

此时我们有

$$A_\mu \equiv g_{\mu\nu} A^\nu = \eta_{\mu\nu} A^\nu, \tag{1.3.23}$$

即

$$A_p = \eta_{p\nu} A^\nu = -\delta_{p\nu} A^\nu = -A^p, \tag{1.3.24}$$

$$A_0 = \eta_{0\nu} A^\nu = \delta_{0\nu} A^\nu = A^0. \tag{1.3.25}$$

选用实坐标时, 二矢量的标量积和矢量的模表示为

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=g_{\mu\nu}A^{\mu}B^{\nu}=-A^{0}B^{0}-\sum_{p}A^{p}B^{p}, \tag{1.3.26}$$

$$|\boldsymbol{A}|^{2}=g_{\mu\nu}A^{\mu}A^{\nu}=(A^{0})^{2}-\sum_{p}(A^{p})^{2}. \tag{1.3.27}$$

由 (1.3.10)、(1.3.16) 和 (1.3.27) 可见, 任意非零实矢量的模平方不一定是正的. 即狭义相对论中的四维空间是**非本征的欧几里得空间**.

1.4 类空、类时和各向同性四维矢量

矢量 $\boldsymbol{A}$ 的模平方大于、小于或等于零, 对应地称此矢量为**类时、类空或各向同性矢量**.

选择实坐标. 在与 (1.3.22) 对应的正交坐标系中, 根据 (1.3.27), 我们有三种情况:

$$|\boldsymbol{A}|^{2}=g_{\mu\nu}A^{\mu}A^{\nu}=(A^{0})^{2}-\sum_{p}(A^{p})^{2}\gtreqless 0. \tag{1.4.1}$$

如果 $\sum_{p}(A^{p})^{2}=(A^{0})^{2}$, 则它是各向同性的.

对于质点的运动,$v<c$, $\mathrm{d}s^{2}>0$, 故知质点时迹的切线方向沿着四维类时矢量. 即质点时迹位于特征锥面 $\mathrm{d}s^{2}=0$ 之内.

$\mathrm{d}s^{2}=0$ 的粒子的时迹对应于光线 ($v=c$). 即光子的时迹位于特征锥面上.

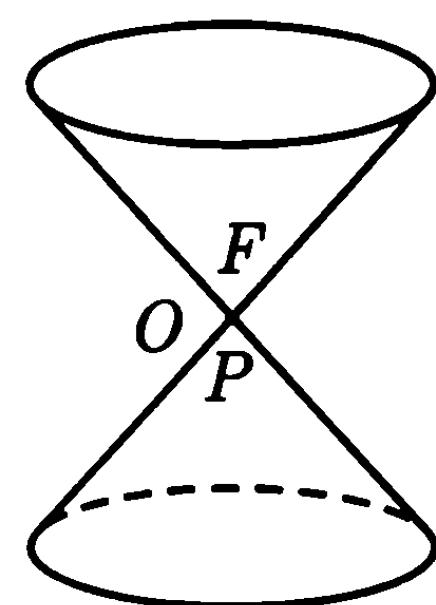


图 1-1

特征锥面 $\mathrm{d}s^{2}=0$ 把四维空间分为两部分. 第一部 ($\mathrm{d}s^{2}>0$) 对应于特征曲面的内部, 包含所有的类时矢量. 这区域又包含两部分——原点上方和原点下方 (分别记为 F 区和 P 区). 在 F 区域中, 所有四维类时矢量的分量 A^{0} 都是正的. 这是**未来区域**. 相反, P 区为**过去区域**. 第二部分 ($\mathrm{d}s^{2}=0$) 为**光子迹区域**. 第三部分 ($\mathrm{d}s^{2}<0$) 对应于特征锥面的外部, 包含所有四维类空矢量. 与原点比较, 这是**无因果关系的区域** (图 1-1).

1.5 四维欧氏空间的运动群

设两个坐标系都满足正交条件 (1.3.7), (1.3.13) 或 (1.3.22), 我们寻求不改变长度单位的坐标变换.

采用虚坐标, 正交条件具有形式 $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ 或 $g_{\mu\nu} = -\delta_{\mu\nu}, \mathrm{d}s^2$ 表示为 (1.3.2) 或 (1.3.11). 此时应满足条件

$$\sum_\mu (\mathrm{d}x^\mu)^2 = \sum_\mu (\mathrm{d}x'^\mu)^2. \tag{1.5.1}$$

如果采用实坐标 ($x^0 = -ct$), 则有归一化条件 $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} \cdot \mathrm{d}s^2$ 的形式由下式确定:

$$\mathrm{d}s^2 = (\mathrm{d}x^0)^2 - \sum_p (\mathrm{d}x^p)^2.$$

对于上述坐标变换, 此式仍然保持不变;

$$(\mathrm{d}x^0)^2 - \sum_p (\mathrm{d}x^p)^2 = (\mathrm{d}x'^0)^2 - \sum_p (\mathrm{d}x'^p)^2. \tag{1.5.2}$$

这一不变性对应一变换群 —— 欧几里得 (或非本征欧几里得) 四维空间的运动群. 这个群包括**位移**

$$x'^\mu = x^\mu + a^\mu, \quad a^\mu = \text{const}. \tag{1.5.3}$$

此时有

$$\mathrm{d}x'^\mu = \mathrm{d}x^\mu. \tag{1.5.4}$$

欧氏空间或非本征欧氏空间的线性正交变换具有形式

$$\boldsymbol{e}'_\mu = a^\nu_{\mu'} \boldsymbol{e}_\nu, \quad \boldsymbol{e}_\mu = a^{\nu'}_\mu \boldsymbol{e}_\nu, \tag{1.5.5a}$$

$$x'^\mu = a^{\mu'}_\nu x^\nu, \quad x^\mu = a^\mu_{\nu'} x'^\nu. \tag{1.5.5b}$$

式中

$$a^\rho_{\mu'} a^{\nu'}_\rho = a^{\rho'}_\mu a^\nu_{\rho'} = \delta^\nu_\mu. \tag{1.5.6}$$

要使变换后的坐标系仍然是正交的, 其充分且必要条件是

$$g'_{\mu\nu} = \boldsymbol{e}'_\mu \cdot \boldsymbol{e}'_\nu = (\boldsymbol{e}_\mu \cdot \boldsymbol{e}_\nu) = g_{\mu\nu}, \tag{1.5.7}$$

或者满足

$$a^\rho_{\mu'} g_{\rho\lambda} = a^{\rho'}_\lambda g_{\mu\rho}. \tag{1.5.8}$$

如果轴的正交条件是 $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ 或 $g_{\mu\nu} = -\delta_{\mu\nu}$, 则由 (1.5.8) 有

$$a^\lambda_{\mu'} = a^{\mu'}_\lambda. \tag{1.5.9}$$

这时, 与 (1.5.6) 和 (1.5.9) 相对应, 对于变换 (1.5.5), 我们有

$$\sum_\mu a^\mu_{\nu'} a^\mu_{\lambda'} = \delta_{\nu\lambda}. \tag{1.5.10}$$

如果轴的正交条件是 $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, 则由 (1.5.8) 得

$$a^{j}_{i'} = a^{i'}_{j}, \quad a^{0}_{0'} = a^{0'}_{0}, \quad a^{0}_{i'} = -a^{i}_{0'}, \quad a^{i}_{0'} = -a^{0'}_{i}. \tag{1.5.11}$$

【注意】如果设 $x^4 = \mathrm{i}ct$, 则 $a^{\rho}_{\mu'}$ 和 $a^{\rho'}_{\mu}$ 将是实的, 而 $a^{4}_{p'}$ 和 $a^{p}_{4'}$ 是纯虚的. 此时由 (1.5.10) 有

$$(a^{4}_{4'})^2 = 1 - \sum_i (a^{i}_{4'})^2 \geqslant 1. \tag{1.5.12}$$

如果设 $x^0 = ct$, 则 $a^{\rho}_{\mu'}$ 和 $a^{\rho'}_{\mu}$ 是实的. 此时由 (1.5.6) 和 (1.5.11) 有

$$(a^{0}_{0'})^2 = 1 + \sum_p (a^{p}_{0'})^2 \geqslant 1. \tag{1.5.13}$$

在上述两种情况下, 应得到

$$a^{4}_{4'} \geqslant 1 \quad \text{或}\, a^{4}_{4'} \leqslant -1; \tag{1.5.14}$$

$$a^{0}_{0'} \geqslant 1 \quad \text{或}\, a^{0}_{0'} \leqslant -1. \tag{1.5.15}$$

考虑 $a^{0}_{0'} \geqslant 1$(或 $a^{4}_{4'} \geqslant 1$) 对变换 (1.5.5) 的限制, 它构成一个群. 这就是说, 如果上述条件成立, 当变换 $x^{\mu} \to x'^{\mu}$, 然后 $x'^{\mu} \to x''_{\mu}$ 时, 则变换 $x^{\mu} \to x''_{\mu}$ 一定按同样形式进行, 即

$$x'^{\mu} = a^{\mu'}_{\nu} x^{\nu}, \quad x''^{\mu} = a^{\mu''}_{\nu'} x'^{\nu}, \tag{1.5.16}$$

$$x''^{\mu} = a^{\mu'}_{\rho} x^{\rho}, \tag{1.5.17}$$

式中

$$a^{\mu''}_{\rho} \equiv a^{\mu''}_{\nu'} a^{\nu'}_{\rho} \tag{1.5.18}$$

一定和 $a^{\mu''}_{\rho'}$ 以及 $a^{\mu'}_{\rho}$ 具有相同形式. 为了使变换 (1.5.16) 构成一个群, 还应引入恒等变换, 以限制系数 $a^{0}_{0'}$, 使满足不等式 $a^{0}_{0'} \geqslant 1$. 这一不等式表明, 所研究的这一类线性正交变换保持矢量 $(\boldsymbol{A}^2 > 0)$ 的分量 A^0 的符号不变. 显然, 在伽利略变换中这符号是不变的. 特别应该强调的是, 如果在伽利略系中采用实坐标, 则矢量 $\mathrm{d}x$ 总是类时的 (对于质点), 因为 $\nu < c$, $\mathrm{d}s^2 > 0$. 由于在未来区域内 $\mathrm{d}x^0$ 的符号是正的, 所以当一个伽利略系变到另一个伽利略系时 $\mathrm{d}x^0$ 总保持是正的. 这就是说, 在所有具有物理意义的伽利略系中, 时间的增长都具有相同的方向.

式 (1.5.5) 表明时间和空间坐标起着相同的作用, 但是与不等式 $a^{0}_{0'} \geqslant 0$ 相联系, 暗含着时间不可逆性的假定.

1.6 广义和狭义洛伦兹变换

在 1.5 节中我们已经看到, 四维欧氏空间的运动群保持 $\mathrm{d}s^2$ 的形式不变. 上述线性正交变换间的等效性以及 (根据条件 $a^{0}_{0'} \geqslant 1$) 时间流逝方向的等效性都由此得出. 这个群确定了广义洛伦兹变换.

应该指出, 如果相对于坐标轴, 速度的方向是任意的, 那么所有无旋转的洛伦兹变换不构成群. 一般地, 两个无旋转的洛伦兹变换 $S_1 \to S_2 \to S_3$ 确定一个洛伦兹变换 $S_1 \to S_3$, 但它已经不一定再是无旋转的洛伦兹变换了, 一般情况下会出现旋转. 例如, $S_1 \to S_2$ 和 $S_2 \to S_3$ 由 $v_{12} = -v_{21}, v_{23} = -v_{32}$ 确定; 则与 $Dv_{31} = -v_{13}$ 相对应已有旋转.

广义洛伦兹变换由三个变换组合而成: 绕空间轴原点的纯空间转动, 空间坐标原点的移动和时间坐标原点的移动.

狭义洛伦兹变换是当两个系的坐标轴对应平行而且速度 v 沿一对坐标轴时的特殊情况.

实际上, 借助于四个变量可以使 s 系和 s' 系的空间坐标原点重合, 且使它们的时间原点重合; 再借助于一个空间轴旋转, 可使 Ox 与 Ox' 轴和 v 重合, 再将 s' 系绕 Ox' 轴旋转, 即可使 Oy 轴平行于 Oy' 轴、Oz; 轴平行于 Oz 轴. 这样便过渡到狭义洛伦兹变换的情况.

广义洛伦兹变换由下式确定:

$$\boldsymbol{e}_\mu = a_\mu^{\nu'} \boldsymbol{e}'_\nu, \quad \boldsymbol{e}'_\mu = a_{\mu'}^{\nu} \boldsymbol{e}_\nu, \tag{1.6.1a}$$

$$x^\mu = a_{\nu'}^{\mu} x^\nu, \quad x'^\mu = a_\nu^{\mu'} x^\nu. \tag{1.6.1b}$$

式中

$$a_\mu^{\rho'} a_{\rho'}^{\nu} = a_{\mu'}^{\rho} a_\rho^{\nu'} = \delta_\mu^\nu \tag{1.6.2}$$

与限制条件 $a_{\mu'}^{\rho} g_{\rho\nu} = a_\nu^{\rho'} g_{\mu\rho}$ 相联系.

采用实坐标, $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, 上述限制条件给出

$$a_{\mu'}^{\rho} \eta_{\rho\nu} = a_\nu^{\rho'} \eta_{\mu\rho},$$

即

$$a_{p'}^{q} = a_q^{p'}, \quad a_{0'}^{0} = a_0^{0'}, \quad a_{p'}^{0} = -a_0^{p'}, \quad a_{0'}^{p} = a_p^{0'}. \tag{1.6.3}$$

(1.6.2) 写为

$$\sum_i a_p^{i'} a_q^{i'} - a_p^{0'} a_q^{0'} = \delta_{pq},$$

$$(a_0^{0'})^2 - \sum_i a_0^{i'} a_0^{i'} = 1, \quad a_p^{0'} a_0^{0'} - \sum_i a_p^{i'} a_0^{i'} = 0. \tag{1.6.4}$$

与本节开头所说的过程相反, 可以由狭义洛伦兹变换过渡到广义洛伦兹变换. 由 x^μ 系向 x'^μ 系变换, 在一般情况下有

$$x'^p = D^{-1} x^p + D^{-1} v^p \left\{ \frac{\alpha}{v^2} (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{v}) - \frac{x^0}{c\sqrt{1-\beta^2}} \right\}, \tag{1.6.5}$$

$$x'^0 = \frac{x^0 - (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v})/c}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{1.6.6}$$

式中

$$\boldsymbol{v} = (v^p), \quad \boldsymbol{x} = (x^p), \quad x^\mu = (\boldsymbol{x}, ct), \tag{1.6.7}$$

$$v_p = -v^p, \quad v^2 = \sum_p (v^p)^2, \tag{1.6.8}$$

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v} = \sum_r x^r v^r = -x^r v_r,$$

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1. \tag{1.6.9}$$

算符 D 由下式确定 (广义洛伦兹变换):

$$D\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} + \boldsymbol{v}\left[\frac{a}{v^2}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v}) - \frac{t}{\sqrt{1-\beta^2}}\right]. \tag{1.6.10}$$

由于 $\mathrm{d}t$ 不是不变量, 所以 $v^p = \dfrac{\mathrm{d}x^p}{\mathrm{d}^t}$ 不是四维矢量的空间分量, 代替它的是四维矢量 $u^\mu = \dfrac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s}$. 它的空间分量和时间分量分别为

$$u^p = \frac{\mathrm{d}x^p}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}x^p}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \frac{v^p}{c\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{1.6.11}$$

$$u^0 = \frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}s} = c\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

考虑到 (1.6.11), 可将 (1.6.5) 和 (1.6.6) 写为

$$x'^p = D^{-1}x^p - D^{-1}u^p\left\{\alpha\left(\frac{1-\beta^2}{\beta^2}\right)x^r\mu_r + x^0\right\}, \tag{1.6.12}$$

$$x'^0 = x^0 u_0 + x^p u_p. \tag{1.6.13}$$

用 a_p^q 表示空间转动系数 D^{-1}, 我们有

$$D^{-1}x^p = a_q^{p'} x^q. \tag{1.6.14}$$

将 (1.6.14) 与 (1.6.12)、(1.6.13)、(1.5.5b) 比较得到

$$a_q^{p'} = a_{p'}^q = a_q^p - \alpha\left(\frac{1-\beta^2}{\beta^2}\right)a_r^p u^r u_q = a_q^p - \frac{\alpha}{v^2}a_r^p v^r v_q. \tag{1.6.15}$$

$$a_0^{p'} = -a_{p'}^0 = -a_r^p u^r, \quad a_p^{0'} = -a_{0'}^p = -u_p. \tag{1.6.16}$$

写成矩阵形式为

$$[a_{\mu}^{\nu'}] = \begin{pmatrix} a_r^1\gamma_1^r & a_r^2\gamma_1^r & a_r^3\gamma_1^r & -u^1 \\ a_r^1\gamma_2^r & a_r^2\gamma_2^r & a_r^3\gamma_2^r & -u^2 \\ a_r^1\gamma_3^r & a_r^2\gamma_3^r & a_r^3\gamma_3^r & -u^3 \\ -a_r^1u^r & -a_r^2u^r & -a_r^3u^r & u^0 \end{pmatrix}. \tag{1.6.17}$$

$$[a_{\mu'}^{\nu}] = \begin{pmatrix} a_r^1\gamma_1^r & a_r^1\gamma_2^r & a_r^1\gamma_3^r & a_r^1u^r \\ a_r^2\gamma_1^r & a_r^2\gamma_2^r & a_r^2\gamma_3^r & a_r^2u^r \\ a_r^3\gamma_1^r & a_r^3\gamma_2^r & a_r^3\gamma_3^r & a_r^3u^r \\ u^1 & u^2 & u^3 & u^0 \end{pmatrix}, \tag{1.6.18}$$

$$\gamma_p^r = \delta_p^r + \frac{\alpha}{v^2}u^r u^p. \tag{1.6.19}$$

对于无转动的洛伦兹变换有

$$\alpha_p^q = \delta_p^q. \tag{1.6.20}$$

这时 (1.6.15) 和 (1.6.16) 可以写为

$$a_p^{q'} = a_{p'}^q = \delta_p^q + \frac{\alpha}{v^2}v^p v^q, \tag{1.6.21}$$

$$a_{0'}^0 = a_0^{0'} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = u_0; \tag{1.6.22}$$

$$a_0^{p'} = -a_{p'}^0 = -\frac{v^p}{c\sqrt{1-\beta^2}} = -u^p, \tag{1.6.23}$$

$$a_p^{0'} = -a_{0'}^p = -\frac{v^p}{c\sqrt{1-\beta^2}} = -u^p, \tag{1.6.24}$$

即

$$[a_{\mu}^{\nu'}] = \begin{pmatrix} \gamma_1^1 & \gamma_1^2 & \gamma_1^3 & -u^1 \\ \gamma_2^1 & \gamma_2^2 & \gamma_2^3 & -u^2 \\ \gamma_3^1 & \gamma_3^2 & \gamma_3^3 & -u^3 \\ -u^1 & -u^2 & -u^3 & u^0 \end{pmatrix}, \tag{1.6.25a}$$

$$[a_{\mu'}^{\nu}] = \begin{pmatrix} \gamma_1^1 & \gamma_1^2 & \gamma_1^3 & u^1 \\ \gamma_2^1 & \gamma_2^2 & \gamma_2^3 & u^2 \\ \gamma_3^1 & \gamma_3^2 & \gamma_3^3 & u^3 \\ u^1 & u^2 & u^3 & u^0 \end{pmatrix}. \tag{1.6.25b}$$

作为特殊情况, 我们讨论狭义洛伦兹变换

$$v^p = v^1, \quad v^2 = v^3 = 0. \tag{1.6.26}$$

在这种情况下,(1.6.21)~(1.6.24) 中不为零的系数为

$$
\begin{aligned}
&a_1^{1'} = a_{1'}^1 = 1+\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad a_2^{2'} = a_{2'}^2 = a_3^{3'} = a_{3'}^3 = 1,\\
&a_0^{1'} = -a_{1'}^0 = -\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad a_1^{0'} = -a_{0'}^1 = -\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}},\\
&a_0^{0'} = a_{0'}^0 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}.
\end{aligned} \tag{1.6.27}
$$

式 (1.6.27) 中各系数的值与通常直接由狭义洛伦兹变换得到的完全一致, 令 $\beta = \text{th}\phi$, 上式为

$$
[a_\mu^{\nu'}] = \begin{pmatrix} \text{ch}\phi & 0 & 0 & -\text{sh}\phi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\text{sh}\phi & 0 & 0 & \text{ch}\phi \end{pmatrix}, \tag{1.6.28}
$$

$$
[a_{\mu'}^\nu] = \begin{pmatrix} \text{ch}\phi & 0 & 0 & \text{sh}\phi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \text{sh}\phi & 0 & 0 & \text{ch}\phi \end{pmatrix}. \tag{1.6.29}
$$

如果我们采用虚坐标 ($x^4 = \text{i}ct$), 并设 $\tan\psi = \text{i}\beta$, 则与式 (1.6.28) 和 (1.6.29) 对应地有

$$
[a_\mu^{\nu'}] = \begin{pmatrix} \cos\psi & 0 & 0 & \sin\psi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin\psi & 0 & 0 & \cos\psi \end{pmatrix}, \tag{1.6.30}
$$

$$
[a_{\mu'}^\nu] = \begin{pmatrix} \cos\psi & 0 & 0 & -\sin\psi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sin\psi & 0 & 0 & \cos\psi \end{pmatrix}. \tag{1.6.31}
$$

作为例子, 我们讨论矢量 A^μ 和张量 $T^{\mu\nu}$ 的变换.

选用实坐标, 由逆变分量和协变分量的变换式

$$
A'^\mu = a_\nu^{\mu'} A^\nu, \quad A'_\mu = a_{\mu'}^\nu A_\nu, \tag{1.6.32}
$$

对于逆变分量, 得到

$$
A'^p = a_q^{p'} A^q + a_0^{p'} A^0 = \alpha_r^p \gamma_q^r A^q - \alpha_r^p u^r A^0, \tag{1.6.33a}
$$

$$A'^0 = a_p^{0'} A^p + a_0^{0'} A^0 = -\sum_p u^p A^p + u^0 A^0; \tag{1.6.33b}$$

对于协变分量, 得到

$$A'_p = a_{p'}^q A_q + a_{p'}^0 A_0 = \sum_q \alpha_r^p \gamma_q^r A_q + \alpha_r^q u^r A_0, \tag{1.6.34a}$$

$$A'_0 = a_{0'}^p A_p + a_{0'}^0 A_0 = u^p A_p + u^0 A_0. \tag{1.6.34b}$$

对于无转动的情况, 由 $\alpha_p^q = \delta_p^q$, 得到

$$A'^p = \left[\delta_p^q + \sum_q \frac{\alpha}{\beta^2}(1-\beta)^2 u^p u^q\right] A^q - u^p A^0, \tag{1.6.35a}$$

$$A'^0 = -\sum_p u^p A^p + u^0 A^0; \tag{1.6.35b}$$

$$A'_p = \left[\delta_p^q + \frac{\alpha}{\beta^2}(1-\beta^2) u^p u^q\right] A_q + u^p A_0, \tag{1.6.36a}$$

$$A'_0 = u^p A_p + u^0 A_0. \tag{1.6.36b}$$

如果上述变换是特殊的洛伦兹变换, 即

$$u = u^1 = \frac{v^1}{c\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad u^2 = u^3 = 0,$$

$$u^0 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{1.6.37}$$

则 (1.6.35) 和 (1.6.36) 简化为

$$A'^1 = \frac{A^1 - \beta A^0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad A'^2 = A^2, \quad A'^3 = A^3, \quad A'^0 = \frac{A^0 - \beta A^1}{\sqrt{1-\beta^2}}; \tag{1.6.38}$$

$$A'_1 = \frac{A_1 + \beta A_0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad A'_2 = A_2, \quad A'_3 = A_3, \quad A'_0 = \frac{A_0 + \beta A_1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{1.6.39}$$

其逆变换式为

$$A' = \frac{A'^1 + \beta A'^0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad A^2 = A'^2, \quad A^3 = A'^3,$$

$$A^0 = \frac{A'^0 + \beta A'^1}{\sqrt{1-\beta^2}}; \tag{1.6.40}$$

$$A_1 = \frac{A'_1 - \beta A'_0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad A_2 = A'_2, \quad A_3 = A'_3,$$

$$A_0 = \frac{A'_0 - \beta A'_1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{1.6.41}$$

如果选用虚坐标, 则由 (1.6.30) 和 (1.6.31) 得到

$$A'^1=\frac{A^1+\mathrm{i}\beta A^4}{\sqrt{1-\beta^2}},\quad A'^2=A^2,\quad A'^3=A^3,$$
$$A'^4=\frac{A^4-\mathrm{i}\beta A^1}{\sqrt{1-\beta^2}};\tag{1.6.42}$$
$$A'_1=\frac{A_1+\mathrm{i}\beta A_4}{\sqrt{1-\beta^2}},\quad A'_2=A_2,\quad A'_3=A_3,$$
$$A'_4=\frac{A_4-\mathrm{i}\beta A_1}{\sqrt{1-\beta^2}}.\tag{1.6.43}$$

逆变换式为

$$A^1=\frac{A'^1-\mathrm{i}\beta A'^4}{\sqrt{1-\beta^2}},\quad A^2=A'^2,\quad A^3=A'^3,$$
$$A^4=\frac{A'^4+\mathrm{i}\beta A'^1}{\sqrt{1-\beta^2}};\tag{1.6.44}$$
$$A_1=\frac{A'_1-\mathrm{i}\beta A'_4}{\sqrt{1-\beta^2}},\quad A^2=A'_2,\quad A^3=A'_3,$$
$$A_4=\frac{A'_4+\mathrm{i}\beta A'_1}{\sqrt{1-\beta^2}}.\tag{1.6.45}$$

对于二阶张量, 由变换式

$$T'^{\mu v}=a^{\mu'}_{\rho}a^{v'}_{\sigma}T^{\rho\sigma},\quad T'_{\mu v}=a^{\rho}_{\mu'}a^{\sigma}_{v'}T_{\rho\sigma},\tag{1.6.46}$$

得到二阶逆变张量的变换式为

$$T'^{pq}=\frac{1}{2}(a^{p'}_{r}a^{q'}_{s}-a^{p}_{s}a^{q'}_{r})T^{rs}-(a^{p'}_{0}a^{q'}_{r}-a^{p'}_{r}a^{q'}_{0})T^{r0},\tag{1.6.47a}$$
$$T'^{p0}=\frac{1}{2}(a^{p'}_{r}a^{0'}_{s}-a^{p}_{s}a^{0'}_{r})T^{rs}+(a^{p'}_{0}a^{0'}_{r}-a^{p'}_{r}a^{0'}_{r})T^{r0},\tag{1.6.47b}$$

即

$$T'^{pq}=\alpha^p_m\alpha^q_n\left[T^{mn}-\frac{\alpha}{\beta^2}(1-\beta^2)u_r(u^nT^{mr}+u^mT^{rn})\right.$$
$$\left.+T^{n0}u^m-T^{m0}u^n\right],\tag{1.6.48a}$$
$$T'^{p0}=\alpha^p_m\left[T^{ms}u_s+T^{m0}u^0+u^mu_rT^{r0}\right.$$
$$\left.-\frac{\alpha}{\beta^2}(1-\beta^2)u^mu_ru_0T^{r0}\right].\tag{1.6.48b}$$

二阶协变张量的变换式为

$$T'_{pq} = \frac{1}{2}(a^r_{p'}a^s_{q'} - a^s_{p'}a^r_{q'})T_{rs} + (a^r_{p'}a^0_{q'} - a^0_{p'}a^r_{q'})T_{r0}, \tag{1.6.49a}$$

$$T'_{p0} = \frac{1}{2}(a^r_{p'}a^s_{0'} - a^s_{p'}a^r_{0'})T_{rs} + (a^r_{p'}a^0_{0'} - a^0_{p'}a^r_{0'})T_{r0}, \tag{1.6.49b}$$

即

$$T'_{pq} = \sum_{rs} \alpha^p_r \alpha^q_s [T_{rs} - \frac{\alpha}{\beta^2}(1-\beta^2)(T_{rn}u_s - T_{sn}u_r)u^n$$
$$- (T_{r0}u_s - T_{s0}u_r)], \tag{1.6.50a}$$

$$T'_{p0} = \sum_r \alpha^p_r [u^s T_{rs} + u^0 T_{r0} + u^m u_r T_{m0}$$
$$- \frac{\alpha}{\beta^2}(1-\beta^2)u_r u^m u^0 T_{m0}]. \tag{1.6.50b}$$

当变换无转动时有

$$T'^{pq} = T^{pq} - \frac{\alpha}{\beta^2}(1-\beta^2)u_r(u^q T^{pr} - u^p T^{qr})$$
$$+ T^{q0}u^p - T^{p0}u^q, \tag{1.6.51a}$$

$$T'^{p0} = T^{ps}u_s + T^{p0}u_0 + \frac{\alpha}{\beta^2}(1-\beta^2)u^p u_r T^{r0}. \tag{1.6.51b}$$

以及

$$T'_{pq} = T_{pq} - \frac{\alpha}{\beta^2}(1-\beta^2)u^s(u_q T_{ps} - u_p T_q s)$$
$$+ (u_p T_{q0} - u_q T_{p0}), \tag{1.6.52a}$$

$$T'_{p0} = T_{pr}u^r + T_{p0}u^0 + \frac{\alpha}{\beta^2}(1-\beta^2)u^r u_p T_{r0}. \tag{1.6.52b}$$

对于狭义洛伦兹变换有

$$u = u^1 = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad u^2 = u^3 = 0, \tag{1.6.53}$$

于是我们得到

$$T'^{1q} = \frac{T^{1q} - \beta T^{0q}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad T'^{2s} = T^{2s};$$

$$T'^{0p} = \frac{T^{0p} - \beta T^{1p}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad T'^{10} = T^{10}, \quad p \neq 1. \tag{1.6.54}$$

以及

$$T'_{1q} = \frac{T_{1q} + \beta T_{0q}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad T'_{23} = T_{23},$$

$$T'_{0p} = \frac{T_{0p} + \beta T^{1p}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad T'_{01} = T_{01}, \quad p \neq 1. \tag{1.6.55}$$

下面我们讨论在广义洛伦兹变换下速度的变换式.

设惯性系 S' 相对于惯性系 S 的速度为 $\boldsymbol{v}$. 一质点相对于 S 和 S' 的速度分别为 $\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}$ 和 $\boldsymbol{v}' = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}'}{\mathrm{d}t'}$, 令 $\beta = \frac{V}{c}$.

由线元的表示式

$$\mathrm{d}s^2 = c^2\mathrm{d}t^2 - \sum_p (\mathrm{d}x^p)^2 = c^2\mathrm{d}t'^2 - \sum_p (\mathrm{d}x'^p)^2 \tag{1.6.56}$$

得到

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = \left(\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t}\right)^2 \left(1 - \frac{v'^2}{c^2}\right). \tag{1.6.57}$$

式中

$$v^p = \frac{\mathrm{d}x^p}{\mathrm{d}t}, \quad v'^p = \frac{\mathrm{d}x'^p}{\mathrm{d}t}, \quad v^2 = \sum_p (v^p)^2, \quad v'^2 = \sum_p (v'^p)^2. \tag{1.6.58}$$

由上式解出

$$\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}{1 - \dfrac{v'^2}{c^2}}}. \tag{1.6.59}$$

由广义洛伦兹变换

$$x'^\mu = a^{\mu'}_\nu x^\nu, \quad x^\mu = a^\mu_{\nu'} x'^\nu \tag{1.6.60}$$

可写出矢量 $\boldsymbol{x}$ 的时间分量和空间分量的变换式

$$x'^p = a^{p'}_q x^q + a^{p'}_0 x^0, \quad x^p = a^p_{q'} x'^q + a^p_{0'} x'^0, \tag{1.6.61a}$$

$$x'^0 = a^{0'}_p x^p + a^{0'}_0 x^0, \quad x^0 = a^0_{p'} x'^p + a^0_{0'} x'^0; \tag{1.6.61b}$$

由此得

$$\frac{\mathrm{d}x'^0}{\mathrm{d}x^0} = \frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t} = a^{0'}_p \frac{v^p}{c} + a^{0'}_0, \quad \frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}x'^0} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'} = a^0_{p'} \frac{v'^p}{c} + a^0_{0'}, \tag{1.6.62a}$$

$$\frac{\mathrm{d}x'^p}{\mathrm{d}x^0} = a^{p'}_q \frac{v^q}{c} + a^{p'}_0, \quad \frac{\mathrm{d}x^p}{\mathrm{d}x'^0} = a^p_{q'} \frac{v'^q}{c} + a^p_{0'}. \tag{1.6.62b}$$

由上二式得到

$$\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t} = a^{0'}_p \frac{v^p}{c} + a^{0'}_0 = \sqrt{\frac{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}{1 - \dfrac{v'^2}{c^2}}}. \tag{1.6.63}$$

将 (1.6.63) 代入 (1.6.62b), 得到

$$\frac{v'^p}{c}\sqrt{\frac{1-\dfrac{v^2}{c^2}}{1-\dfrac{v'^2}{c^2}}}=a^{p'}_q\frac{v^q}{c}+a^{p'}_0, \tag{1.6.64}$$

$$\frac{v^p}{c}\sqrt{\frac{1-\dfrac{v'^2}{c^2}}{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}=a^p_{q'}\frac{v'^q}{c}+a^p_{0'}.$$

如果 S' 系固连于运动的质点 (本征系), 则有

$$\boldsymbol{v}'=0,\quad \boldsymbol{v}=\boldsymbol{V}. \tag{1.6.65}$$

此时由 (1.6.63) 直接得到

$$a^0_{0'}=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}},\quad a^{0'}_p\frac{v^p}{c}=-\frac{\beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{1.6.66}$$

即

$$a^{0'}_p=\frac{-v^p}{c\sqrt{1-\beta^2}}=-u^p. \tag{1.6.67}$$

又由 (1.6.64) 得

$$\frac{v^p}{c\sqrt{1-\beta^2}}=-a^p_{0'}, \tag{1.6.68}$$

$$a^{p'}_q\frac{v^q}{c}=-a^{p'}_0. \tag{1.6.69}$$

如果 S 系是质点的本征系, 即

$$\boldsymbol{v}=0,\quad \boldsymbol{v}'=\boldsymbol{V}'=-D^{-1}\boldsymbol{V}=-D^{-1}\boldsymbol{v}, \tag{1.6.70}$$

式中 $\boldsymbol{V}'$ 是 S 系相对于 S' 系的速度.

在这种情况下, 由 (1.6.63) 得到

$$a^0_{p'}=-\frac{v'p}{c\sqrt{1-\beta^2}}=\frac{D^{-1}v^p}{c\sqrt{1-\beta^2}}=\frac{\alpha^p_q v^q}{c\sqrt{1-\beta^2}}=\alpha^p_q u^q,$$

$$a^{0'}_0=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{1.6.71}$$

由 (1.6.64) 得到

$$a^{p'}_0=\frac{v'^p}{c\sqrt{1-\beta^2}}=u'^p=-D^{-1}u^p=-\alpha^p_q u^q, \tag{1.6.72}$$

$$a^p_{q'}\frac{v'^q}{c} = -a^p_{0'}. \tag{1.6.73}$$

将 (1.6. 72) 代入 (1.6.69), 将 (1.6.68) 代入 (1.6.73), 我们求得

$$a^{p'}_q\frac{v^q}{c} = \alpha^p_q u^q, \tag{1.6.74}$$

$$a^p_{q'}\frac{v'^q}{c} = -u^p. \tag{1.6.75}$$

解方程 (1.6.74) 和 (1.6.75) 得到

$$a^{p'}_q = \alpha^p_q + \frac{\alpha}{v^2}\alpha^p_r v^r v^q, \tag{1.6.76}$$

$$a^p_{q'} = \alpha^p_q + \frac{\alpha}{v^2}\alpha^q_r v^r v^p. \tag{1.6.77}$$

很容易验证, (1.6.76) 和 (1.6.77) 满足方程 (1.6.74) 和 (1.6.75). 将 (1.6.76) 代入 (1.6.74), 得到

$$\begin{aligned} a^{p'}_q\frac{v^q}{c} &= \alpha^p_q\frac{v^q}{c} + \frac{\alpha}{v^2}\alpha^p_r v^r\left(\frac{v^2}{c}\right) = (1+\alpha)\alpha^p_q\frac{v^q}{c} \\ &= \frac{\alpha^p_q v^q}{c\sqrt{1-\beta^2}} = \alpha^p_q u^q. \end{aligned}$$

将 (1.6.77) 代入 (1.6.75), 得到

$$\begin{aligned} a^p_{q'}\frac{v'^q}{c} &= \sum_q\left(\alpha^q_p\frac{v'^q}{c} + \frac{\alpha}{v^2}\alpha^q_r v^p v^r\frac{v'^q}{c}\right) \\ &= D^{-1}\frac{v'^p}{c} + \sum_r\frac{\alpha}{v^2}(D^{-1}v'^r)v^p\frac{v^r}{c} \\ &= -\frac{v^p}{c} - \frac{\alpha}{v^2}v^p\left(\frac{v^2}{c}\right) = -\frac{1+\alpha}{c}v^p = -u^p. \end{aligned}$$

第 2 章　相对论运动学

本章采用的坐标均为实坐标

$$x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z, \quad x^0 = ct. \tag{2.0.1}$$

在非本征四维欧几里得空间中, 采用直线坐标轴, 其单位矢量为 $\boldsymbol{e}_\mu(\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$; 度规张量为

$$g_{\mu\nu} = (\boldsymbol{e}_\mu \cdot \boldsymbol{e}_\nu) = \eta_{\mu\nu}, \tag{2.0.2}$$

式中

$$[\eta_{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{2.0.3}$$

四维线元具有形式

$$\mathrm{d}s^2 = c^2\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2 = (\mathrm{d}x^0)^2 - \sum_p (\mathrm{d}x^p)^2. \tag{2.0.4}$$

2.1　四维速度矢量

三维空间中质点速度的分量

$$v^p = \frac{\mathrm{d}x^p}{\mathrm{d}t} \tag{2.1.1}$$

不构成四维矢量的空间分量, 因为 $\mathrm{d}t$ 不是标量. 代替 (2.1.1), 我们引入四维矢量

$$u^\mu = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s}. \tag{2.1.2}$$

由线元的表示式

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 &= c^2\mathrm{d}t^2 - \sum_p (\mathrm{d}x^p)^2 = c^2\mathrm{d}t^2 \left[1 - \frac{1}{c^2}\sum_p \left(\frac{\mathrm{d}x^p}{\mathrm{d}t}\right)^2\right] \\ &= c^2\mathrm{d}t^2(1-\beta^2) \end{aligned} \tag{2.1.3}$$

可以得到

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}=\frac{1}{c\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{2.1.4}$$

$$u^\mu=\frac{\mathrm{d}x^p}{\mathrm{d}s}=\frac{1}{c\sqrt{1-\beta^2}}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t}. \tag{2.1.5}$$

将 (2.1.4) 和 (2.1.5) 式写为空间分量和时间分量的形式

$$u^p=\frac{v^p}{c\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{2.1.6a}$$

$$u^0=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{2.1.6b}$$

由 (2.1.6) 可知有

$$u^\mu u_\mu=(u^0)^2-\sum_p(u^p)^2=\frac{1-\sum\limits_p(u^p/c)^2}{1-\beta^2}=1. \tag{2.1.7}$$

下面我们讨论速度的变换式. 设一质点相对于惯性系 S 的速度为 $\boldsymbol{v}$. 质点的四维速度为 $u^\mu=\dfrac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s}$, 其空间分量和时间分量分别以 (2.1.6a) 和 (2.1.6b) 表示. 当由惯性系 S 变换到惯性系 S' 时, 四维矢量 u^μ 将按下式变换:

$$u'^\mu=a_v^{\mu'}u^\nu=a_q^{\mu'}u^q+a_0^{\mu'}u^0. \tag{2.1.8}$$

逆变换为

$$u^\mu=a_{r'}^{\mu}u'^\nu=a_{q'}^{\mu}u'^q+a_{0'}^{\mu}u'^0. \tag{2.1.9}$$

考虑到 (2.1.6), 可将上二式写为

$$\frac{v'^p}{c\sqrt{1-\dfrac{v'^2}{c^2}}}=a_q^{p'}\frac{v^p}{c\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}+a_0^{p'}\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}, \tag{2.1.10a}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v'^2}{c^2}}}=a_q^{0'}\frac{c^q}{c\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}+a_0^{0'}\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}; \tag{2.1.10b}$$

以及

$$\frac{v^p}{c\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}=a_{q'}^{p}\frac{v'^q}{c\sqrt{1-\dfrac{v'^2}{c^2}}}+a_{0'}^{p}\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v'^2}{c^2}}}, \tag{2.1.11a}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=a^0_{q'}\frac{v'^q}{c\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}}+a^0_{0'}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}}. \tag{2.1.11b}$$

由 (2.1.11) 可以得到

$$a^{0'}_q\frac{v^q}{c}+a^{0'}_0=\frac{1}{a^0_{q'}\frac{v'^q}{c}+a^0_{0'}}=\sqrt{\frac{1-\frac{v^2}{c^2}}{1-\frac{v'^2}{c^2}}}. \tag{2.1.12}$$

将 (2.1.12) 代入 (2.1.10) 和 (2.1.11), 得到

$$\frac{v'^p}{c}=\frac{a^{p'}_q\frac{v^q}{c}+a^{p'}_0}{a^{q'}_0\frac{v^q}{c}+a^{0'}_0}, \tag{2.1.13}$$

以及

$$\frac{v^p}{c}=\frac{a^p_{q'}\frac{v'^q}{c}+a^{p'}_0}{a^0_{q'}\frac{v'^q}{c}+a^0_{0'}}. \tag{2.1.14}$$

2.2　广义速度合成公式

前一节我们得到了广义洛伦兹变换下 ($a^{\nu'}_\mu$ 和 $a^\nu_{\mu'}$ 是变换系数), 质点三维速度的变换式

$$\boldsymbol{v}'=\boldsymbol{v}'(\boldsymbol{v},a^{\nu'}_\mu), \tag{2.2.1}$$

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(\boldsymbol{v}',a^\nu_{\mu'}). \tag{2.2.2}$$

在特殊情况下, 当惯性系 S 或 S' 是质点的本征系 S_0 时, 系数 $a^{\nu'}_\mu$ 和 $a^\nu_{\mu'}$ 便确定了 S 向 S_0 或 S' 向 S_0 的变换. 即

$$\boldsymbol{v}'=0,\quad \boldsymbol{v}=\boldsymbol{V},\quad 当\ S'=S_0,$$

$$\boldsymbol{v}=0,\quad \boldsymbol{v}'=\boldsymbol{V}'=-D^{-1}\boldsymbol{V},\quad 当\ S=S_0.$$

由 (2.2.1) 和 (2.2.2) 可以确定系数 $a^{\nu'}_\mu$ 和 $a^\nu_{\mu'}$ 与两个参考系相对速度 $\boldsymbol{V}$ 之间的关系. 这一工作在前一节中已经做过了. 我们得到

$$a^{\nu'}_\mu=a^{\nu'}_\mu(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}')|_{S'\equiv S_0}=a^{\nu'}_\mu(\boldsymbol{v}=\boldsymbol{V},\boldsymbol{v}'=0), \tag{2.2.3}$$

$$a^\nu_{\mu'}=a^\nu_{\mu'}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}')|_{S\equiv S_0}=a^\nu_{\mu'}(\boldsymbol{v}'=-D^{-1}\boldsymbol{V},\boldsymbol{v}=0). \tag{2.2.4}$$

式中的广义洛伦兹变换系数由 (1.6.68)~(1.6.77) 确定.

将 (2.2.1) 代入 (2.2.2), 得到

$$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v}'(v, a_{\mu}^{\nu'}(\boldsymbol{V})), \tag{2.2.5}$$

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{v}', a_{\mu'}^{\nu}(-D^{-1}\boldsymbol{V})). \tag{2.2.6}$$

实际上这一运算就是将 (1.6.17)~(1.6.19) 代入 (2.1.13) 和 (2.1.14). 由此可得

$$\frac{v'^p}{c} = \frac{\alpha_r^p \gamma_q^r \dfrac{v^q}{c} - \alpha^{pr} u^r}{-\sum\limits_p u^p \dfrac{v^p}{c} + u^0}, \tag{2.2.7}$$

$$\frac{v^p}{c} = \frac{\sum\limits_q \alpha_r^q \gamma_p^r \dfrac{v'^q}{c} + u^p}{\sum\limits_p \alpha_s^p u^s \dfrac{v^p}{c} + u^0}, \tag{2.2.8}$$

式中

$$\begin{aligned}
\gamma_p^r &= \delta_p^r + \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta^2}(1-\sqrt{1-\beta^2})u^r u^p \\
&= \delta_p^r + \frac{(1-\sqrt{1-\beta^2})V^r V^p}{v'^2\sqrt{1-\beta^2}}.
\end{aligned} \tag{2.2.9}$$

在无转动的情况下, 我们得到

$$\begin{aligned}
\frac{v'^p}{c} &= \frac{\left(\gamma_q^p \dfrac{v^q}{c} - u^p\right)\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \sum\limits_q \dfrac{v^q V^q}{c^2}} \\
&= \frac{\dfrac{v^p}{c}\sqrt{1-\beta^2} + \dfrac{v^p}{c}\left[\sum\limits_q \dfrac{V^q v^q}{V^2}(1-\sqrt{1-\beta^2}) - 1\right]}{1 - \sum\limits_p \dfrac{v^p V^p}{c^2}},
\end{aligned} \tag{2.2.10}$$

$$\frac{v^p}{c} = \frac{\left(\sum\limits_q \gamma_q^p \dfrac{v'^q}{c} + u^p\right)\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \sum\limits_p \dfrac{v'^p V^p}{c^2}}$$

$$
= \frac{\dfrac{v'^p}{c}\sqrt{1-\beta^2} + \dfrac{v^p}{c}\left[\displaystyle\sum_q \frac{v'^q V^q}{V^2}(1-\sqrt{1-\beta^2}) + 1\right]}{1 + \displaystyle\sum_p \frac{v'^p V^p}{c^2}}, \tag{2.2.11}
$$

(2.2.10) 和 (2.2.11) 式可以写成矢量形式

$$
\boldsymbol{v}' = \frac{\boldsymbol{v}\sqrt{1-\beta^2} + \boldsymbol{V}\left[\dfrac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{V}}{V^2}(1-\sqrt{1-\beta^2}) - 1\right]}{1 - \dfrac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{V}}{c^2}}, \tag{2.2.12}
$$

$$
\boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{v}'\sqrt{1-\beta^2} + \boldsymbol{V}\left[\dfrac{\boldsymbol{v}'\cdot\boldsymbol{V}}{V^2}(1-\sqrt{1-\beta^2}) + 1\right]}{1 + \dfrac{\boldsymbol{v}'\cdot\boldsymbol{V}}{c^2}}. \tag{2.2.13}
$$

在更特殊的情况下, 当 S 系和 S' 系的坐标轴对应平行, 且相对速度方向沿 Ox 轴时, 上式便退化为通常狭义相对论中的速度合成公式

$$
\begin{aligned}
&v'_x = \frac{v_x - V}{1 - \dfrac{\beta}{c}v_x}, \quad v'_y = \frac{v_y\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \dfrac{\beta}{c}v_x},\\
&v'_z = \frac{v^z\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \dfrac{\beta}{c}v_x};
\end{aligned} \tag{2.2.14}
$$

$$
\begin{aligned}
&v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \dfrac{\beta}{c}v'_x}, \quad v_y = \frac{v'_y\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \dfrac{\beta}{c}v'_x},\\
&v'_z = \frac{v'^z\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \dfrac{\beta}{c}v'_x}.
\end{aligned} \tag{2.2.15}
$$

2.3 速度矢量的大小和方向

将变换系数的表示式 (1.6.17) 和 (1.6.18) 代入 (2.1.12), 得到

$$
-\sum_q \frac{u^q u^q}{c} + u^0 = \frac{1}{\displaystyle\sum_q \alpha^q_r u^r \frac{v'^q}{c} + u^0} = \sqrt{\frac{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}{1 - \dfrac{v'^2}{c^2}}}. \tag{2.3.1}
$$

我们限于讨论无转动的情况. 这时上式可写为

$$\frac{1-\dfrac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{V}}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}=\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1+\dfrac{\boldsymbol{v}'\cdot\boldsymbol{V}}{c^2}}=\sqrt{\frac{1-\dfrac{v^2}{c^2}}{1-\dfrac{v'^2}{c^2}}}. \tag{2.3.2}$$

由此可得

$$\frac{1-\dfrac{v'^2}{c^2}}{1-\dfrac{v^2}{c^2}}=\frac{\left(1+\dfrac{\boldsymbol{v}'\cdot\boldsymbol{V}}{c^2}\right)^2}{1-\beta^2}=\frac{1-\beta^2}{\left(1-\dfrac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{V}}{c^2}\right)^2}, \tag{2.3.3}$$

解之得

$$v^2=c^2\left[1-\frac{\left(1-\dfrac{v'^2}{c^2}\right)(1-\beta^2)}{\left(1+\dfrac{\boldsymbol{v}'\cdot\boldsymbol{V}}{c^2}\right)^2}\right], \tag{2.3.4a}$$

$$v'^2=c^2\left[1-\frac{\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)(1-\beta^2)}{\left(1-\dfrac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{V}}{c^2}\right)^2}\right]. \tag{2.3.4b}$$

以 θ 表示 $\boldsymbol{v}$ 和 Ox 轴的夹角, 以 θ' 表示 $\boldsymbol{v}'$ 和 Ox' 轴的夹角. 对于所讨论的特殊洛伦兹变换, θ' 满足

$$\tan\theta'=\frac{\sqrt{v_y'^2+v_z'^2}}{v_x'}, \tag{2.3.5}$$

$$\sin\theta'=\frac{\sqrt{v_y'^2+v_z'^2}}{v'},\quad \cos\theta'=\frac{v_x'}{v'}. \tag{2.3.6}$$

将 (2.3.5)、(2.3.6) 和关于 θ 的类似表示式代入 (2.3.4) 得

$$v^2=\frac{v'^2+V^2+2v'V\cos\theta'-\left(\dfrac{v'V}{c}\sin\theta'\right)^2}{\left(1+\dfrac{v'V}{c^2}\cos\theta'\right)^2}, \tag{2.3.7}$$

$$v'^2=\frac{v^2+V^2+2vV\cos\theta-\left(\dfrac{vV}{c}\sin\theta\right)^2}{\left(1-\dfrac{vV}{c^2}\cos\theta\right)^2}, \tag{2.3.8}$$

适当选择坐标轴, 使 $\boldsymbol{v}'$ 在 xOy 平面内, 即 $v'_x = 0$. 此时由 (2.2.15) 可知 $v_z = 0$, 即 $\boldsymbol{v}$ 也在 xOy 平面内.

比较 (2.3.5)、(2.3.6) 和变换式 (2.2.14), 我们得到

$$\tan\theta' = \frac{v'_y}{v'_x} = \frac{v_y\sqrt{1-\beta^2}}{v_x - V} = \frac{v\sqrt{1-\beta^2}\sin\theta}{v\cos\theta - V}, \tag{2.3.9}$$

$$v'\sin\theta' = v'_y = \frac{v_y\sqrt{1-\beta^2}}{1-\dfrac{\beta}{c}v_x},$$

$$v'\cos\theta' = \frac{v_x - V}{1-\dfrac{\beta}{c}v_x}. \tag{2.3.10}$$

由 (2.3.9) 得到

$$\tan\theta' = \frac{\sqrt{1-\beta^2}\sin\theta}{\cos\theta - \dfrac{V}{v}}, \tag{2.3.11}$$

由 (2.3.10) 得到

$$\sin\theta' = \frac{\sqrt{1-\beta^2}\sin\theta}{\left(1+\dfrac{V^2}{v^2} - \dfrac{2V}{v}\cos\theta - \beta^2\sin^2\theta\right)^{1/2}}, \tag{2.3.12a}$$

$$\cos\theta' = \frac{\cos\theta - \dfrac{V}{v}}{\left(1+\dfrac{V^2}{v^2} - \dfrac{2V}{v}\cos\theta - \beta^2\sin^2\theta\right)^{1/2}}. \tag{2.3.12b}$$

由 (2.3.10) 直接得到

$$v'^2 = \frac{v_y^2(1-\beta^2) + (v_x^2 - V^2)}{\left(1-\dfrac{\beta}{c}v_x\right)^2}, \tag{2.3.13}$$

即

$$v' = v\frac{\left[1+\dfrac{V^2}{v^2} - \dfrac{2V}{v}\cos\theta - \beta^2\sin^2\theta\right]^{1/2}}{1-\dfrac{\beta v}{c}\cos\theta}. \tag{2.3.14}$$

上式还可改写为

$$v' = v\frac{\left[\left(\dfrac{\beta c}{v} - \cos\theta\right)^2 - (1-\beta^2)\sin^2\theta\right]^{1/2}}{1-\dfrac{\beta v}{c}\cos\theta}. \tag{2.3.15}$$

同样, 可以将 v 用 v' 和 θ' 表示出来

$$v = v' \frac{\left[1 + \frac{V^2}{v'^2} + \frac{2V}{v'} \cos\theta' - \beta^2 \sin^2\theta'\right]^{1/2}}{1 + \frac{\beta v'}{c} \cos\theta'}. \tag{2.3.16}$$

2.4 多普勒效应

设一平面波在折射系数为 n 的介质中传播, 波阵面与 xOy 平面垂直. 波相对于 S 系和 S' 系的相速度分别为 u 和 u'. 两个惯性系之间的相对速度为 $\boldsymbol{v}$, 其方向沿着 Ox 轴.

设在时刻 $t = t' = 0$, 两参考系坐标轴对应重合, 此时波阵面自 O 点出发 (图 1-2)

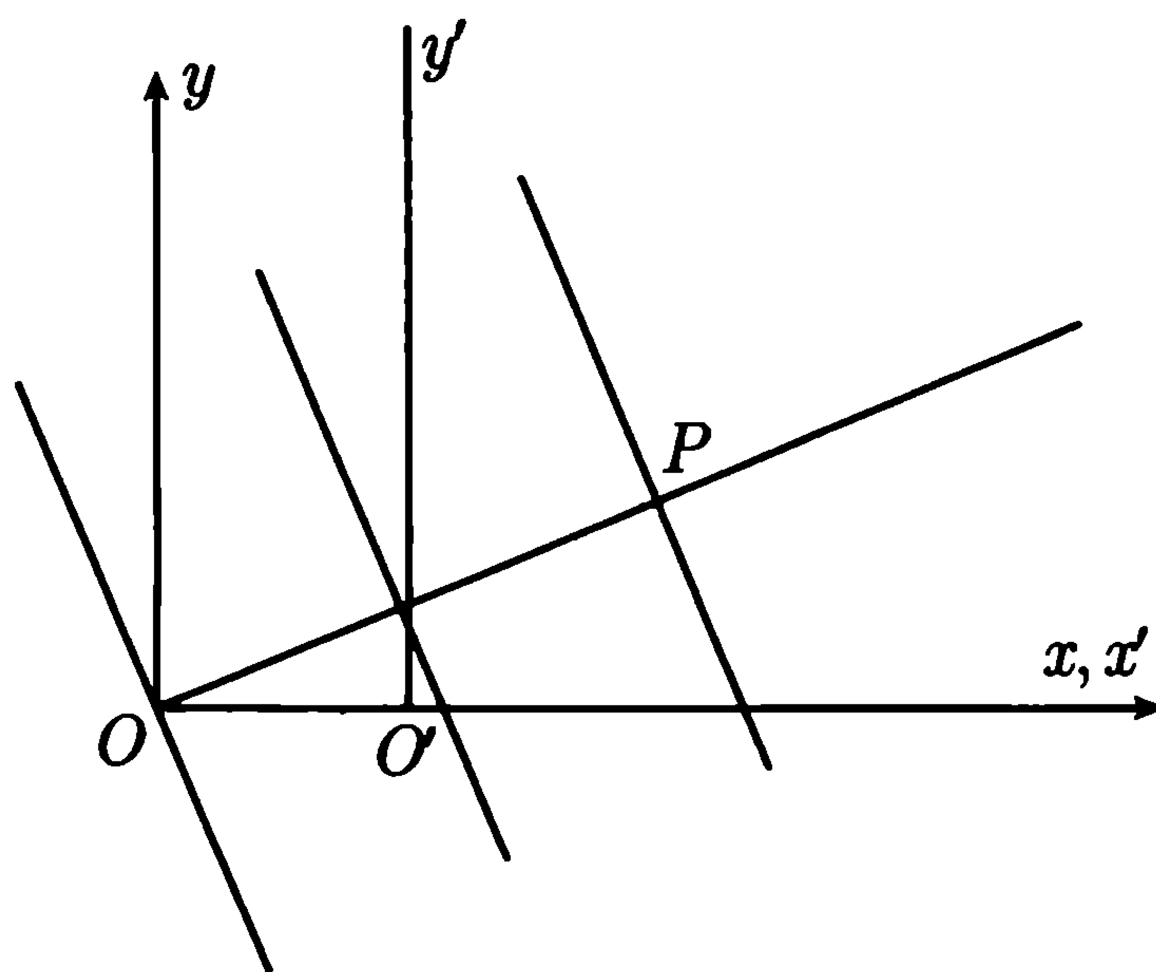


图 1-2

在 S 系中计算, 经过时间 t_0 后, 波阵面传播的距离为

$$ut_0 = x\cos\theta + y\sin\theta,$$

θ 为 $\boldsymbol{u}$ 和 x 轴夹角, 或写成

$$t_0 = \frac{x\cos\theta + y\sin\theta}{u}. \tag{2.4.1}$$

至时刻 t, 到达观察者 $P(x, y)$ 的波数为

$$\nu(t - t_0) = \nu\left(t - \frac{x\cos\theta + y\sin\theta}{u}\right). \tag{2.4.2}$$

在 S' 系中计算, 在对应时间间隔内到达 $P(x', y')$ 的波数为

$$\nu'(t' - t'_0) = \nu'\left(t' - \frac{x'\cos\theta' + y'\sin\theta'}{u'}\right). \tag{2.4.3}$$

在对应时间间隔内, 通过观察者 P 的波数应该相等, 即这一波数不可能依赖于参考系的选择. 于是我们得到

$$\nu\left(t-\frac{x\cos\theta+y\sin\theta}{u}\right)=\nu'\left(t'-\frac{x'\cos\theta'+y'\sin\theta'}{u'}\right). \tag{2.4.4}$$

将狭义洛伦兹变换式代入上式, 得到

$$\nu'=\frac{\nu}{\sqrt{1-\beta^2}}-\frac{V\nu\cos\theta}{u\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{2.4.5}$$

$$-\frac{\nu'\cos\theta'}{u'}=\frac{\beta\nu}{c\sqrt{1-\beta^2}}-\frac{\nu\cos\theta}{u\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{2.4.6}$$

$$\frac{\nu'\sin\theta'}{u'}=\frac{\nu\sin\theta}{u}. \tag{2.4.7}$$

由上二式可得

$$\tan\theta'=\frac{\sqrt{1-\beta^2}\sin\theta}{\cos\theta-\dfrac{\beta u}{c}}, \tag{2.4.8}$$

$$\sin\theta'=\frac{\sqrt{1-\beta^2}\sin\theta}{\sqrt{\left(\dfrac{\beta u}{c}-\cos\theta\right)^2+(1-\beta^2)\sin^2\theta}}, \tag{2.4.9}$$

$$\cos\theta'=\frac{\cos\theta-(\beta u/c)}{\sqrt{\left(\dfrac{\beta u}{c}-\cos\theta\right)^2+(1-\beta^2)\sin^2\theta}}, \tag{2.4.10}$$

$$u'=\frac{u-\beta c\cos\theta}{\sqrt{\left(\dfrac{\beta u}{c}-\cos\theta\right)^2+(1-\beta^2)\sin^2\theta}}. \tag{2.4.11}$$

这些关系式表征相对论多普勒效应和光行差现象.

有趣的是, 如果设

$$\frac{u}{c^2}=\frac{1}{v}, \tag{2.4.12}$$

则式 (2.4.8) 和 (2.4.11) 分别与质点速度合成的式 (2.3.11) 和 (2.3.15) 相合, 即平面波相速度 u 的变换可以从粒子随动波所具有的速度 $v=c^2/u$ 的变换式得到. 这一性质使我们可以用相对论形式表征波和粒子之间的关系：每一个具有恒定速度 v 的粒子都伴随有一个相速度等于 $u=c^2/v$ 的平面波. 这样, 该平面波的波长为

$$\lambda=\frac{u}{\nu}=\frac{c^2}{v}\frac{h}{\varepsilon}=\frac{h}{mc^2}.$$

这里, 与德布罗意关系相对应, 我们设粒子的能量为 $\varepsilon = h\nu = mc^2$.

在特殊情况下, 当 $v = c$ 时, 由 (2.4.12) 得到波的相速度

$$u = \frac{c^2}{v} = c, \tag{2.4.13}$$

与伴随粒子的速度相同.

在 (2.4.5) 和 (2.4.8) 中代入 $u = c$, 便得到常见的相对论多普勒效应表示式

$$\nu' = \frac{\nu(1-\beta\cos\theta)}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{2.4.14}$$

$$\tan\theta' = \frac{\sqrt{1-\beta^2}\sin\theta}{\cos\theta-\beta}, \tag{2.4.15}$$

$$\cos\theta' = \frac{\cos\theta-\beta}{1-\beta\cos\theta}, \quad \sin\theta' = \frac{\sqrt{1-\beta^2}\sin\theta}{1-\beta\cos\theta}. \tag{2.4.16}$$

通常以 $\nu' = \nu_0$ 表示原子的本征频率, 因此有

$$\nu = \frac{\nu_0\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta\cos\theta}. \tag{2.4.17}$$

第 3 章　相对论动力学

3.1　动量、能量和固有质量

在牛顿力学中, 质点的动量表示为

$$\boldsymbol{p}_N = m_0 \boldsymbol{v}, \tag{3.1.1}$$

式中 m_0 是质点的固有常数 ——**惯性质量**.

在狭义相对论中, $\boldsymbol{p}_N$ 和 $\boldsymbol{v}$ 类似, 都不能构成四维矢量的空间分量. 因此, 应该用一个四维矢量代替 (3.1.1), 作为四维动量. 取实坐标, 有正交条件

$$g_{\mu\nu} = (\boldsymbol{e}_\mu \cdot \boldsymbol{e}_\nu) = \eta_{\mu\nu}, \tag{3.1.2}$$

及线元表示式

$$\mathrm{d}s^2 = (\mathrm{d}x^0)^2 + \sum_p (\mathrm{d}x^p)^2. \tag{3.1.3}$$

由四维速度矢量

$$u^\mu = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s} \tag{3.1.4}$$

可定义四维动量矢量

$$P^\mu = m_0 c u^\mu, \quad u^\mu u_\mu = 1, \tag{3.1.5}$$

式中

$$u^p = \frac{v^p}{c\sqrt{1-\beta^2}}, \quad u^0 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c}. \tag{3.1.6}$$

m_0 是质点的固有常数, 称为**固有质量.**

由 (3.1.5) 和 (3.1.6) 可得

$$P^q = \frac{m_0 v^q}{\sqrt{1-\beta^2}} = m v^q, \tag{3.1.5a}$$

$$P^0 = m_0 c u^0 = \frac{m_0 c}{\sqrt{1-\beta^2}} = mc. \tag{3.1.5b}$$

式中令

$$m = \frac{m^0}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{3.1.7}$$

当质点速度很小时, $\beta \to 0, m \to m_0$, 而式 (3.1.5a) 中的 $P^q \to P_N^q$(见 3.1.1). 因此, m_0 是质点的**静止质量**.

由 (3.1.5) 可见, $\boldsymbol{P}^\mu$ 满足关系式

$$\begin{aligned} P_\mu P^\mu = (P^0)^2 - \sum_q (P^q)^2 = \frac{m_0^2 c^2}{1-\beta^2}(1 - \sum_q (v^q)^2/c^2) \\ = m_0^2 c^2. \end{aligned} \tag{3.1.8}$$

如果令 $\boldsymbol{p} = (P^1, P^2, P^3)$, 则有

$$p^2 = \sum_q (p^q)^2 = \sum_q (p^q)^2, \tag{3.1.9}$$

$$(P^0)^2 = p^2 + m_0^2 c^2. \tag{3.1.10}$$

设

$$\frac{W}{c} = P^0 = mc, \tag{3.1.11}$$

即

$$W = \frac{m^0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = mc^2, \tag{3.1.12}$$

则式 (3.1.10) 可改写为

$$W^2 = c^2 p^2 + m_0^2 c^4. \tag{3.1.13}$$

下面我们将看到, 量 W 和质点的动能 T 只差一个常数 $W_0 = m_0 c^2$, 此常数是质点在本征系中 ($\beta = 0$) 的能量 (静止能量).

3.2 质点动力学基本定律

牛顿质点动力学的基本定律为

$$\boldsymbol{f}_N = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}_N}{\mathrm{d}t} = m_0 \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}, \tag{3.2.1}$$

由此得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2} m_0 v^2\right) = \boldsymbol{f}_N \cdot \boldsymbol{v}, \tag{3.2.2}$$

与此相应的能量守恒定律为

$$\begin{aligned} \mathrm{d}T = \boldsymbol{f}_N \cdot \boldsymbol{v}\mathrm{d}t = \boldsymbol{f} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}, \\ T = \frac{1}{2} m_0 v^2. \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

显然, 式 (3.2.1) 不是洛伦兹协变的.$\boldsymbol{f}_N$ 不是四维矢量的空间分量, $\mathrm{d}t$ 也不是标量. 为了得到洛伦兹协变的质点动力学基本定律, 我们用四维速度矢量 u^μ 代替 $\boldsymbol{v}$, 用本征时间元间隔 $\mathrm{d}\tau$ $\left(\mathrm{d}\tau=\dfrac{\mathrm{d}s}{c}\right)$ 代替 $\mathrm{d}t$. 这时式 (3.2.1) 代之以

$$\boldsymbol{F}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}\tau}=m_0c\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}\tau},$$

或者写成

$$F^\mu=\frac{\mathrm{d}P^\mu}{\mathrm{d}\tau}=m_0c\frac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}\tau}=m_0c^2u^\rho\frac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}x^\rho}. \tag{3.2.4}$$

F^μ 称为四维力.

在引力理论中, 常将对坐标的导数简写为

$$\frac{\partial A}{\partial x^\rho}\equiv A_{,\rho}, \tag{3.2.5}$$

这样, (3.2.4) 可简写为

$$F^\mu=m_0c^2u^\rho u^\mu_{,\rho}. \tag{3.2.6}$$

由 (3.1.5) 可得 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^\rho}(P^\mu u_\mu)=0$, 于是有

$$F^\mu u_\mu=F_\mu u^\mu=0. \tag{3.2.7}$$

还可以将 F^μ 写成空间分量和时间分量的形式

$$\begin{aligned}F^p&=m_0c\frac{\mathrm{d}u^p}{\mathrm{d}\tau}=m_0\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{v^p}{\sqrt{1-\beta^2}}\\&=\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{v^p}{\sqrt{1-\beta^2}},\end{aligned} \tag{3.2.8}$$

$$\begin{aligned}F^0&=m_0c\frac{\mathrm{d}u^0}{\mathrm{d}\tau}=m_0c\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\\&=\frac{m_0c}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}.\end{aligned} \tag{3.2.9}$$

下面我们导出与 (3.2.2) 对应的式子.

以 $\boldsymbol{f}$ 表示空间矢量 (f^1,f^2,f^3)

$$f^q=m_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{v^q}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{3.2.10}$$

可以看出, 这样定义的空间矢量 $\boldsymbol{f}$ 在 $\beta\cdot 0$ 时退化为牛顿力 $\boldsymbol{f}_N$. 由 (3.2.10), (3.1.9) 和 (3.1.5a) 可得

$$\boldsymbol{f}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}. \tag{3.2.11}$$

比较 (3.2.8) 和 (3.2.10), 得到

$$F^p = \frac{f^p}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{3.2.12}$$

将上式代入 (3.2.7) 得

$$F_0 u^0 = -F_p u^p = \frac{-f_p v^p}{c(1-\beta^2)}, \tag{3.2.13}$$

即

$$F_0 = \frac{-f_p v^p}{c\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}}{c\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{3.2.14}$$

将 (3.2.14) 与 (3.2.9) 比较, 并注意到 (3.1.12), 得到

$$(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}. \tag{3.2.15}$$

此式便与 (3.2.2) 对应. 它的含义将在下一节中讨论.

由 (3.1.5a) 和 $\boldsymbol{p} = (P^1, P^2, P^3)$ 可得

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}, \tag{3.2.16}$$

所以

$$\boldsymbol{f} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{v} + m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}. \tag{3.2.17}$$

(3.2.15) 可改写为

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \frac{\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}}{c^2} \tag{3.2.18}$$

代入 (3.2.17) 得

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{f} - \left(\frac{\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}}{c^2}\right)\boldsymbol{v}. \tag{3.2.19}$$

上式表明, 作用在质点上的力的方向, 在一般情况下与加速度方向不一致. 仅当力与速度方向平行或垂直时它们才同向. 例如, 带电粒子在恒磁场中运动, $\boldsymbol{f} = \frac{q}{c}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H})$, 这时牛顿运动定律具有形式

$$\boldsymbol{f} = m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}.$$

3.3 质量–能量关系式

现在我们接着讨论 (3.2.15). 与 (3.2.2) 的情况类似, 我们可以由 (3.2.15) 得出质点动能的定义:

$$T = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} + \text{const}. \tag{3.3.1}$$

在 $\beta \ll 1$ 的情况下, 上式退化为

$$T = m_0c^2 + \frac{1}{2}m_0v^2 + \text{const.} \tag{3.3.2}$$

令 $\text{const} = -m_0c^2$, 则 (3.3.2) 恰为牛顿力学中质点的动能. 于是 (3.3.1) 为

$$T = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - m_0c^2, \tag{3.3.3}$$

或者写成

$$T = (m - m_0)c^2 = W - W_0, \tag{3.3.4}$$

$$W_0 = m_0c^2, \quad W = mc^2. \tag{3.3.5}$$

$W_0 = m_0c^2$ 与质点的静止质量相对应, 表示质点的本征能量 (静能), $W = mc^2$ 是质点的总能量.

注意到 $m_0 = \dfrac{W_0}{c^2}$, 可将质点动量 P^μ 的表示式改写为

$$P^q = p^q = \frac{m_0v^q}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{W_0}{c^2}\frac{v^q}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{3.3.6a}$$

$$P^0 = \frac{m_0c}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{W_0}{c}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{3.3.6b}$$

如果一自由粒子 ($\boldsymbol{v} = \text{const}$) 辐射能量 $\varepsilon_0 = h\nu$, 则它的质量变为 m'. 在本征系中, 由能量守恒定律有

$$W_0 = \varepsilon_0 + W_0', \tag{3.3.7}$$

由此得

$$m_0 = m_0' + \frac{\varepsilon_0}{c^2}. \tag{3.3.8}$$

这里已应用 (3.1.13) 和 $\boldsymbol{p} = 0$(本征系). 本征质量的变化为

$$\Delta m_0 = m_0 - m_0' = \frac{W_0}{c^2}. \tag{3.3.9}$$

3.4　时钟佯谬的狭义相对论处理

时钟佯谬是自爱因斯坦创立狭义相对论以来一直为人们关心和竞相讨论的问题. 这一问题的内容表述如下:

两个标准钟在地球上调整同步, 其中一个标准钟 C_1 留在地球上; 当 $t_1 = t_2 = 0$ 时, 另一个标准钟 C_2 由一艘飞船运载飞往一恒星. 飞船以恒定速率 v 沿一直线抵

达恒星, 然后以相同的速率 v 沿同一直线返回地球. 对于这一往返过程, C_1 指示的时间隔为 $\Delta\tau_1$, C_2 指示的时间间隔为 $\Delta\tau_2$. 地球上的观察者 (S 系) 测得

$$\Delta\tau_2 = \Delta\tau_1\sqrt{1-\beta^2}, \quad \beta = v/c. \tag{3.4.1}$$

这一结果正是洛伦兹延缓式. 根据相对性原理, 对于飞船上的观察者 (S' 系), 钟 C_1 同样有洛伦兹延缓.

$$\Delta\tau_1 = \Delta\tau_2\sqrt{1-\beta^2}. \tag{3.4.2}$$

这就是说, 根据相对性原理, (3.4.1) 和 (3.4.2) 应该同时成立. 但是两个钟相遇, 只能有一个结果, 上二式不可能同时成立. 这便是著名的时钟佯谬.

几十年来, 许多学者, 用不同方法讨论过时钟佯谬. 其中有狭义相对论的方法, 也有广义相对论的方法. 本节将用两种狭义相对论方法进行讨论.

方法一 如图 1-3 所示, 标准钟 C 和 C_1 在地球上调整同步, 当 $t = t_1 = 0$ 时, C_1 由一飞船运载飞往恒星, 飞行速率为 v. 当 C_1 到达恒星时, 恰好与速率相同、反向飞来的另一飞船相遇, 并在相遇时, 将这一飞船上的钟 C_2 调整与 C_1 同步 (设此时 $t_1 = t_2 = \tau_1$). 此后, C_2 由飞船运载到达地球, 并与 C 比较快慢.

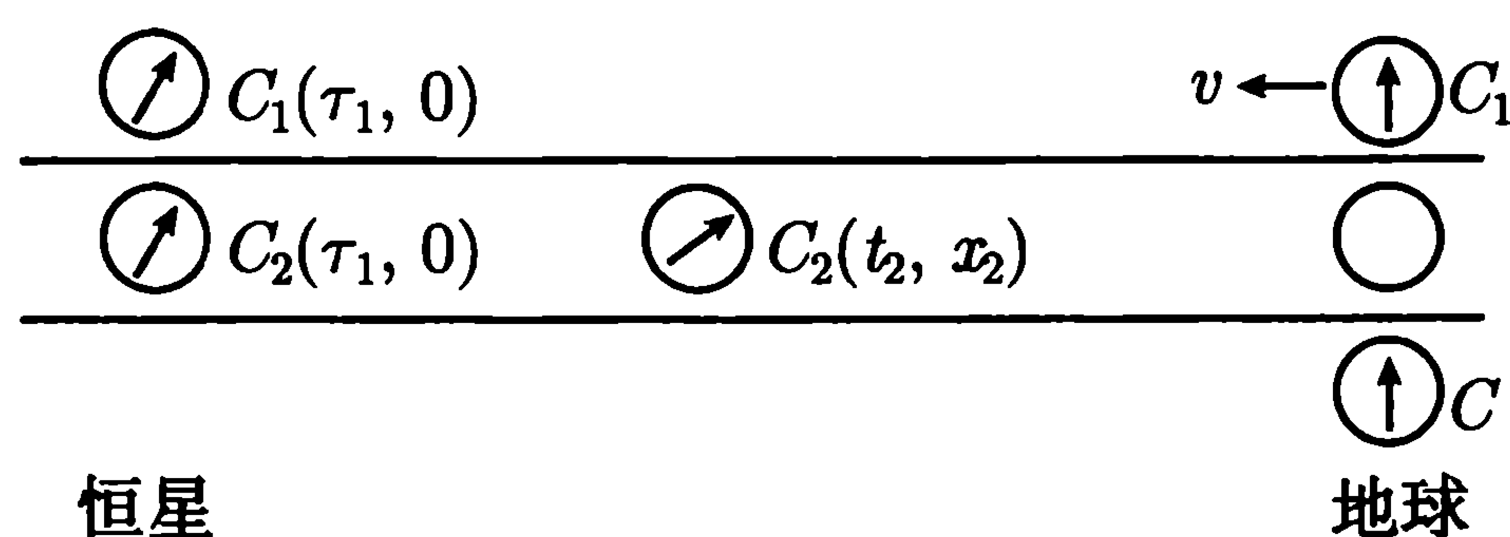


图 1-3

设 C,C_1,C_2 分别固连于参考系 S, S_1 和 S_2. 由于 S_1 和 S 之间存在通常的狭义洛伦兹变换

$$x = \gamma(x_1 + vt_1), \quad \gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}, \quad t = \gamma\left(t_1 + \frac{\beta}{c}x_1\right),$$

故知 C_1 和 C_2 相遇时 ($x_1 = 0, t_1 = \tau_1$) 有

$$x = \gamma v\tau_1, \quad t = \gamma\tau_1. \tag{3.4.3}$$

设 C_2 在任一时刻的坐标为 (t_2, x_2). 因为 C_2 和 C 未校过零点, 即当 $x = 0, t = 0$ 时 x_2 和 t_2 不一定为零, 因此 S_2 和 S 之间的坐标变换可写为

$$x_2 + \lambda = \gamma(x + vt), \tag{3.4.4}$$

$$t_2 + \mu = \gamma\left(t + \frac{\beta}{c}x\right),$$

式中 λ 和 μ 是两个待定常数. 将 C_1 和 C_2 相遇时调整同步的条件 (3.4.3)(当 $x_1 = x_2 = 0$ 时, $t_1 = t_2 = \tau_1$) 代入 (3.4.4), 定出 λ 和 μ

$$\lambda = 2\gamma^2 v\tau_1, \quad \mu = 2\gamma^2 v^2 \tau_1/c^2. \tag{3.4.5}$$

将 (3.4.5) 代回 (3.4.4), 得到 S_2 和 S 之间的坐标变换

$$\begin{aligned} x_2 + 2\gamma^2 v\tau_1 &= \gamma(x + vt), \\ t_2 + 2\gamma^2 v^2\tau_1/c^2 &= \gamma\left(t + \frac{\beta}{c}x\right). \end{aligned} \tag{3.4.6}$$

钟 C_2 到达地球, 和 C 相遇的条件是 $x_2 = x = 0$. 将此条件代入 (3.4.6), 得到

$$t_2 = t\sqrt{1-\beta^2}. \tag{3.4.7}$$

这就是 C_2 和 C 相遇时两种读数的关系. S 和 S_1 中的观察者都应承认这一结果: C_2 较 C 慢了一个因子 $\sqrt{1-\beta^2}$. 因为 C_2 曾与 C_1 调整同步, 因此 S_1 和 S_2 的观察者都承认 C_2 完全可以代替 C_1 去与 C 比较快慢; 而 C_1 和 C 又是校准了零点的. 于是 S_1 和 S 中的观察者得到**同一结论**: 离开地球 (惯性系 S) 作宇航的时钟较留在地球上的时钟慢一个因子 $\sqrt{1-\beta^2}$. 佯谬不复存在. 这一解决方法是 1961 年司蒂文逊 (Stevenson) 给出的.

方法二　如图 1-4 所示, 设钟 C' 由地球到达恒星这一过程, C' 记录的时间间隔为 t', 地球上的钟 C_1 记录的时间间隔为 t_1. 则在固连于地球的 S 系中观测的结果如图 1-4(a) 所示, C_1 和 C_2 同步; $t' = t_1\sqrt{1-\beta^2} = t_2\sqrt{1-\beta^2}$. 对于 C' 返回地球的运动过程, 有同样的关系式. 因此 S 系得到结论

$$\Delta t' = \Delta t\sqrt{1-\beta^2}, \tag{3.4.8}$$

式中 $\Delta t' = 2t', \Delta t = 2t_1 = 2t_2$.

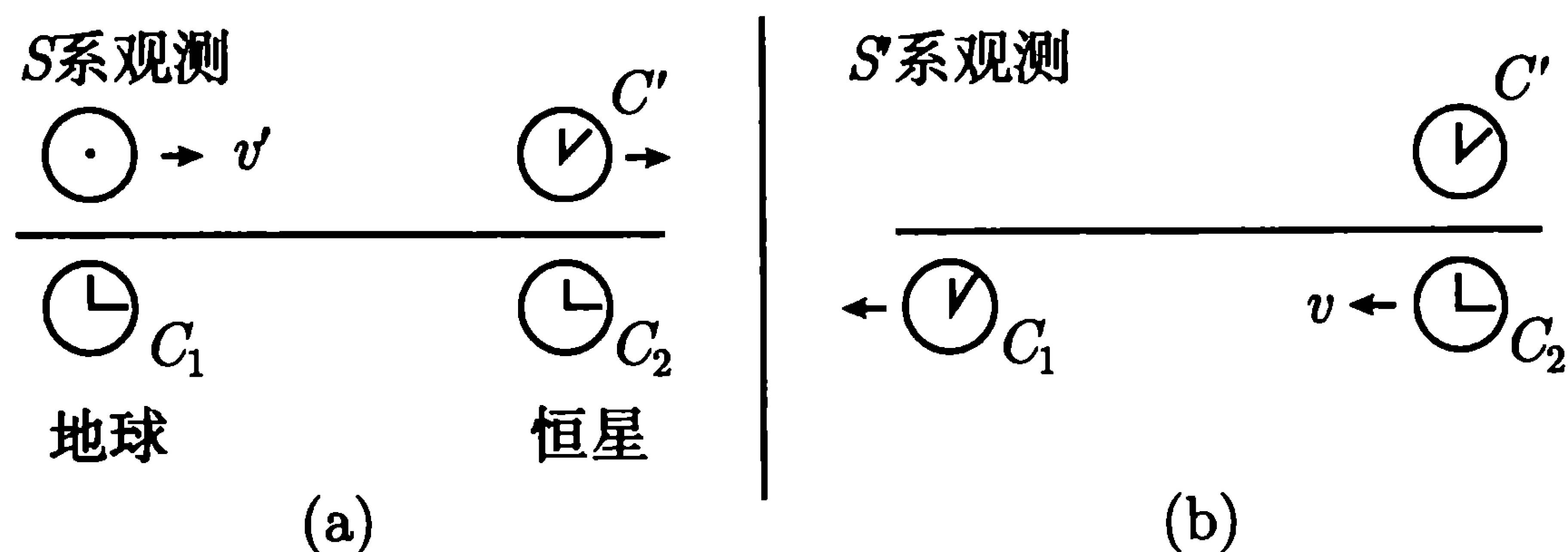


图 1-4

在固连于飞船的 S' 系中观测的结果 (转向前) 如图 1-4(b) 所示: S' 系发现 S 系的两钟 C_1 和 C_2 是不同步的. 按洛伦兹变换容易算得

$$t_2 - t_1 = \gamma\cdot\frac{\beta}{c}l', \quad l' = vt'. \tag{3.4.9}$$

钟 C_1 和 C' 是校过零点的 ($t_1 = 0$ 时 $t' = 0$), 而钟 C_2 和 C' 从未校过零点. 因此, 在 C' 和 C_2 相遇时, 虽然 S 系和 S' 系的观察者都发现 C_2 和 C' 快, 但 S' 系观察者不可能承认 S' 系的钟较 S 系的钟慢了, 他要将 C' 与 C_1 比较. 实际上, 当 C' 与 C_2 相遇时, S' 系测得 C_1 的读数为

$$\begin{aligned} t_1 &= t_2 - \gamma\frac{\beta}{c}l' \\ &= \gamma t' - \frac{\beta}{c}\gamma \cdot vt' = t'\sqrt{1-\beta^2}, \end{aligned} \tag{3.4.10}$$

正符合相对性原理.

转向后, 式 (3.4.9) 中的 v 换为 $(-v)$. S' 系测得, 钟 C' 指同一时刻, 钟 C_1 却突然跳过了 $2\gamma\frac{\beta}{c}l'$. 于是对于整个往返过程, S' 系测得

$$\begin{aligned} \Delta t = \Delta t_1 &= \Delta t'\sqrt{1-\beta^2} + 2\gamma \cdot \frac{\beta}{c}vt' \\ &= \Delta t'(\sqrt{1-\beta^2} + \gamma\beta^2) = \gamma\Delta t', \end{aligned}$$

或者

$$\Delta t' = \Delta t\sqrt{1-\beta^2}, \tag{3.4.11}$$

此式与 S 系测得的结果 (3.4.8) 完全相同, 消除了佯谬. 这一方法是 1992 年 Peirin 给出的.

狭义相对论的诸种方案终因无法计算加速和减速时间而存在缺陷. 在第十篇 5.6 节中, 我们给出一个广义相对论的严格解决方案.

第 4 章　相对论电动力学

4.1　电磁场张量

我们采用实坐标 $x^\mu(\mu=1,2,3,0;x^0=ct)$.

由于 $g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}$, 所以有

$$g_{pq}=g^{pq}=-\delta_{pq},\quad g_{0p}=-g^{0p}=0,\quad g_{00}=g^{00}=1.$$

Maxwell 方程可写为

$$\nabla\times\boldsymbol{H}-\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}=\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{J},\tag{4.1.1a}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=0,\tag{4.1.1b}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=4\pi\rho,\tag{4.1.2a}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0.\tag{4.1.2b}$$

引入四维电流密度矢量

$$J_\mu=\left\{-\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{J},4\pi\rho\right\},\tag{4.1.3}$$

上述四个方程可写为

$$H_{q,p}-H_{p,q}-D_{r,0}=-J_r,\tag{4.1.1a$'$}$$

$$E_{q,p}-E_{p,q}+B_{r,0}=0,\tag{4.1.1b$'$}$$

$$\sum_p D_{p,p}=J_0,\tag{4.1.2a$'$}$$

$$\sum_p B_{p,p}=0,\tag{4.1.2b$'$}$$

式中 $p,q,r=1,2,3$; (4.1.1a$'$) 和 (4.1.1b$'$) 中的 p,q,r 按 $1,2,3$ 顺序取值.

只要使 $\boldsymbol{H},\boldsymbol{D},\boldsymbol{B},\boldsymbol{E}$ 按下面的规律变换:

$$D_1'=D_1,\quad D_2'=\frac{D_2-\beta H_3}{\sqrt{1-\beta^2}},\quad D_3'=\frac{D_3+\beta H_2}{\sqrt{1-\beta^2}},\tag{4.1.4a}$$

$$E_1'=E_1,\quad E_2'=\frac{E_2-\beta B_3}{\sqrt{1-\beta^2}},\quad E_3'=\frac{E_3+\beta B_2}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$H_1' = H_1, \quad H_2' = \frac{H_2 + \beta D_3}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad H_3' = \frac{H_3 - \beta D_2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{4.1.4b}$$
$$B_1' = B_1, \quad B_2' = \frac{B_2 + \beta E_3}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad B_3' = \frac{B_3 - \beta E_2}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

便可以保证 Maxwell 方程组 (4.1.1a′)~(4.1.2.b′) 在洛伦兹变换下是协变的.

引入二阶张量 $f_{\mu\nu}$ 和 $F_{\mu\nu}$, 令

$$H_p = \varepsilon_{pqr} f^{qr}, \quad D_p = f_{po} = -f^{po}, \tag{4.1.5}$$

即

$$H_1 = f_{23} = f^{23}, \quad H_2 = f_{31} = f^{31}, \quad H_3 = f_{12} = f^{12},$$
$$D_1 = f_{10} = -f^{10}, \quad D_2 = f_{20} = -f^{20}, \quad D_3 = f_{30} = -f^{30}$$

和

$$B_p = \varepsilon_{pqr} F^{qr}, \quad E_p = F_{po} = -F^{po}, \tag{4.1.6}$$

即

$$B_1 = F_{23} = F^{23}, \quad B_2 = F_{31} = F^{31}, \quad B_3 = F_{12} = F^{12},$$
$$E_1 = F_{10} = -F^{10}, \quad E_2 = F_{20} = -F^{20}, \quad E_3 = F_{30} = -F^{30},$$

则 (4.1.1a′) 和 (4.1.2.a′) 可合写为

$$f^{\mu p}_{,\rho} = J^{\mu}, \quad \mu = 1,2,3,0. \tag{4.1.7}$$

方程 (4.1.1b′) 和 (4.1.2b′) 可合写为

$$F_{\mu\nu,\rho} + F_{\nu\rho,\mu} + F_{\rho\mu,\nu} = 0. \tag{4.1.8}$$

同时, 由 (4.1.7) 直接得到连续性方程

$$J^{\mu}_{,\mu} = 0. \tag{4.1.9}$$

通常, 把 (4.1.5) 和 (4.1.6) 写成矩阵形式

$$[f_{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} 0 & H_3 & -H_2 & D_1 \\ -H_3 & 0 & H_1 & D_2 \\ H_2 & -H_1 & 0 & D_3 \\ -D_1 & -D_2 & -D_3 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.1.5a}$$

$$[F_{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & E_1 \\ -B_3 & 0 & B_1 & E_2 \\ B_2 & -B_1 & 0 & E_3 \\ -E_1 & -E_2 & -E_3 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.1.6a}$$

当 $\varepsilon = \mu = 1$ 时, $f_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}$, (4.1.5) 和 (4.1.6) 相合.

4.2 四 维 势

在经典电磁学中已经知道

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t},$$
$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}.$$

令

$$A_\mu = \{\boldsymbol{A}, -\varphi\}, \tag{4.2.1}$$

可将前二式写为

$$E_p = A_{o,p} - A_{p,o}, \tag{4.2.2a}$$

$$B_p = A_{r,q} - A_{q,r}, \tag{4.2.2b}$$

式中 p, q, r 按 1,2,3 次序循环. 注意到 (4.1.6), 上二式可统一为

$$F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{u,\nu}. \tag{4.2.2c}$$

因此, 电磁场的势构成一个四维矢量 A_μ. 但是很明显, 矢量 A_μ 的确定只准确到一个标量的梯度. 即当以

$$A'_\mu = A_\mu - \psi_{,\mu} \quad (\psi \text{ 为一标量}) \tag{4.2.3}$$

代替 A_μ 时, (4.2.2c) 中的 $F_{\mu\nu}$ 不变. 变换 (4.2.3) 叫做规范变换. 因此通常说, 电磁场的势的确定只准确到规范变换.

4.3 能量–动量张量

考虑二阶张量

$$E^\lambda_\mu = -F_{\mu\rho}F^{\lambda\rho} + \frac{1}{4}g^\lambda_\mu F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}, \tag{4.3.1}$$

或

$$E_{\mu\nu.} = -F_{\mu\rho}F_{\nu}^{\rho} + \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}, \tag{4.3.1a}$$

式中

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}. \tag{4.3.2}$$

它的分量可以写为矩阵形式

$$[E_{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} & -4\pi S_1 \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} & -4\pi S_2 \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} & -4\pi S_3 \\ -4\pi S_1 & -4\pi S_2 & -4\pi S_3 & 4\pi w \end{pmatrix}. \tag{4.3.1b}$$

式中

$$E_{pq} = -(E_pE_q + H_pH_q) + \frac{1}{2}\delta_{pq}(E^2 + H^2), \tag{4.3.3}$$

$$S_p = \frac{1}{4\pi}(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H})_p, \tag{4.3.4}$$

$$w = \frac{1}{8\pi}(E^2 + H^2), \tag{4.3.5}$$

$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 均为微观场强. 这就是说, E_{po} 表示动量密度, E_{oo} 表示能量密度.

取 (4.3.1) 的散度, 得到

$$E_{\mu,\lambda}^{\lambda} = -F_{\mu\rho,\lambda}F^{\lambda\rho} - F_{\mu\rho}F_{,\lambda}^{\lambda\rho} + \frac{1}{4}(F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma})_{,\mu}, \tag{4.3.6}$$

或者写成

$$\begin{aligned} E_{\mu,\lambda}^{\lambda} = & -\frac{1}{2}(F_{\mu\rho,\lambda} + F_{\lambda\mu,\rho})F^{\lambda\rho} + F_{\mu\rho}J^{\rho} \\ & + \frac{1}{4}(F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma})_{,\mu}. \end{aligned} \tag{4.3.7}$$

但是由第二对 Maxwell 方程可得

$$E_{\mu,\lambda}^{\lambda} = \frac{1}{2}F_{\rho\lambda,\mu}F^{\lambda\rho} + F_{\mu\rho}J^{\rho} + \frac{1}{4}(F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma})_{,\mu}. \tag{4.3.8}$$

由于

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}F_{\rho\lambda,\mu}F^{\lambda\rho} &= \frac{1}{2}\eta^{\lambda\sigma}\eta^{\rho\tau}F_{\rho\lambda,\mu}F_{\sigma\tau} \\ &= \frac{1}{4}\eta^{\lambda\sigma}\eta^{\rho\tau}(F_{\rho\lambda}F_{\sigma\tau})_{,\mu} \\ &= -\frac{1}{4}(F_{\rho\lambda}F^{\lambda\rho})_{,\mu}, \end{aligned}$$

故 (4.3.8) 可改写为

$$E^{\lambda}_{\mu,\lambda}=F_{\mu\rho}J^{\rho}. \tag{4.3.9}$$

洛伦兹力的公式为

$$f^{\mu}=\frac{1}{4\pi}f^{\rho\mu}J_{\rho},$$

相应的四维矢量

$$4\pi f_{\mu}=F_{\rho\mu}J^{\rho} \tag{4.3.10}$$

的三个空间分量即对应于洛伦兹力. 于是有

$$E^{\lambda}_{\mu,\lambda}=-4\pi f_{\mu}. \tag{4.3.11}$$

此时 (4.3.11) 的第四式为

$$E^{p}_{0,p}+E^{0}_{0,0}=-4\pi f_{0}, \tag{4.3.12}$$

即

$$\frac{1}{c}\frac{\partial w}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{s}=-\rho\left(\frac{\boldsymbol{v}}{c}\cdot\boldsymbol{E}\right). \tag{4.3.13}$$

这正是坡印亭定理. 因此, (4.3.11) 既作为洛伦兹力的定义, 也作为电磁能量守恒的条件.

4.4　任意曲线坐标系中的表示式

1. Maxwell *方程*

在欧几里得空间中, 我们取一任意的曲线坐标系. 对于正交系成立的 Maxwell 方程, 当过渡到任意坐标系时将不是协变的. 为了使方程协变, 应该将普通导数改为协变导数. 此时 Maxwell 方程成为

$$f^{\mu\rho}_{;\rho}=J^{\mu}, \tag{4.4.1}$$

$$F_{\mu\nu;\rho}+F_{\nu p;\mu}+F_{\rho\mu;\nu}=0, \tag{4.4.2}$$

以及

$$F_{\mu\nu}=A_{\nu;\mu}-A_{\mu;\nu}. \tag{4.4.3}$$

此外, 协变张量 $f^{\mu\nu}$ 和 J^{μ} 用对应的张量密度表示有时是方便的. 即

$$\mathscr{F}^{\mu\nu}=-\sqrt{g}f^{\mu\nu}\quad(g=\det g_{\mu\nu}), \tag{4.4.4}$$

$$\mathscr{J}^{\mu}=\sqrt{-g}J^{\mu}. \tag{4.4.5}$$

这时方程 (4.4.1) 可写为

$$\mathscr{F}^{\mu\rho}_{;\rho} = \mathscr{J}^{\mu}. \tag{4.4.6}$$

读者可自己证明 (4.4.1)~(4.4.3) 和 (4.4.6) 的正确性.

有时引入对偶张量 $\widetilde{F}^{\mu\nu}$ 和 $\widetilde{F}_{\mu\nu}$ 是方便的. $\widetilde{F}^{\mu\nu}$ 和 $\widetilde{F}_{\mu\nu}$ 的定义是

$$\begin{aligned}\widetilde{F}^{\mu\nu} &= \frac{1}{2\sqrt{-g}}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma},\\ \widetilde{F}_{\mu\nu} &= -\frac{\sqrt{-g}}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\rho\sigma},\end{aligned} \tag{4.4.7}$$

式中 $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ 是 Levi–Civita 符号. 此时 (4.4.2) 可写为

$$(\sqrt{-g}\widetilde{F}^{\mu\rho})_{,\rho} = 0,$$

或者

$$\widetilde{F}^{\mu\rho}_{;\rho} = 0. \tag{4.4.8}$$

这样, Maxwell 方程可表示为下面两个比较对称的方程组:

$$f^{\mu\rho}_{;\rho} = J^{\mu} \quad \text{或} \quad (\sqrt{-g}f^{\mu\rho})_{,\rho} = \mathscr{J}; \tag{4.4.9}$$

$$\widetilde{F}^{\mu\rho}_{;\rho} = 0 \quad \text{或} \quad (\sqrt{-g}\widetilde{F}^{\mu\rho})_{,\rho} = 0. \tag{4.4.10}$$

由此得到连续性方程:

$$J^{\mu}_{;\mu} = 0. \tag{4.4.11}$$

如果 $\varepsilon\mu = 1$, 则有

$$F^{;\nu}_{\mu\nu} \equiv g^{\nu\lambda}F_{\mu\nu;\lambda} = A^{;\nu}_{\nu;\mu} - A^{;\nu}_{\mu;\nu}. \tag{4.4.12}$$

由于 $f_{\mu\nu} = \varepsilon F_{\mu\nu} = \dfrac{1}{\mu}F_{\mu\nu}$ 和 $f^{\mu\rho}_{;\rho} = J^{\mu}, \mu f^{;\nu}_{\mu\nu} = \mu J_{\mu}$. 因此, 对于欧氏空间有

$$\mu J_{\mu} = (A^{;\nu}_{\nu})_{;\mu} - \Box A_{\mu}, \tag{4.4.13}$$

式中

$$\Box \equiv \nabla^{\nu}\nabla_{\nu} \equiv g^{\rho\sigma}\nabla_{\rho}\nabla_{\sigma}, \quad \nabla_{\rho}A \equiv A_{;\rho}.$$

注意洛伦兹条件

$$A^{;\nu}_{\nu} = 0, \tag{4.4.14}$$

(4.4.13) 可写为

$$\Box A_{\mu} = -\mu J_{\mu}. \tag{4.4.15}$$

2. 荷电质点的轨迹

由相对论力学可知, 式

$$F^{\mu} = m_0 c^2 u^{\rho} u^{\mu}_{;\rho} \tag{4.4.16}$$

确定质点的轨迹. 式中 $u^{\mu} = \dfrac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}s}$ 是质点在任意坐标系中的四维速度. 方程 (4.4.16) 也可写为

$$F^{\mu} = m_0 c^2 \left(\frac{\mathrm{d}^2 x^{\mu}}{\mathrm{d}s^2} + \Gamma^{\mu}_{\sigma\rho} \frac{\mathrm{d}x^{\sigma}}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}x^{\rho}}{\mathrm{d}s} \right). \tag{4.4.17}$$

对于荷电粒子, F^{μ} 归结为洛伦兹力

$$f^{\mu} = \frac{1}{4\pi} F^{\rho\mu} J_{\rho},$$

它也可以由 Maxwell 张量

$$E^{\nu}_{\mu} = -F_{\mu\rho} f^{\nu\rho} + \frac{1}{4} \delta^{\nu}_{\mu} F_{\rho\sigma} f^{\rho\sigma}$$

得到. 这里, 和 (4.3.11) 一样, 设

$$E^{\nu}_{\mu;\nu} = -4\pi f_{\mu}. \tag{4.4.18}$$

因此有

$$m_0 c^2 \left(\frac{\mathrm{d}^2 x^{\mu}}{\mathrm{d}s^2} + \Gamma^{\mu}_{\rho\sigma} \frac{\mathrm{d}x^{\rho}}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}x^{\sigma}}{\mathrm{d}s} \right) = \frac{1}{4\pi} F^{\rho\mu} J_{\rho}. \tag{4.4.19}$$

在真空的情况下, 电流 J_{ρ} 和四维速度成正比

$$J_{\rho} = 4\pi \rho_0 u_{\rho}.$$

(4.4.19) 可改写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(u^{\mu} + \Gamma^{\mu}_{\sigma\rho} u^{\sigma} x^{\rho}) = \frac{\rho_0}{m_0 c^2} F^{\rho\mu} u_{\rho}, \tag{4.4.20}$$

或者

$$\frac{\mathrm{d}x^{\lambda}}{\mathrm{d}s}(u^{\mu}_{,\lambda} + \Gamma^{\mu}_{\sigma\lambda} u^{\sigma}) = \frac{\rho_0}{m_0 c^2} F^{\rho\mu} u_{\rho}, \tag{4.4.21}$$

即

$$u^{\lambda} u^{\mu}_{;\lambda} = \frac{\rho_0}{m_0 c^2} F^{\rho\mu} u_{\rho}. \tag{4.4.22}$$

4.5 存在磁单极的情况

在 Maxwell 方程中, $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$ 和 $\nabla \cdot \boldsymbol{D} = 4\pi\rho_e$ 是不对称的, 其理由是至目前为止始终没有发现磁单极的存在.

早在 1931 年, Dirac 由荷电质点波函数的奇异性, 得到磁单极磁荷 g 和电子电荷 e 之间的关系式

$$\frac{g}{e}=\frac{1}{2\alpha}=\frac{\hbar c}{2e^2}\approx\frac{137}{2}, \tag{4.5.1}$$

式中 $\alpha=\dfrac{e^2}{\hbar c}$ 为索末非精细结构常数. Dirac 这一理论是根据量子力学得出的,这里不做介绍. 下面讨论假定磁单极存在时, Maxwell 方程和洛伦兹力应具有的形式.

我们讨论微观电磁场方程. 此时 $f_{\mu\nu}=F_{\mu\nu}$. 场方程和洛伦兹力表示为 (正交系中)

$$F^{\mu\nu}_{,\nu}=J^{\mu}_{e}, \tag{4.5.2}$$

$$\widetilde{F}^{\mu\nu}_{,\nu}=0, \tag{4.5.3}$$

$$f^{\mu}_{e}=\frac{1}{4\pi}F^{\rho\mu}J_{\rho}. \tag{4.5.4}$$

引入磁荷密度 ρ_g 和磁流密度 k^{μ} 及 k_{μ}

$$k^{\mu}=\{\rho_g c,\rho_g \boldsymbol{u}\}, \tag{4.5.5}$$

$$k_{\mu}=\{\rho_g c,-\rho_g \boldsymbol{u}\}, \tag{4.5.6}$$

并假定 (取直角坐标系有 $\sqrt{-g}=1$)

$$\widetilde{F}^{\mu\nu}_{,\nu}=\frac{4\pi}{c}k^{\mu}, \tag{4.5.7}$$

$$f^{\mu}_{g}=\frac{1}{c}\widetilde{F}^{\mu\nu}k_{\nu}. \tag{4.5.8}$$

方程 (4.5.2),(4.5.7) 和 (4.5.4), (4.5.8) 构成了有磁单极时的 Maxwell 方程和洛伦兹力公式.

这里必须指出, $F^{\mu\nu}$ 与 A^{μ} 之间的关系式要加以修正. 因为按原来的假设

$$\begin{aligned}F^{\mu\nu}&=A_{\nu,\mu}-A_{\mu;\nu},\\ \widetilde{F}^{\mu\nu}&=\frac{1}{2\sqrt{-g}}\varepsilon^{\mu\nu\tau\lambda}F_{\tau\lambda},\end{aligned} \tag{4.5.9}$$

容易得到

$$\widetilde{F}^{0\nu}_{,\nu}=0,\quad \widetilde{F}^{p\nu}_{,\nu}=0,$$

于是仍然得到

$$\widetilde{F}^{\mu\nu}_{,\nu}=0,$$

除非 A^{μ} 有奇异性. 这就是说, 按 (4.5.9) 给出的定义, 是不可能引入磁流 k^{μ} 的.

为了引入 k^μ, Dirac(1948) 将 (4.5.9) 式修正为

$$F^{\mu\nu} = A^\nu_{,\mu} - A^\mu_{,\nu} + \Sigma \widetilde{G}^{\mu\nu}. \tag{4.5.10}$$

式中 $\widetilde{G}^{\mu\nu}$ 为一张量, Σ 对所有磁单极取和, 除了磁单极所在的世界线上以外 $\widetilde{G}^{\mu\nu}$ 恒等于零. 下面给出 $G^{\mu\nu}$ 满足的方程. 点电荷和点磁荷产生的 J_μ 和 k_μ 可表示为

$$J_\mu(x) = \sum_i e_i \int \frac{\mathrm{d}\bar{x}_\mu}{\mathrm{d}s} \prod_{j=0}^{3} \delta(x_j - \bar{x}_j)\mathrm{d}s, \tag{4.5.11}$$

$$k_\mu(x) = \sum_i g_i \int \frac{\mathrm{d}\bar{x}_\mu}{\mathrm{d}s} \prod_{j=0}^{3} \delta(x_j - \bar{x}_j)\mathrm{d}s, \tag{4.5.12}$$

式中 $\bar{x}_\mu$ 为电荷或磁荷世界线上点的坐标, 积分沿世界线; $\delta(x_j - \bar{x}_j)$ 为 Dirac δ 函数,

$$\prod_{j=0}^{3} \delta(x_j - \bar{x}_j) = \delta(x_0 - \bar{x}_0)\delta(x_1 - \bar{x}_1)\delta(x_2 - \bar{x}_2)\delta(x_3 - \bar{x}_3),$$

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}(x_\mu - \bar{x}_\mu)\mathrm{d}(x^\mu - \bar{x}^\mu).$$

电荷和磁荷的运动方程式为

$$m_e \frac{\mathrm{d}^2\bar{x}^\mu}{\mathrm{d}s^2} = eF^{\mu\nu}(\bar{x})\frac{\mathrm{d}\bar{x}_\nu}{\mathrm{d}s},$$
$$m_g \frac{\mathrm{d}^2\bar{x}^\mu}{\mathrm{d}s^2} = g\widetilde{F}^{\mu\nu}(\bar{x})\frac{\mathrm{d}\bar{x}_\nu}{\mathrm{d}s}. \tag{4.5.13}$$

由于在世界线上 A^μ 及 $f^{\mu\nu}$ 是奇异的, 故须修改 $F^{\mu\nu}$ 的表示式. 我们引入一新的张量 $\overset{*}{F}{}^{\mu\nu}$, 它和 (4.5.10) 中 $F^{\mu\nu}$ 的关系为

$$\overset{*}{F}{}^{\mu\nu}(x) = \int f^{\mu\nu}(x')\gamma(x - x')\mathrm{d}^4x', \tag{4.5.14}$$

式中 γ 函数暂未确定. 将 (4.5.11) 和 (4.5.12) 代入 (4.5.2), (4.5.7) 以及 (4.5.12), (4.5.13), 我们得到

$$\overset{*}{F}{}^{\mu\nu}_{,\nu} = \sum_i e_i \int \frac{\mathrm{d}\bar{x}^\mu}{\mathrm{d}s} \prod_{j=0}^{3} \delta(x_j - \bar{x}_j)\mathrm{d}s, \tag{4.5.15}$$

$$\widetilde{F}^{\mu\nu}_{,\nu} = \sum_i g_i \int \frac{\mathrm{d}\bar{x}^\mu}{\mathrm{d}s} \prod_{j=0}^{3} \delta(x_j - \bar{x}_j)\mathrm{d}s, \tag{4.5.16}$$

$$m_e \frac{\mathrm{d}^2\bar{x}^\mu}{\mathrm{d}s^2} = eF^{\mu\nu}(\bar{x})\frac{\mathrm{d}\bar{x}_\nu}{\mathrm{d}s}, \tag{4.5.17}$$

$$m_g \frac{\mathrm{d}^2 \bar{x}^\mu}{\mathrm{d}s^2} = g \overset{*}{F}{}^{\mu\nu}(\bar{x}) \frac{\mathrm{d}\bar{x}_\nu}{\mathrm{d}s}. \tag{4.5.18}$$

将 (4.5.10) 代入 (4.5.16), 并利用 $\widetilde{F}^{\mu\nu}$ 的定义, 得到张量 $G^{\mu\nu}$ 满足的方程

$$G^{\mu\nu}_{,\nu} = g \int \frac{\mathrm{d}\bar{x}^\mu}{\mathrm{d}s} \prod_{j=0}^{3} \delta(x_j - \bar{x}_j) \mathrm{d}s. \tag{4.5.19}$$

4.6 Dirac 的磁单极理论

Maxwell 方程的规范不变性可推广至量子力学中荷电点质量的波方程.

考虑一自由质点, Dirac 波方程为

$$\gamma^\mu \frac{\hbar \partial \Psi}{\mathrm{i} \partial x_\mu} - \mathrm{i}mc\Psi = 0, \quad \mu = 1, 2, 3, 4, \tag{4.6.1}$$

这里采用虚坐标: $x^\mu = \{x, y, z, \mathrm{i}ct\}, \gamma^\mu$ 为 4×4 矩阵. 如果存在一电磁场, 矢势为 $A^\mu = \{A_x, A_y, A_z, \mathrm{i}\phi\}$, 则电子的波方程为

$$\gamma^\mu \left(\frac{\hbar}{\mathrm{i}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{e}{c} A^\mu \right) \Psi - \mathrm{i}mc\Psi = 0. \tag{4.6.2}$$

对势 A_μ 作规范变换

$$\begin{aligned} A'_k &= A_k + \chi_{,k}, \\ \phi' &= \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t}. \end{aligned} \tag{4.6.3}$$

对波函数作如下变换:

$$\Psi' = \Psi \exp \left(-\frac{\mathrm{i}e}{\hbar c} \chi \right). \tag{4.6.4}$$

易证

$$\gamma^\mu \left(\frac{\hbar}{\mathrm{i}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{e}{c} A'_\mu \right) \Psi' = \exp \left(\frac{\mathrm{i}e}{\hbar c} \chi \right) \cdot \gamma^\mu \left(\frac{\hbar}{\mathrm{i}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{e}{c} A_\mu \right) \Psi, \tag{4.6.5}$$

故有

$$\gamma^\mu \left(\frac{\hbar}{\mathrm{i}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{e}{c} A'_\mu \right) \Psi' = \mathrm{i}mc\Psi' = 0, \tag{4.6.6}$$

即 Ψ' 与 Ψ 满足同一波方程. 相 $\frac{e}{\hbar c}\chi(x)$ 是取决于电磁场的一个 x^μ 的函数, 与态 Ψ 无关. 由一点 $x^\mu_{(1)}$ 变至另一点 $x^\mu_{(2)}$ 时, 相的变化与路径无关. 这种情况下的相称为可积分的相位. 对于我们的讨论, 这种相没什么用途.

我们考虑方程 (4.6.2). 设

$$\Psi=\Psi'\exp\left(\frac{\mathrm{ie}}{\hbar c}\int A_\mu \mathrm{d}x^\mu\right), \tag{4.6.7}$$

代入 (4.6.2), 得到

$$\exp\left(\frac{\mathrm{ie}}{\hbar c}\int A_\mu \mathrm{d}x^\mu\right)\left(\gamma_\mu\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial x^v}-imc\right)\Psi'=0. \tag{4.6.8}$$

这正是自由质点的波方程. 因此, 引入电磁场 A_μ 等效于在自由质点的波函数中介入一个相因子

$$\exp\left(\frac{\mathrm{ie}}{\hbar e}\int A_\mu \mathrm{d}x^\mu\right). \tag{4.6.9}$$

这里的相位与 (4.6.4) 不同, 量 $\int A_\mu \mathrm{d}x^\mu$ 不是点 x^μ 的函数, 而与积分路径有关. 即

$$\oint A_\mu \mathrm{d}x^\mu \neq 0.$$

应用四维 Stokes 定理, 得到

$$\oint A_\mu \mathrm{d}x^\mu=\iint_s \nabla\times\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}\neq 0, \tag{4.6.10}$$

式中 $\nabla\times\boldsymbol{A}$ 表示四维旋度. 上式表明 A_μ 不普遍满足 $\nabla\times\boldsymbol{A}=0$. 相位 (4.6.9) 称为不可积分的相位.

在经典电动力学中, 电磁现象由电场 E, 磁场 H 或电磁场张量 $F^{\mu v}$ 表述, 它们满足 Maxwell 方程. 在量子力学中, 波动方程含有的量是势 $A_\mu(\boldsymbol{A},\phi)$ 而不是 E,H 和 $F^{\mu v}$. 在相位的表示式中出现的也是 A_μ. 可见规范变换是极其重要的.

Dirac 考虑到电磁场的奇异性与荷电质点波函数相位的关系, 提出了磁单极存在的假设.

在一般情况下, 波函数 ($\Psi=\Psi'\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}$) 的相位 β 精确到一个任意常数: 当电磁场存在时, β 不是坐标 x^μ 的函数, 而取决于电磁场 A_μ; 它与质点的态无关. 因此, 当波函数绕一闭合路径一周时, 位相的增量 $\Delta\beta$ 对任何波函数都相同. 例如, 积分 $\int\Psi_m^*\Psi_n\mathrm{d}\tau$ 的位相 $(-\beta_m+\beta_n)$ 绕一闭合路径的增量等于零. 故此积分有一定值.

上边所讨论的位相增量 $\Delta\beta$ 似乎只能精确到 2π 的整数倍, 无法确定. 但是这一不确定性可以由连续性的考虑消除. 设有任意两个波函数, 当绕一闭合路径一周时, 它们位相的增量 $\Delta\beta$ 之间相差一个 2π 的倍数. 现在使闭合路径 (如闭圈) 连续缩小. 由于波函数的连续性, 闭圈越小则 $\Delta\beta$ 也越小, 终不能有 2π 之差.

假设波函数 Ψ 有一波节线 (其上 $\Psi=0$). 当 $\Psi=0$ 时相位无意义. 因此, 当波函数绕一波节线绕行一周时, 不再能依据波函数的连续性了, 可以说 $\Delta\beta$ 必须很小. 我们只能说 $\Delta\beta$ 接近于 $2n\pi$, n 为正 (或负) 整数. n 的数值是波节线的特征; 其正负号取决于绕行方向 (相对于波节线的方向). Dirac 假设, 波函数沿一环绕波节线的一个小闭圈绕行一周所产生的相位增量 $\Delta\beta$ 与最相近的 $2n\pi$ 之差 $(\Delta\beta-2n\pi)$ 等于任一个没有波节线的波函数绕此闭圈一周产生的相位差.

在磁场中, 绕一个小闭圈 (无波节线穿过) 产生的相位差可写为

$$\frac{e}{\hbar c}\oint A_\mu \mathrm{d}x^\mu=\frac{e}{\hbar c}\iint\limits_s \boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}.$$

按上述假设有

$$\Delta\beta-2n\pi=\frac{e}{\hbar c}\iint\limits_s \boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}. \tag{4.6.11}$$

如闭圈子绕过了多个波节线, 则

$$\Delta\beta-2\sum n\pi=\frac{e}{\hbar c}\iint\limits_s \boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S},$$

式中积分域 s 是以闭圈为边的任一面. 如果将圈缩小, 使 s 成为一闭面, 则 $\Delta\beta\to 0$, 上式成为

$$2\pi\sum n=\frac{e}{\hbar c}\iint\limits_s \boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}. \tag{4.6.12}$$

由于上式右端与波节线无关, 所以 $\sum n$ 与波函数无关. 如果 $\sum n\neq 0$, 则闭面 s 内一定有波节线的端点; 若 s 内没有端点, 则每一波节线必须穿过 s 偶数次. 所以, $\sum n$ 等于 s 内有端点的波节线的 n 之和. 这些端点对所有的波函数都相同, 说明它们是场的特征 (奇异性) 而与波函数无关.

设 s 内有一磁单极, 强度为 g(磁荷), 与电荷同单位, 则有

$$\iint\limits_s \boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=4\pi g. \tag{4.6.13}$$

代入 (4.6.12), 得到

$$\frac{\hbar c}{e}n=2g,\quad n=\pm1,\pm2,\cdots.$$

$n=1$ 时磁单极具有最小磁荷, 此时有

$$\frac{g}{e}=\frac{\hbar c}{2e^2}=\frac{1}{2\alpha}\approx\frac{137}{2}. \tag{4.6.14}$$

第二篇　广义相对论基础

1916 年以前, 即在经典物理学和狭义相对论中, 人们虽然早已知道欧几里得几何和黎曼几何都是合理的, 但一直认为只有欧几里得几何才是真实的, 真实的空间是平直的. 1916 年, 爱因斯坦历史性地突破了经典引力理论的框架, 以全新的观点创立了新的引力理论 —— 广义相对论. 它准确地告诉人们, 当没有引力场存在时, 空间是平直的, 欧几里得几何是真实的; 当有引力场存在时, 空间是弯曲的, 黎曼几何是真实的.

第 1 章　平直时空引力理论

1.1　万有引力定律

两个质量分别为 M 和 M' 的质量相距 r 时, 其间存在一引力

$$F = K\frac{MM'}{r^2}, \tag{1.1.1}$$

式中常数 M 和 M' 是两质点的**引力质量**; K 为普适常数, 它的数值取决于单位制的选择.

牛顿的万有引力定律的建立, 使人们能够严格地导出行星轨道的所有参数, 能够轻而易举地推得开普勒三定律. 从而, 人们第一次揭开了天体运行之谜. 1846 年, 勒威耶和亚当斯根据天王星轨道的摄动, 应用牛顿的万有引力定律, 成功地预言了当时尚未发现的两颗行星 (海王星和冥王星, 冥王星稍晚一些) 的存在, 后来果然被天文观察所证实. 从此, 牛顿的平直时空引力理论得到举世公认, 牛顿的名字誉满全球. 此外, 牛顿引力定律还成功地解释了潮汐现象、地球的形状等地球物理现象. 牛顿引力理论是第一个成功的引力理论. 但是这一理论也有不可克服的困难.

首先, 由式 (1.1.1) 所确定的力是超距作用力. 根据近代的和经典的概念, 这都是不可理解的. 甚至牛顿本人也认为是无法接受的.

更重要的是, 牛顿引力理论与实验事实不相符：牛顿引力定律 (1.1.1) 无法解释天文观测发现的水星近日点的进动这一现象.

人们曾经试图对 (1.1.1) 进行修正. 霍尔 (Hall) 提出

$$F(r) = K\frac{MM'}{r^N}. \tag{1.1.2}$$

按照水星的实验观测资料, 欲使 (1.1.2) 与观测结果相符合, 应有 $N \approx 2.00000016$. 可是如果 N 取这一数值, 则 (1.1.2) 又无法与月球的运动规律相符合.

人们也曾经试图给 (1.1.1) 附加上按 $\dfrac{1}{r^n}$ 规律变化的附加项

$$F(r) = K\frac{MM'}{r^2}\left(1 + \frac{\alpha}{r^n}\right) \tag{1.1.3}$$

式中 $n = 3, 4$ 或 5. 按行星轨道近日点的进动, α 应为正数. 不难发现, 无论 α 取什么值都无法符合水星和其他行星以及月球的运动规律.

牛顿引力理论不能研究宇宙. 用牛顿引力理论研究宇宙将导致著名的 Newman 疑难, 其内容如下:

根据宇宙学原理, 宇宙是各向同性的, 宇宙物质是均匀分布的. 由高斯定理和 (1.1.1) 式容易得到

$$\int \nabla \cdot \boldsymbol{g} \mathrm{d}v = \oint \boldsymbol{g} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}, \tag{1.1.4}$$

式中 $\boldsymbol{g}$ 为引力场强. 和静电学的情况类似, 注意 $\rho = \mathrm{const}$, 得到 $|\boldsymbol{g}| \sim \rho R$. R 可取得任意大, 于是有 g 值不确定. 这是不可接受的.

宇宙是无限的还将导致著名的 Olbers 佯谬. 设宇宙中任一点 O, 在以 O 点为圆心以 r 为半径的球壳内, 恒星数为 $4\pi r^2 \rho \mathrm{d}r, \rho$ 为恒星密度. 球壳内每颗恒星在 O 点产生的照度为 $\dfrac{k}{r^2}, k = \mathrm{const}$, 于是球壳内恒星在 O 点的照度为 $4\pi\rho k \mathrm{d}r$, 宇宙中任一点 O 处的总照度为

$$\int_0^\infty 4\pi\rho k \mathrm{d}r = \infty,$$

即“天空是无限明亮的”. 此即 Olbers 佯谬.

1.2 牛顿引力势

设质点 M 为引力源, 质点 $M' = m$ 为试验质点, 则 (1.1.1) 可写为场分布的形式 (与静电学中的情形类似)

$$\boldsymbol{F} = -m\nabla U, \tag{1.2.1}$$

$$U = -K\frac{M}{r}. \tag{1.2.2}$$

U 叫做牛顿引力势, 它满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2 U = 0$$

如果产生引力场的场源物质密度为 $\rho(x, y, z)$, 则牛顿引力势 $U(x, y, z)$ 满足泊松方程

$$\nabla^2 U = 4\pi k \rho(x, y, z). \tag{1.2.3}$$

牛顿引力理论实际上是一个三维场论. 泊松方程的解给出引力势的空间分布 $U(x, y, z)$. 例如, 当观察点 (x^i) 与物质系统的距离远大于物质系统的线度时, 方程 (1.2.3) 的解可写为

$$U = -k\int \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \mathrm{d}^3 x', \tag{1.2.4}$$

式中 $\boldsymbol{r}=\{x^i\},\boldsymbol{r}'\{x'^i\}$, 分别为观察点和质量元的位矢. 上式可展开为 $\dfrac{1}{r}$ 的幂级数

$$U=-K\left\{\frac{M}{r}+\frac{1}{6}D_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x^i\partial x^j}\left(\frac{1}{r}\right)+\cdots\right\}, \tag{1.2.5}$$

式中

$$M=\int\rho\mathrm{d}^3x \tag{1.2.6}$$

是系统总质量. 质量四极矩张量 D_{ij} 可表示为

$$\begin{aligned}D_{ij}&=\int\rho(3x^ix^j-r^2\delta^{ij})\mathrm{d}^3x\\&=J_{kk}\delta_{ij}-3J_{ij},\end{aligned} \tag{1.2.7}$$

式中

$$J_{ij}=\int\rho(r^2\delta^{ij}-x^ix^j)\mathrm{d}^3x\quad(J_{kk}=J_{11}+J_{22}+J_{33}) \tag{1.2.8}$$

是惯性矩张量. 按定义, 质量四级矩张量是零迹的, 即 $D_{kk}=D_{11}+D_{22}+D_{33}=0$.

1.3 惯性质量和引力质量

由式 (1.1.1) 定义的质量叫做引力质量. 另外, 根据动力学定律

$$\boldsymbol{F}=M\boldsymbol{a}, \tag{1.3.1}$$

其中的常数 M 表征物体对加速的阻碍作用, 定义为物体的**惯性质量**. 同一物体的引力质量和惯性质量分别记为 M_g 和 M_I. 如果设

$$\frac{M_g}{M_I}=\lambda, \tag{1.3.2}$$

则 (1.1.1) 可写为

$$F=K\lambda^2\frac{M_IM_I'}{r^2}=G\frac{M_IM_I'}{r^2},\quad G\equiv K\lambda^2. \tag{1.3.3}$$

伽利略落体实验和精确度不断提高的厄缶 (Eötvös) 实验都证明了物体的引力质量恒等于惯性质量, 即 $\lambda\equiv1$. 因此有

$$K\equiv G, \tag{1.3.4}$$

式中 G 为牛顿引力常数.

由 $M_g\equiv M_I$ 可以得到试验粒子在引力场中的加速度

$$\boldsymbol{a}=\frac{\boldsymbol{F}}{m_I}=-\frac{m_g}{m_I},\quad\nabla U=-\nabla U. \tag{1.3.5}$$

这就是说, 加速度 $\boldsymbol{a}$ 不依赖于试验物体, 只和引力场有关. 这正是伽利略落体实验所得出的结论. 这一结果和电磁场中的情况不同. 在那里, 我们有

$$\boldsymbol{F} = -q\nabla\phi,$$

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}.$$

从而有

$$\boldsymbol{a} = -\frac{q}{m}\nabla\phi.$$

即加速度依赖于试验粒子的荷质比, 而不单纯依赖于电磁场.

为了发现物体的引力质量与惯性质量的差别, 人们不断提高实验的精度, 但所得到的都是零结果. 表 2-1 给出了一些代表性实验的结果, 最右边一纵行的精度表示 $|m_g - m_I|/m_I$.

表 2-1

年份	实验者	精确度
1610	Galileo	2×10^{-3}
1680	Newton	2×10^{-3}
1827	Bessel	2×10^{-5}
1890	Eötvös	5×10^{-8}
1922	Eötvös,Pekar	3×10^{-9}
1935	Renner	2×10^{-10}
1964	Dicke,Krotkov	3×10^{-11}
1971	Braginsky,Panov	9×10^{-13}

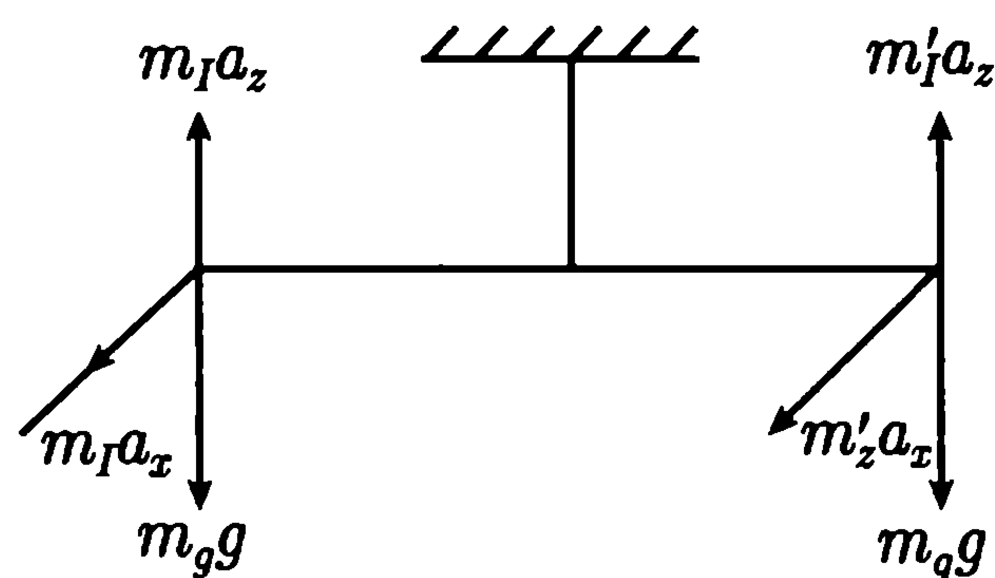


图 2-1

图 2-1 是 Eötvös 实验的示意图. 在一扭秤的两端固定两个材料不同的物体, 调整两壁水平且东西取向. 实验将给出引力质量与惯性质量之比对两个物体是否相同. 如果这一比值 m_g/m_I 对两个物体是相同的, 那么没有扭矩加在扭秤上. 如果比值 m_g/m_I 对于两个物体不相等, 则将产生一个扭矩加在扭秤上, 从而引起它转动.

图中每个物体受两个力: 指向地心的引力 $m_g\boldsymbol{g}$ 和惯性离心力 (由于地球绕轴自转产生的)$m_I\boldsymbol{a}$. 设 z 轴沿径向, 则 $m_I\boldsymbol{a}$ 沿 z 轴和 x 轴方向的分量分别为 m_Ia_z 和 m_Ia_x; $m_g\boldsymbol{g}$ 沿 z 轴的负方向. 我们来计算作用在扭秤上的扭矩的分量. 沿 z 轴的分量为

$$M_z = m_Ia_xl - m'_Ia_xl', \tag{1.3.6}$$

沿 x 轴的分量是

$$M_x = (m_g g - m_I a_z)l - (m'_g g - m'_I a_z)l'. \tag{1.3.7}$$

由于秤处于平衡状态, 所以 $M_x = 0$. 由上二式可得 (消去 l')

$$M_z = m_I a_x l \frac{m'_g/m'_I - m_g/m_I}{m'_g/m'_I - a_z/g}. \tag{1.3.8}$$

设 $\dfrac{m_g}{m_I} = \lambda$. 由上式可见, 如果 $\lambda' \neq \lambda$, 则 $M_z \neq 0$. 结果秤转动 (平衡后使其东西指向). 这时扭矩 M_z 与悬挂的细金属丝产生的反向扭转平衡. 将整个装置绕竖直轴转动 180°, 这等效于交换了两个物体的质量 m 和 m', 引起 M_z 变号. 因此转动 180° 以后 (如果 $M_z \neq 0$), 臂将偏离东西方向. 但实验结果是不存在这种偏离, 即 $M_z = 0, \lambda' = \lambda$.

Dicke 的实验也是用扭秤做的, 但是与 Eötvös 实验不同. 这里的引力是太阳的引力; 惯性离心力是由地球绕太阳的运动产生的. 假定实验是在地球北极做的, 则惯性离心力是水平的. 他所得到的扭矩沿竖直方向的分量为

$$M_z = \{(m_g g - m_I a)l - (m'_g g - m'_I a)j'\}\sin\phi, \tag{1.3.9}$$

式中 g 是由于太阳的引力场产生的加速度, a 是地球上的局部的惯性离心力产生的加速度, ϕ 是秤臂与指向太阳方向的夹角. 由于扭秤固定在实验室中, 所以随着角 ϕ 增加 360°, 扭矩以 24 小时为周期振动. 用这方法可以消除任何非周期效应. 实际上 Dicke 的装置比 Eötvös 的复杂得多, 并且扭秤用三个物体, 而不是两个.

综上所述, 牛顿引力理论取得了辉煌成就, 但也始终存在着不可克服的困难. 它无法解释水星近日点的进动. 在牛顿力学理论 (和狭义相对论) 中, 物体的引力质量恒等于惯性质量这一事实也只能被视为一种"偶合".

爱因斯坦从这"偶合"的事件中发现了新理论的线索, 突破了牛顿引力理论的框架, 从而建立了全新的引力理论. 在爱因斯坦的引力理论 (广义相对论) 的基础上, 建立了现代宇宙学.

第2章　爱因斯坦引力理论基础

2.1　等效原理

考虑一局部空间中的一个假想实验. 如图 2-2 所示, 一封闭实验室中的观察者发现, 其中一物体对弹簧秤的拉力为 mg, 方向向下. 他无法区分所在的参考系属于下列两种情况中的哪一种: ①系统正在太空中, 远离任何一个引力体; 实验室以加速度 g 向上运动. 此时这一局部空间中存在一惯性力场, 物体 m 受一虚构的力 (惯性力)mg 的作用. ②系统停留在一永久引力体的表面, 其局部永久引力场的场强为 g. 此时物体受到真实力 (引力)mg 的作用.

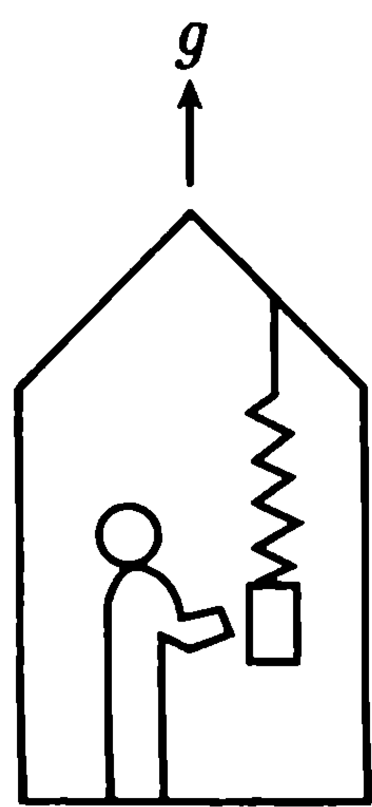


图 2-2

这一假想实验的结果表明, 在局部空间区域, 不可能将虚构的惯性力场和真实的引力场区分开来; 二者的动力学效应之间存在着局部等效性.

对于大的空间区域, 一般不存在上述等效性. 例如, 地球的引力场, 在充分大的空间区域中其力线是辐射状的, 所以不存在一个非惯性系, 其中的惯性力场能够等效于这一辐射状的引力场.

爱因斯坦把上述等效性作为新理论的第一条基本原理 ——等效原理, 表述为: **惯性力场和引力场的动力学效应是局部不可分辨的**.

在爱因斯坦提出等效原理之前, 人们无法处理真实力和虚构力之间的关系, 无法承认物体的引力质量恒等于惯性质量这一事实是自然的. 牛顿认为真实力和虚构力是不同的. 前者依赖于产生它的系统的物理性质, 后者则是由于过渡到加速系所产生的. 惯性力 (惯性离心力、科里奥利力等) 具有特殊的性质; 它可以使物体产生加速度, 且此加速度与被加速的物体的性质无关 (由于这类力可以借助于适当的坐标变换消除, 所以称其为虚构的力). 在这种意义上, 绝对空间可以由选定的一特定参考系表征, 在这一参考系中不存在虚构的力, 只有真实的力; 物理定律具有自然的表述形式. 牛顿曾以著名的水桶实验来证明绝对空间的存在.

图 2-3 中的两幅图分别表示桶开始转动、水未被带动和稳定转动后桶突然静止的情形. 自上向下看, 第一种情况是水相对于桶逆时针转动, 此时水面是平面; 第二种情况是水相对于桶顺时针转动, 此时水面是凹面. 显然, 水的转动对液面形状的影响不能以桶作为参照物, 因为两种情况下水相对于桶都做转动. 两种情况的差异 (液面平与凹) 必取决于第三物体 (或物体组). 牛顿认为这第三物体就是绝对空

间. 当水相对于绝对静止的绝对空间做绝对运动 (转动) 时, 水面是凹面; 当水相对于绝对空间绝对静止时, 水面是平面. 马赫反对这种绝对空间的概念. 他指出, 设想桶变得很大, 大得与恒星系有相同的线度和质量, 相对转动对于水面形状不起作用, 则遥远的恒星不再能作为"第三物体", 绝对空间在哪儿呢?

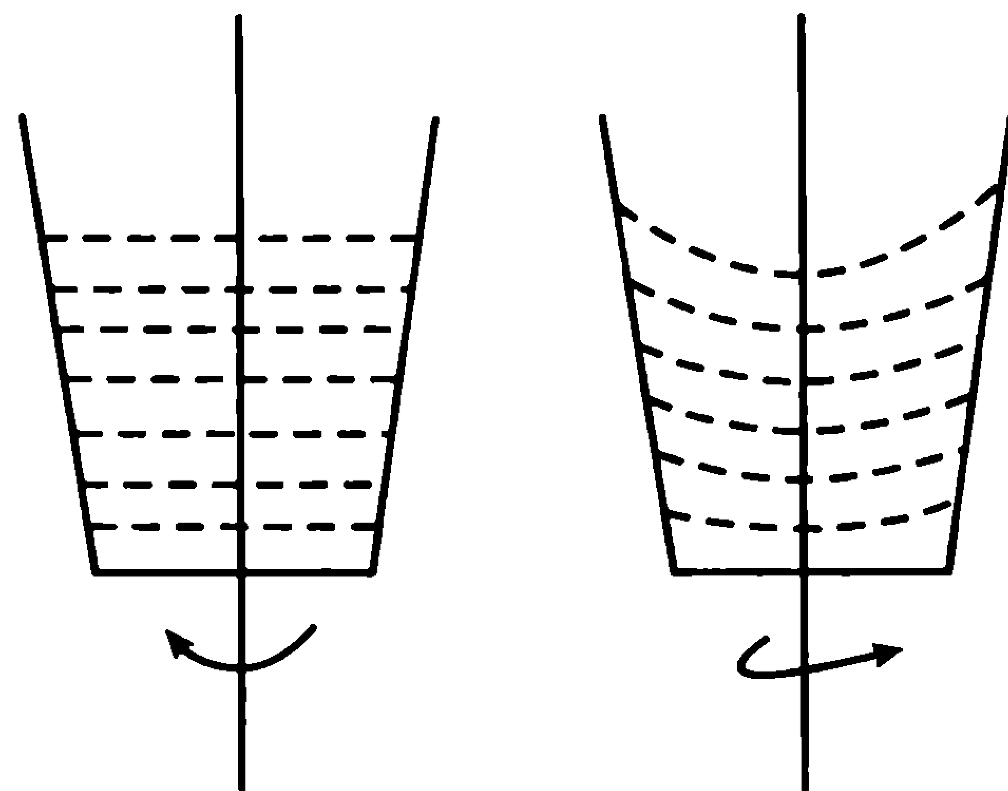


图 2-3

自上向下看: 水相对于桶逆时针转动时水面为平面; 水相对于桶顺时针转动时水面为凹面

在牛顿力学中, 动力学定律是相对于绝对参照系而建立的 (允许相差一个均匀平移, 即关于伽利略群的不变性), 遥远恒星的唯一影响是改变转动桶附近的引力势. 因此马赫认为这种效应 (在经典力学范围内) 是无法理解的.

赫兹和马赫都不同意牛顿的绝对空间的概念, 他们试图从另外的想法出发引入惯性力.

赫兹希望把一定距离上的电磁作用归结为接触作用. 对于引力, 他也想这样做. 惯性原理确定一自由质量做匀速直线运动. 有惯性力时运动的区别是由于其他质量的存在所引起的. 物体的轨迹可由高斯的最小偏离原理确定: 真实的运动以最小的可能程度偏离匀速直线运动. 因此, 惯性原理是最小偏离原理的特殊情况, 它对应于不存在力而存在隐藏质量的情况.

马赫认为, 局部空间的惯性效应 (惯性力场) 是由于远距离质量的存在所引起的. 如果没有远距恒星 (例如, 在空间中只有地球), 则所有的参考系都是等效的, 并且都是惯性系.

爱因斯坦吸取了马赫的上述思想, 提出了等效原理, 并建立了新的引力场方程.

等效原理逻辑简洁地、统一地处理了惯性力场和局部引力场的联系, 自然地得出了物体的惯性质量恒等于引力质量的结论, 即自然地解释了落体实验和厄缶实验的结果.

根据理论研究的需要, 有时将等效原理区分为弱等效原理和强等效原理两种. 上面所表述的 (惯性力场和引力场的动力学效应局部不可分辩) 是弱等效原理. 它还可以这样表述: 物体的引力加速度与被加速物体的成分和物质结构无关. 显然, 弱等效原理是直接为 Eötvös 实验所支持的.

将弱等效原理中的"动力学效应"推广为"任何物理效应", 便得到了强等效

原理. 这一原理表述为：在引力场中一自由落下的 (非转动的) 实验室里, 局部物理定律具有同一数学形式, 与实验室的空间位置无关. 或者表述为：在引力场中任一时空点引入一局部惯性系, 则物理规律的数学形式是洛伦兹协变的. 强等效原理是弱等效原理的推广, 它没有直接的实验支持. 这一原理是广义相对论的基础, 它的正确性只能由它的各个推论是否与实验符合来检验.

等效原理指出, 当空间某一范围存在引力场时 (这是普遍情况), 就不能引入和采用惯性系. 因为在惯性系统中, 惯性力等于零, 而引力却不为零, 这与等效原理矛盾. 因此, 在引力场中只能引入局部惯性系.

在广义相对论中, 由于不存在相互做匀速直线运动的惯性系, 从而使加速度的概念不再像牛顿力学和狭义相对论中那样是绝对的, 而是相对的了.

下面讨论作为爱因斯坦引力理论 (广大相对论) 基础的第二个原理 —— 广义协变原理, 或称广义相对性原理.

2.2 广义协变原理

几乎在所有的物理现象中, 都有引力的参与. 这就是说, 在研究物理现象时必须考虑引力场的存在. 在前节的讨论中已经说明, 当引力场存在时, 不能引入统一的惯性系. 因此, 人们必须在非惯性系中描述物理现象. 狭义相对论只在一时空点的邻域内成立. 这样, 就应该将狭义相对性原理延拓到引力场存在的情况. 换言之, 真实的物理规律不仅在惯性系间的洛伦兹变换下是协变的 (狭义相对性原理), 而且在任意坐标变换下都应该是协变的. 这就是**广义协变原理**, 或称**广义相对性原理**.

广义协变原理可以用下列形式之一表述:

(1) 对于描述物理规律, 所有的坐标系都具有同等资格, 不存在任何一个优越的坐标系.

(2) 描述物理规律的方程中各项应是四维黎曼时空中的同阶张量.

(3) 描述物理定律的方程在所有坐标系中应具有相同的形式.

可以发现, 以上三种表述形式不是完全等价的. 但是从这些表述中不难看出, 根据广义协变原理, 在爱因斯坦引力理论 (广义相对论) 中, 坐标只是用来标记时空事件的簿记系统而已, 不含有比这更多的内容. 物理学结论和结果应不依赖于获得结果所采用的特殊坐标系. 通常, 只有坐标变换下的不变量才具有物理意义.

广义协变原理对于推导物理定律和建立场方程具有指导意义. 例如, 通常在建立场方程时, 首先选择一个由同阶张量构成的标量泛函作为作用量, 再应用变分原理获得场方程. 这一方法就是以广义协变原理为指导的. 又如, 当我们试图把物理定律从狭义相对论形式推广到广义相对论形式 (把引力场包括进去) 时, 这原理是最有用的. 它指导我们将狭义相对论中的麦克斯韦方程推广到广义相对论中. 在这

一过程中常常以协变导数代替普通导数. 当引力被去掉时它们应回到平直时空中的原有形式.

等效原理和广义协变原理是整个广义相对论的基础. 和任何其他的物理学原理一样, 它们不可能由已知的理论、原理证明和推导出来; 在新理论建立时, 它们只能作为假定提出来. 原理的正确性只能由它的和整个新理论的各个推论是否与实验相符合来检验.

爱因斯坦引力理论逻辑十分简洁, 只需要这两个原理就够了. 由这两个原理出发, 导致了引力场的几何化, 即用黎曼几何描述引力场. 这一描述是如此成功、如此漂亮, 致使人们称这两个原理是理论物理中最大的个人成就.

2.3 广义相对论中的空间和时间

1. 非欧几里得几何的引入

早在 1913 年, 爱因斯坦就意识到引力场和惯性力场的等效性应导致空间几何性质的改变. 他假设我们生活的空间是非欧几里得的. 但当时还不知道引力定律以什么形式和黎曼空间的结构条件相联系.

新的引力理论是建立在黎曼空间概念基础上的. 在叙述新的引力定律之前, 我们希望能够阐明非欧几里得几何的空间概念是怎样引入的, 即引力场和惯性力场的等效性以及任意加速参考系的等效性是怎样导致空间的非欧几里得性质的.

爱因斯坦的广义协变原理要求引力定律的数学形式在任何参考系中都是相同的. 这样, 新的引力场方程必须是由非欧几里得空间量构成的方程. 下面我们将看到, 上述空间量就是时空的曲率张量; 同时, 引力场由各质点的世界线 (即时空中的短程线) 给出. 在这里, 动力学问题归结为运动学问题, 而运动学问题是和时空几何概念相联系的; 这几何概念又等效于引力场的概念.

在爱因斯坦引力理论中, 引力场是几何化的, 即假定存在非欧几里得空间, 受引力场作用的质点即为此空间中的自由质点. 根据惯性定律, 这些质点的轨迹应该是欧几里得直线的推广. 在这空间中, 两点间的最短距离是其间的短程线. 因此, 赫兹理论中的隐藏质量和马赫原理中的遥远恒星所产生的效应都表现为使时空弯曲, 从而使质点在这弯曲时空中沿短程线运动. 引力场和惯性力场的等效性奠定了世界结构几何化的基础, 物质分布的影响不表现为力的作用, 而表现为时空的弯曲. 至于欧几里得空间, 则是没有物质的世界.

这样, 引入非欧几里得空间, 便可将相对性原理推广到加速系和由任意弯曲标架所确定的参考系. 换言之, 物理定律的形式不仅对于洛伦兹变换是协变的, 对于任意坐标变换都是协变的.

在欧几里得空间中, 可以确定任意的坐标系, 也可以引入任意的坐标变换. 但是应该指出, 对于整个空间, 两种表述是等效的. 与此相反, 加速系和惯性系的等效性只具有局部性质. 在非欧几里得空间中, 这一局部等效性导致这样的结论: **仿射流形的小区域可以用切于流形某给定点的欧几里得空间来代替**.

非欧几里得空间的引入, 准确地给出了等效原理的含义和它的适用范围.

2. 爱因斯坦转盘

考虑两个同一平面内的同心转盘 S 和 S_0. S_0 为伽利略系 (如实验室坐标系), S 绕中心轴相对于 S_0 以恒定角速度 ω 转动. 在 S_0 系中, 空间是欧几里得的. S 系不再是惯性系, 导致洛伦兹变换的狭义相对论基本假设不再适用. 标准尺和标准钟都要受到惯性力场的影响.

设 S' 系是在所研究的时刻固连于杆 $\mathrm{d}l$ 的惯性系. 我们假定, S 系和 S_0 系中对应的杆长 $\mathrm{d}l$ 和 $\mathrm{d}l_0$ 的比值等于 S' 系和 S_0 系中对应的比值. 这样, 沿同一圆周放置的标准尺都有洛伦兹收缩.

采用柱坐标 (r,θ). 在 S 系中两无限近的点 (r,θ) 和 $(r+\mathrm{d}r,\theta+\mathrm{d}\theta)$ 之间的距离, 在 S_0 系测量, 其值恒为

$$\mathrm{d}l^2=\mathrm{d}r^2+r^2\mathrm{d}\theta^2. \tag{2.3.1}$$

在 S_0 系观测, S 系中沿径向放置的尺等于单位长 ($v=0$, 无洛伦兹收缩); 垂直于半径放置的尺则长度变为 $\sqrt{1-\omega^2r^2/c^2}$. 因此, 在 S 系中测量上述两邻点的距离时, 其值为

$$\mathrm{d}l^2=\mathrm{d}r^2+\frac{r^2\mathrm{d}\theta^2}{1-\omega^2r^2/c^2}. \tag{2.3.2}$$

特殊地, 如果在 S 系中测量一半径为 r 的圆的周长, 则得

$$S=\int\mathrm{d}l=\frac{r}{\sqrt{1-\omega^2r^2/c^2}}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta=\frac{S_0}{\sqrt{1-\omega^2r^2/c^2}}>S_0. \tag{2.3.3}$$

周长与直径之比 (S 系测得) 为

$$\frac{S}{2r}=\frac{S_0}{2r\sqrt{1-\omega^2r^2/c^2}}=\frac{\pi}{\sqrt{1-\omega^2r^2/c^2}}>\pi. \tag{2.3.4}$$

S 系测得圆的面积为

$$S=\int_0^{2\pi}\int_0^r\frac{r\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-\omega^2r^2/c^2}}\mathrm{d}r=\left(1-\sqrt{1-\frac{\omega^2r^2}{c^2}}\right)\frac{2\pi c^2}{\omega^2}. \tag{2.3.5}$$

如果 $v=\omega r\ll c$, 则有

$$S\approx\pi r^2\left(1+\frac{\omega^2r^2}{4c^2}\right). \tag{2.3.6}$$

用加速 (转动系 S) 的标准尺所进行的一切测量, 都将得到 (2.3.2)~(2.3.6). 而加速系中观察者认为只有这样的标准尺才是自然的. 因此, 对于加速系中的观察者, 由测量所构成的几何学是非欧几里得几何学. 他们得到的结论是: **由于存在引力场**(等效原理), **使空间几何不再是欧几里得几何的**.

对于上述转动参考系中的惯性力场, 由式 (2.3.4) 可知, 离中心越远的地方 (引力场强越强) 与欧几里得几何的偏离越大.

下面我们讨论转盘上的"直线"(短程线). 在固定于转盘的 S 系中, 空间的几何性质由其中的线元

$$\mathrm{d}l^2 = g_{ab}\mathrm{d}x^a\mathrm{d}x^b, \quad i,j=1,2 \tag{2.3.7}$$

确定. 设

$$x^1 = r, \quad x^2 = \theta, \tag{2.3.8}$$

由 (2.3.2) 得

$$g_{11} = 1, \quad g_{22} = \frac{r^2}{1-\omega^2 r^2/c}, \tag{2.3.9}$$

$$g_{12} = g_{21} = 0; \tag{2.3.10}$$

$$g^{11} = \frac{g_{22}}{g} = 1, \quad g^{22} = \frac{g_{11}}{g} = \left(1-\frac{\omega^2 r^2}{c^2}\right)r^{-2}, \tag{2.3.11}$$

$$g^{12} = g^{21} = 0. \tag{2.3.12}$$

代入 $\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}$ 的表达式, 得到其不为零的分量

$$\Gamma^1_{22} = -\frac{1}{2}g^{11}g_{22,1} = \frac{-r}{(1-\omega^2 r^2/c^2)^2},$$

$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{2}g^{22}g_{22,1} = \frac{1}{r(1-\omega^2 r^2/c^2)}, \tag{2.3.13}$$

式中 $A_{,1} \equiv \dfrac{\partial A}{\partial x^1}$. 将 (2.3.13) 代入短程线方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^c}{\mathrm{d}l^2} + \Gamma^c_{ab}\frac{\mathrm{d}x^a}{\mathrm{d}l}\frac{\mathrm{d}x^b}{\mathrm{d}l} = 0, \tag{2.3.14}$$

得到

$$\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}l^2} - \frac{r}{(1-\omega^2 r^2/c^2)^2}\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}l}\right)^2 = 0, \tag{2.3.15}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}l^2} + \frac{2}{r(1-\omega^2 r^2/c^2)}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}l}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}l} = 0. \tag{2.3.16}$$

(2.3.16) 即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}\left(\frac{r^2}{1-\omega^2r^2/c^2}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)=0. \tag{2.3.17}$$

积分得

$$\frac{r^2}{1-\omega^2r^2/c^2}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}l}=k. \tag{2.3.18}$$

将上式代入 (2.3.4) 得

$$\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}l}\right)^2=1-\frac{r^2}{1-\dfrac{\omega^2r^2}{c^2}}\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}l}\right)^2=1-\frac{k^2}{r^2}\left(1-\frac{\omega^2r^2}{c^2}\right), \tag{2.3.19}$$

或者写成

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}l}=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\frac{k}{r^2}\left(1-\frac{\omega^2r^2}{c^2}\right)=\pm\sqrt{1-\frac{k^2}{r^2}\left(1-\frac{\omega^2r^2}{c^2}\right)}. \tag{2.3.20}$$

如果积分常数 $k=0$, 则由 (2.3.19) 和 (2.3.18) 可得

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}l}=1,\quad \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}l}=0. \tag{2.3.21}$$

这就是说, 转盘上的短程线是曲线 $\theta=\text{const}$, 即盘的半径.

若 $k\neq 0$, 短程线方程 (2.3.20) 可写为

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}=\pm\frac{r^2}{k}\left(1-\frac{\omega^2r^2}{c^2}\right)^{-1}\sqrt{1-\frac{k^2}{r^2}+\frac{k^2\omega^2}{c^2}}. \tag{2.3.22}$$

令

$$\rho=\frac{r}{k}\sqrt{1+\frac{\omega^2k^2}{c^2}}, \tag{2.3.23}$$

(2.3.22) 可写为

$$\frac{1}{\rho^2\sqrt{1-\rho^{-2}}}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\theta}=\pm1+\frac{k^2\omega^2/c^2}{1+\dfrac{k\omega^2}{c^2}}\frac{1}{\sqrt{1-\rho^{-2}}}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\theta}, \tag{2.3.24}$$

积分得

$$\arccos\rho^{-1}=\pm(\theta-\theta_0)+\frac{k^2\omega^2/c^2}{1+\dfrac{k^2\omega^2}{c^2}}\sqrt{\rho^2-1}. \tag{2.3.25}$$

取 $\theta_0=0$, 我们得到

$$\theta=\pm\arccos\frac{\lambda}{\gamma}\mp\frac{\lambda\omega^2}{c^2}\sqrt{r^2-\lambda^2}. \tag{2.3.26}$$

式中

$$\lambda = \frac{k}{\sqrt{1+\frac{k^2\omega^2}{c^2}}}. \tag{2.3.27}$$

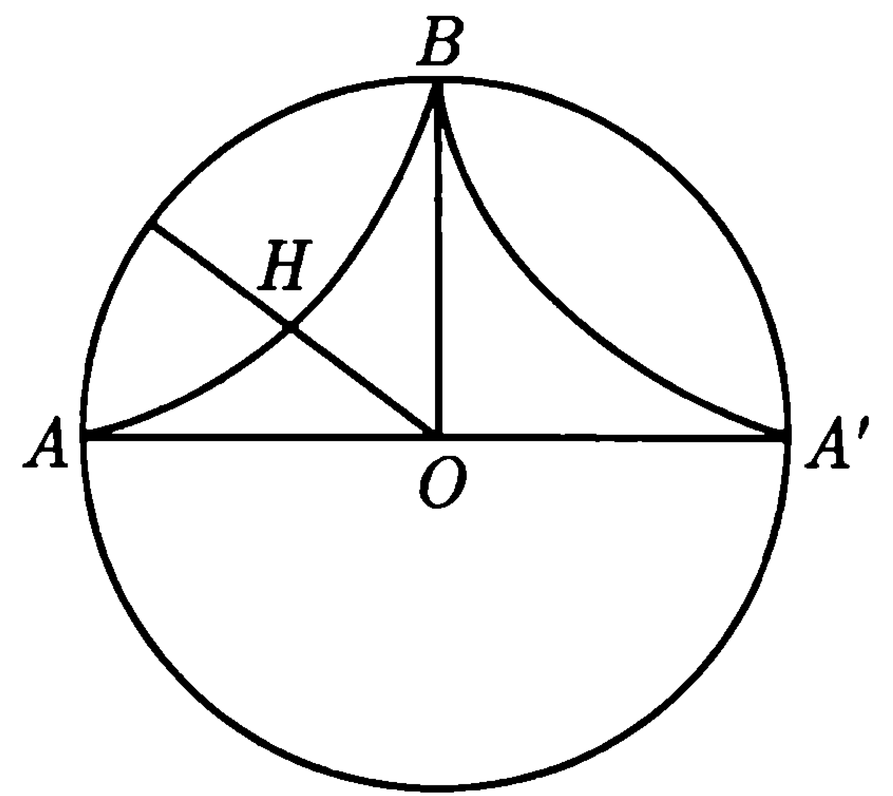


图 2-4

图 2-4 中的三条短程线 AOA', AB 和 BA' 构成一三角形, 其内角和显然介于 0 到 π 之间. 考虑由三条短程线构成的另一三角形 OHA. OA 和 OH 沿径向, AH 沿短程线. 将 (2.3.11) 代入两曲线间夹角的表达式 ①

$$\cos\phi = \frac{g_{ab}\mathrm{d}x^a\delta x^b}{\mathrm{d}l\delta l}, \quad a,b=1,2, \tag{2.3.28}$$

式中

$$\mathrm{d}l^2 = g_{ab}\mathrm{d}x^a\mathrm{d}x^b,$$
$$\delta l^2 = g_{ab}\delta x^a\delta x^b, \tag{2.3.29}$$

① 为了导出式 (2.3.28), 我们考虑三维欧氏空间中的一个二维曲面. 欧氏空间中的直角坐标以 $X^i(i=1,2,3)$ 表示, 曲面上的高斯坐标以 $x^a(a=1,2)$ 表示, 此时曲面方程可写为

$$X^i = X^i(x^a), \quad i=1,2,3 \tag{A$_1$}$$

曲面上两点 X^a 和 $X^a+\mathrm{d}x^a$ 之间的距离为

$$\mathrm{d}s^2 = \sum_i \mathrm{d}X^i\mathrm{d}X^i = \left(\sum_i \frac{\partial X^i}{\partial x^a}\frac{\partial X^i}{\partial x^b}\right)\mathrm{d}x^a\mathrm{d}x^b. \tag{A$_2$}$$

令

$$g_{ab} = \sum_i \frac{\partial X^i}{\partial x^a}\frac{\partial X^i}{\partial x^b}, \tag{A$_3$}$$

则 (A$_2$) 表示为

$$\mathrm{d}s^2 = g_{ab}\mathrm{d}x^a\mathrm{d}x^b, \quad a,b=1,2. \tag{A$_4$}$$

另一方面, 两个方向 $\mathrm{d}x^a$ 和 δx^a 之间夹角的余弦等于

$$\cos\theta = \sum_i \frac{\mathrm{d}X^i}{\mathrm{d}s} - \frac{\delta X^i}{\delta s}, \tag{A$_5$}$$

而

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\sum_i \mathrm{d}X^i\mathrm{d}X^i}, \quad \delta s = \sqrt{\sum_i \delta X^i\delta X^i}. \tag{A$_6$}$$

将 (A$_2$) – (A$_4$) 代入, 得到

$$\cos\theta = \frac{g_{ab}\mathrm{d}x^a\delta x^b}{\mathrm{d}s\delta s} = \frac{g_{ab}\mathrm{d}x^a\delta x^b}{\sqrt{g_{ab}\mathrm{d}x^a\mathrm{d}x^d}\sqrt{g_{ef}\mathrm{d}x^a\mathrm{d}x^f}}, \tag{A$_7$}$$

式中 $a,b,c,d,e,f=1,2$.

δ 和 d 分别表示沿两条曲线的增量, 我们得到

$$\cos\phi = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}l}\frac{\delta r}{\delta l} + \frac{r^2}{1-\dfrac{\omega^2 r^2}{c^2}}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}l}\frac{\delta\theta}{\delta l}. \tag{2.3.30}$$

考虑到 (2.3.18) 和 (2.3.19), 可将 (2.3.30) 写成

$$\cos\phi = \sqrt{1-\frac{k_1^2}{r^2}+\frac{k_1^2\omega^2}{c^2}}\sqrt{1-\frac{k_2^2}{r^2}+\frac{k_2^2\omega^2}{c^2}} + k_1 k_2 \frac{1-\dfrac{r^2\omega^2}{c^2}}{r^2}, \tag{2.3.31}$$

式中 k_1 和 k_2 分别表示与 $\left(\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}l}, \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}l}\right)$ 和 $\left(\dfrac{\delta r}{\delta l}, \dfrac{\delta\theta}{\delta l}\right)$ 对应的积分常数 k.

现在计算短程线三角形 OHA 的内角和. 首先求出沿三条边的 k 值. 对于 OH 和 OA, $\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}l} = 0$, 故 $k_1 = k_3 = 0$.

对于 HA, 在 H 点有 $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}l} = 0$, 由 (2.3.19) 得

$$k_2 = \frac{r_H}{\sqrt{1-\dfrac{\omega^2 r_H^2}{c^2}}}, \quad r_H = OH. \tag{2.3.32}$$

将此式代入 (2.3.18) 得

$$\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}l}\right)_H = k_2 \frac{1-\dfrac{\omega^2 r_H^2}{c^2}}{r_H^2} = r_H^{-1}\sqrt{1-\frac{\omega^2 r_H^2}{c^2}}. \tag{2.3.33}$$

代入 (2.3.31), 对于点 H 有

$$\begin{aligned} &r = r_H, \quad k_1 = 0, \quad k_2 = \frac{r_H}{\sqrt{1-\dfrac{\omega^2 r_H^2}{c^2}}}, \\ &\cos\phi_H = 0, \quad \phi_H = \frac{\pi}{2}; \end{aligned} \tag{2.3.34}$$

对于点 A(设边缘 $\omega r = c$), 我们有

$$\begin{aligned} &\gamma = \frac{c}{\omega}, \quad \kappa_1 = \frac{-\gamma_H}{\sqrt{1-\omega^2 r_H^2 c^2}}, \quad \kappa_3 = 0, \\ &\cos\phi_A = 1, \quad \phi_A = 0; \end{aligned} \tag{2.3.35}$$

对于 O 点, 空间为欧几里得的, 故有

$$\phi_0 \leqslant \frac{\pi}{2}. \tag{2.3.36}$$

由 (2.34)~(2.36) 可知, 三条短程线构成的三角形其内角之和介于 0 到 π 之间

$$\phi_H + \phi_A + \phi_0 \leqslant \pi. \tag{2.3.37}$$

此式再次表明, 由于引力场的存在, 转盘上的空间不再遵守欧几里得几何学.

下面讨论转盘上的坐标时和本征时. 设 S 系钟 C 的读数记为 t, S_0 系的钟 C_0 的读数记作 t_0, S' 系钟 C' 的读数记作 t'. 它们有共同的零点. 和长度测量的情况类似, 我们假定 t 和 t_0 的比值与 t' 和 t_0 的比值相同 (t' 对应于惯性系 S' 系的钟). 这就等于假定同一空间位置的两个钟的读数间存在着洛伦兹关系式:

$$t = t_0\sqrt{1-\frac{\omega^2 r^2}{c^2}}. \tag{2.3.38}$$

两个参考系 S 和 S_0 的观察者都发现 C 较 C_0 慢一个洛伦兹因子. S_0 系观察者把这一现象解释为 C 经受了加速过程; S 系观察者则解释为引力场的作用. 引力场的势为 $U=-\dfrac{1}{2}\omega^2 r$, 故 (2.3.38) 又可写为

$$t = t_0\sqrt{1+\frac{2U}{c}}. \tag{2.3.39}$$

在 S 系中, 不同位置的钟是不同步的, 但位于同一半径圆周上的所有钟都同步. 由式 (2.3.38) 确定的时间称为 S 系中的坐标时.

容易发现, 若用坐标时来确定光速, 则它不等于常数. 实际上, 在 S_0 系中, 对于光信号有

$$\mathrm{d}s_0^2 = -\mathrm{d}r_0^2 - r_0^2\mathrm{d}\theta_0^2 - \mathrm{d}z_0^2 + c^2\mathrm{d}t_0^2 = 0. \tag{2.3.40}$$

变换到 S 系

$$r = r_0, \quad \theta = \theta_0 - \omega t_0, \quad z = z_0, \tag{2.3.41}$$

我们有

$$-\mathrm{d}r^2 - r^2\mathrm{d}\theta^2 - \mathrm{d}z^2 \mp \frac{2\omega r^2\mathrm{d}\theta\mathrm{d}t}{\sqrt{1-\dfrac{\omega^2 r^2}{c^2}}} + c^2\mathrm{d}t^2 = 0, \tag{2.3.42}$$

或者写成

$$\mathrm{d}l_e^2 \pm \frac{2\omega r^2\mathrm{d}\theta\mathrm{d}t}{\sqrt{1-\dfrac{\omega^2 r^2}{c^2}}} - c^2\mathrm{d}t^2 = 0. \tag{2.3.43}$$

采用坐标时, 光速应为

$$v = \frac{\mathrm{d}l_e}{\mathrm{d}t} = \left\{c^2 \mp \frac{\omega\gamma^2}{\sqrt{1-\dfrac{\omega^2 r^2}{c^2}\mathrm{d}t}}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right\}^{1/2}, \tag{2.3.44}$$

式中 $\mathrm{d}l_e$ 为欧几里得空间的线元

$$\mathrm{d}l_e^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\theta^2 + \mathrm{d}z^2. \tag{2.3.45}$$

由 (2.3.44) 可见, 坐标光速不等于常数 c.

下面采用本征时. 代替欧几里得空间线元 $\mathrm{d}l_e$, 我们引入转盘上的非欧几里得空间线元

$$\mathrm{d}l^2 = \mathrm{d}r^2 \frac{r^2\mathrm{d}\theta^2}{1-\dfrac{\omega^2r^2}{c^2}} + \mathrm{d}z^2. \tag{2.3.46}$$

将此式代入 (2.3.42), 得到

$$-\mathrm{d}l^2 + c^2\mathrm{d}\tau^2 = 0, \tag{2.3.47}$$

其中

$$\mathrm{d}\tau = \sqrt{1-\frac{\omega^2r^2}{c^2}}\left(\mathrm{d}t_0 \pm \frac{\omega r^2\mathrm{d}\theta}{c^2(1-\omega^2r^2/c^2)}\right). \tag{2.3.48}$$

量 τ 是与转盘上的非欧几何相对应的本征时间. 采用本征时间, 则光速恒等于常数 c. 这一结论对于一般的静态引力场 (取 $g_{i0}=0$) 都是正确的.

3. 广义相对论中的空间和时间

我们已经看到, 转盘上的二维空间几何是非欧几里得的; 转盘上各处的标准钟是不同步的. 其原因是这一二维空间中存在引力场. 或者说, 引力场使空间弯曲了; 引力场改变了时空属性. 在狭义相对论中, 不管引力场存在与否, 空间都是平直的, 同一参考系中各处的钟都是同步的. 或者说, 在狭义相对论中, 引力场的存在对时空属性没有影响 (严格些说, 忽略了这种影响).

19 世纪以前, 人们认为欧几里得几何学是唯一合理、唯一真实的几何学. 19 世纪初, 人们开始认识到非欧几何和欧几里得几何同样是合理的. 但仍然认为欧几里得几何学是唯一真实的 —— 真实的三维空间只遵守欧几里得几何学. 20 世纪, 广义相对论诞生. 它断言二者都是真实的: 当引力场不存在时, 欧几里得几何是真实的; 当引力场存在时, 非欧几何是真实的.

对于转盘上的二维空间, 我们看到, 任意二曲线间的夹角 (类似地, 任一面元) 都由度规张量 g_{ab} 唯一确定. 对于任意的四维时空, 其几何性质、空间量, 也都由度规张量 $g_{\mu\nu}$ 唯一确定. 这就是说, 只要给出线元的具体表达形式

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu, \quad \mu,\nu = 0,1,2,3 \tag{2.3.49}$$

时空的一切性质便唯一确定.

前面我们曾讨论了转盘上的坐标时和本征时的区别. 下面讨论坐标时和本征时以及坐标钟和标准钟的普遍定义, 给出它们之间的关系.

在任意坐标系 x^μ 中, $t=\dfrac{x^0}{c}$ 称为**坐标时**, 其时计称为**坐标钟**. 在引力场中任一点, 引入一局部静止惯性系 ($\mathrm{d}x^i=0$), 其中静止粒子世界线长度除以 c 称为**本征时**, 以 τ 表示, 其时计称为**标准钟**. 即

$$\mathrm{d}\tau=\frac{\mathrm{d}s}{c}=\sqrt{g_{00}}\mathrm{d}t, \tag{2.3.50}$$

此即坐标钟和标准钟的关系.

2.4 引力场的势

定义引力场强 $\boldsymbol{a}$

$$a^i=\frac{\mathrm{d}^2x^i}{\mathrm{d}t^2},\quad a_i=\gamma_{ij}a^j, \tag{2.4.1}$$

式中 $\gamma_{ij}=\dfrac{g_{0i}g_{0j}}{g_{00}}-g_{ij}$ 为纯空间度规.

和电场的情况类似, 引力场强度也可表示为标势的梯度和矢势对时间的微商. 引力场强可用一静止试验质点所受的力来量度. 在引力场中, 一自由质点的运动方程应为短程线方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left(g_{\mu\sigma}\frac{\mathrm{d}x^\sigma}{\mathrm{d}\lambda}\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}^\lambda}\frac{\mathrm{d}x^\sigma}{\mathrm{d}\lambda}, \tag{2.4.2}$$

或者

$$\frac{\mathrm{d}^2x^\mu}{\mathrm{d}\lambda^2}+\Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}\lambda}=0. \tag{2.4.3}$$

试验质点瞬时静止 ($\mathrm{d}x^i=0$), 上式的空间分量表示为 (取参量 $\lambda=\tau$)

$$g_{ij}\frac{\mathrm{d}^2x^j}{\mathrm{d}\tau^2}=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^i}\left(\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}\tau}\right)^2-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(g_{i0}\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}\tau}\right). \tag{2.4.4}$$

又有

$$\mathrm{d}s^2=c^2\mathrm{d}\tau^2=-\mathrm{d}l^2+g_{00}\mathrm{d}x^{0^2}\left\{1-\frac{\gamma_i}{\sqrt{g_{00}}}\frac{u^i}{c}\right\}^2, \tag{2.4.5}$$

式中

$$u^i\equiv\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}=c\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}x^0},\quad \gamma_i\equiv\frac{-g_{i0}}{\sqrt{g_{00}}}. \tag{2.4.6}$$

将 (2.4.5) 两边除以 $\mathrm{d}x^{02}$, 解出 $\dfrac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}\tau}$, 得到

$$\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}\tau}=c\left\{g_{00}\left(1-\frac{\gamma_iu^i}{c\sqrt{g_{00}}}\right)^2-\frac{u^2}{c^2}\right\}^{-\frac{1}{2}}, \tag{2.4.7}$$

式中

$$u = \frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}. \tag{2.4.8}$$

上式即

$$g_{i0}\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}\tau} = c\gamma_i \left\{\left(1 - \frac{\gamma_k u^k}{c\sqrt{g_{00}}}\right)^2 - \frac{u^2}{c^2 g_{00}}\right\}^{-\frac{1}{2}} \tag{2.4.9}$$

两边对 τ 微分, 并注意到 $u^i = 0, \mathrm{d}s^2 = g_{00}\mathrm{d}x^{0^2} = c^2\mathrm{d}\tau^2$, 得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(g_{0i}\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}\tau}\right) = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}}\left\{c^2\frac{\partial\gamma_i}{\partial x^0} + \frac{\gamma_i\gamma_k}{\sqrt{g_{00}}}\frac{\mathrm{d}^2x^k}{\mathrm{d}t^2}\right\}. \tag{2.4.10}$$

又由 $\mathrm{d}\tau = \sqrt{g_{00}}\mathrm{d}t$ 可得

$$\frac{\mathrm{d}^2x^k}{\mathrm{d}\tau^2} = \frac{1}{g_{00}}\frac{\mathrm{d}^2x^k}{\mathrm{d}t^2}. \tag{2.4.11}$$

将 (2.4.6)~(2.4.11) 代入 (2.4.4), 得到

$$\gamma_{ik}\frac{\mathrm{d}^2x^k}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{c^2 g_{00}}{2}\right) - c\sqrt{g_{00}}\frac{\partial\gamma_i}{\partial t}. \tag{2.4.12}$$

令

$$U = -\frac{c^2}{2}(1 - g_{00}),$$

即

$$g_{00} = 1 + \frac{2U}{c^2}, \tag{2.4.13}$$

(2.4.12) 可写为

$$a_i = \gamma_{ik}\frac{\mathrm{d}^2x^k}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{\partial U}{\partial x^i} - c\sqrt{1 + \frac{2U}{c^2}}\frac{\partial\gamma_i}{\partial t}. \tag{2.4.14}$$

U 称为标量引力势,γ_i 称为矢量引力势. 对于时轴正交系, $\gamma_i = 0$.

第 3 章　引力场方程

3.1　场方程的建立

引力场的分布确定了时空的几何结构; 反之, 时空的几何结构唯一确定了引力场的分布. 而时空的几何性质完全由度规张量 $g_{\mu\nu}$ 确定. 因此, 张量 $g_{\mu\nu}$ 既描述时空几何又描述引力场. 换句话说, 引力场就是时空度规张量场. 既然 $g_{\mu\nu}$ 作为 (引力) 场分布, 故应满足一定形式的微分方程. 按照广义协变原理, 这些方程应该由同阶张量组成; 方程应含有场变量 $g_{\mu\nu}$ 所构成的张量, 还应含有作为场源的物质场的张量. 在牛顿近似下, 该方程应能退化为牛顿引力场方程.

我们知道, 牛顿引力势 U 满足泊松方程

$$\nabla^2 U = 4\pi G\rho. \tag{3.1.1}$$

而 (2.4.13) 告诉我们, 引力场的势 U 与 g_{00} 有简单的关系 (只差常数). 在狭义相对论中, 上式右端的质量密度 ρ 又恰为能量动量张量的分量 T_{00}. 因此, 由牛顿引力场方程 (3.1.1) 推断, 推广后的新的引力场方程的右端应为物质场的能量–动量张量, 左端应该是含有 $g_{\mu\nu}$ 的二阶协变导数的二阶张量. 由上式还可以推断, 新方程关于 $g_{\mu\nu}$ 的二阶导数应是线性的. 只有这样, 才能保证在近似条件下新的方程能够退化为方程 (3.1.1).

含有 $g_{\mu\nu}$ 和它的一阶、二阶导数, 且对二阶导数为线性组合的二阶张量的一般形式为

$$C_1 R_{\mu\nu} + C_2 R g_{\mu\nu} + C_3 g_{\mu\nu}, \tag{3.1.2}$$

其中 C_1, C_2 和 C_3 均为常数. 因此, 场方程的最普遍的可能形式应为

$$R_{\mu\nu} + ARg_{\mu\nu} + \lambda g_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu}, \tag{3.1.3}$$

式中 k 由引力常数唯一确定. A 和 λ 是待定常数, 可以由 Ricci 张量 $R_{\mu\nu}$ 的内在性质和无限远处的时空渐近性质来确定.

在狭义相对论中, 能量动量守恒定律表示为 $T^{\mu\nu}_{,\nu} = 0$. 在广义相对论中自然应推广为 $T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$. 这样, 应该要求

$$(R^{\mu\nu} + ARg^{\mu\nu})_{;\nu} = 0. \tag{3.1.4}$$

将此式与爱因斯坦张量式 $G^{\mu\nu}_{;\nu}=0$ 比较, 知

$$A=-\frac{1}{2}. \tag{3.1.5}$$

于是 (3.1.3) 可写为

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}+\lambda g_{\mu\nu}=kT_{\nu\mu\nu}. \tag{3.1.6}$$

对于真空的情况, $T_{\mu\nu}=0$, (3.1.6) 简化为

$$R_{\mu\nu}+\lambda g_{\mu\nu}=0. \tag{3.1.7}$$

这一方程中只含有 $g_{\mu\nu}$ 和它们的导数. 这表明, λ 的值只能由整体空间的几何性质决定. 如果承认无引力场时, 空间是欧几里得的, 那么时空结构就必须满足条件

$$R_{\mu\nu\gamma\lambda}=0. \tag{3.1.8}$$

(3.1.8) 是时空平直的充分且必要条件. 此式应导致

$$R_{\mu\nu}=0. \tag{3.1.9}$$

实验观测结果表明, 在数十万光年的空间范围内, (3.1.9) 是和实验结果符合得很好的. 在太阳系内的实验观测就更加准确地与 (3.1.9) 相合. 于是可以断定, λ 值应该等于零或极其微小.

我们有理由认为, "没有物质场 $(T_{\mu\nu}=0)$ 的空间是欧几里得的" 这是小范围空间内的经验概念, 可望在更大的空间范围内会与欧几里得几何有偏离; 那时才有必要考虑场方程中的 $\lambda g_{\mu\nu}$ 一项 $(\lambda\neq 0)$. 因此, 常数 λ 称为宇宙因子. $[\lambda]=[L^{-2}]$, L 为宇宙距离, 数量级为宇宙半径.

方程 (3.1.6) 即爱因斯坦引力场方程. 它可以写为下述形式:

$$R^{\nu}_{\mu}-\frac{R}{2}\delta^{\nu}_{\mu}+\lambda\delta^{\nu}_{\mu}=kT^{\nu}_{\mu}, \tag{3.1.10}$$

$$R^{\mu\nu}-\frac{R}{2}g^{\mu\nu}+\lambda g^{\mu\nu}=kT^{\mu\nu}; \tag{3.1.11}$$

或者注意到 $R=4\lambda-kT$, 有

$$R^{\nu}_{\mu}+\lambda\delta^{\nu}_{\mu}=\kappa\left(T^{\nu}_{\mu}+\frac{T}{2}\delta^{\nu}_{\mu}\right), \tag{3.1.12}$$

$$R^{\mu\nu}+\lambda g^{\mu\nu}=\kappa\left(T^{\mu\nu}+\frac{T}{2}g^{\mu\nu}\right), \tag{3.1.13}$$

$$R_{\mu\nu}+\lambda g_{\mu\nu}=\kappa\left(T_{\mu\nu}+\frac{T}{2}g_{\mu\nu}\right). \tag{3.1.14}$$

3.2 牛顿极限

我们讨论弱引力场的情况. 在线元 $\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu$ 的表达式中, 取 $x^0 = ct, t$ 为时间坐标. 线元表达式右端各项中, $g_{00}\mathrm{d}x^0\mathrm{d}x^0$ 比 $2g_0\mathrm{d}x^0\mathrm{d}x^k$ 要大一个量级, 而 $2g_{0k}\mathrm{d}x^o\mathrm{d}x^k$ 又要比 $g_{kl}\mathrm{d}x^k\mathrm{d}x^l$ 大一个量级. 因此, 忽略一阶小量时有 $\mathrm{d}s^2 \approx g_{00}\mathrm{d}x^0\mathrm{d}x^0$. 显然, 当速度 $\dfrac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t} \ll c$ 或者 $\mathrm{d}x^k \ll c\mathrm{d}t$ 时上述条件成立, 这正是牛顿极限条件.

在短程线方程

$$\frac{\mathrm{d}^2x^\mu}{\mathrm{d}s^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}s} = 0 \tag{3.2.1}$$

中, 我们引入另一参量 λ(沿短程线)

$$\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}s}, \tag{3.2.2}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x^\alpha}{\mathrm{d}s^2} = \frac{\mathrm{d}^2x^\alpha}{\mathrm{d}\lambda^2}\left(\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}s}\right)^2 + \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}^2\lambda}{\mathrm{d}s^2}. \tag{3.2.3}$$

将 (3.2.2) 和 (3.2.3) 代入 (3.2.1), 得到

$$\frac{\mathrm{d}^2x^\mu}{\mathrm{d}\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}\lambda} = -\frac{\mathrm{d}^2\lambda}{\mathrm{d}s^2}\left(\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}s}\right)^{-2}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}. \tag{3.2.4}$$

现在取参量 λ 为时间坐标 x^0, 此时 (3.2.4) 可写为

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta = -\frac{\mathrm{d}^2x^0}{\mathrm{d}s^2}\left(\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}s}\right)^{-2}\dot{x}^\mu, \tag{3.2.5}$$

式中一点表示对 x^0 求微商. 上式的零分量为

$$\ddot{x}^0 + \Gamma^0_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta = -\frac{\mathrm{d}^2x^0}{\mathrm{d}s^2}\left(\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}s}\right)^{-2}\dot{x}^0.$$

但是 $\dot{x}^0 = 1, \ddot{x}^0 = 0$. 故有

$$\frac{\mathrm{d}^2x^0}{\mathrm{d}s^2}\left(\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}s}\right)^{-2} = -\Gamma^0_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta. \tag{3.2.6}$$

将上式代入 (3.2.4), 得到

$$\ddot{x}^\mu + \left(\Gamma^\mu_{\alpha\beta} - \Gamma^0_{\alpha\beta}\dot{x}^\mu\right)\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta = 0. \tag{3.2.7}$$

由于 $\ddot{x}^0 = 0$ 和 $\dot{x}^0 = 1$, 上式的零分量是一恒等式, 因此它等效于下面的方程:

$$\ddot{x}^i + (\Gamma^i_{\alpha\beta} - \Gamma^0_{\alpha\beta}\dot{x}^i)\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta = 0. \tag{3.2.8}$$

注意到 $\dot{x}^i = \dfrac{1}{c}\dfrac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}$, 有 $\Gamma^i_{\alpha\beta} \gg \Gamma^0_{\alpha\beta}\dot{x}^i$. 同时, 考虑到 $\dot{x}^0 \gg \dot{x}^k$, 上式最后简化为

$$\ddot{x}^i = -\Gamma^i_{00}. \tag{3.2.9}$$

此式表明 Γ^i_{00} 是单位质量试验粒子所受的牛顿力. 我们还可以进一步简化 Γ^i_{00} 的表达式

$$\begin{aligned}\Gamma^i_{00} &= \frac{1}{2}g^{i\sigma}\left(2\frac{\partial g_{\sigma 0}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\sigma}\right)\\ &\approx -\frac{1}{2}\eta^{i\sigma}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\sigma} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^i}.\end{aligned} \tag{3.2.10}$$

结果得到最低级近似下的短程线方程

$$\ddot{x}^i = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^i}. \tag{3.2.11}$$

考虑到 $g_{00} = 1 + \dfrac{2U}{c^2}$, 上式可用引力标势 U 表示

$$\ddot{x}^i = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial U}{\partial x^i} \tag{3.2.12}$$

或

$$\frac{\mathrm{d}^2x^i}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{\partial U}{\partial x^i}. \tag{3.2.13}$$

此式表明 U 即为牛顿引力势.

下面讨论场方程的牛顿极限. 考虑忽略宇宙项的场方程

$$R_{\mu\nu} = k\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu}\right). \tag{3.2.14}$$

在最低级近似下, 我们有

$$T = T_{\mu\nu}g^{\mu\nu} \approx T_{\mu\nu}\eta^{\mu\nu} \approx T_{00}\eta^{00} = T_{00}. \tag{3.2.15}$$

由此得

$$\begin{aligned}R_{00} &= k\left(T_{00} - \frac{1}{2}g_{00}T\right)\\ &\approx k\left(T_{00} - \frac{1}{2}\eta_{00}T\right) = \frac{1}{2}kT_{00}\\ &= \frac{1}{2}k\rho c^2,\end{aligned} \tag{3.2.16}$$

式中 ρ 为引力场源物质的密度. R_{00} 的渐近式还可以由 $\Gamma^\tau_{\mu\nu}$ 给出

$$R_{00} = \frac{\partial \Gamma^\lambda_{00}}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial \Gamma^\lambda_{0\lambda}}{\partial x^0} + \Gamma^\sigma_{00}\Gamma^\lambda_{\lambda 0} - \Gamma^\sigma_{0\lambda}\Gamma^\lambda_{0\sigma}$$

$$\approx \frac{\partial \Gamma_{00}^{\lambda}}{\partial x^{\lambda}} \approx \frac{\partial \Gamma_{00}^{k}}{\partial x^{k}}. \tag{3.2.17}$$

将 (3.2.10) 代入上式, 得到

$$R_{00} \approx \frac{1}{2}\sum_{i} \frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x^i \partial x^i} = \frac{1}{2}\nabla^2 g_{00} = \frac{1}{c^2}\nabla^2 U, \tag{3.2.18}$$

式中 ∇^2 为三维拉普拉斯算符.

比较 (3.2.16) 和 (3.2.18), 得到

$$\nabla^2 U = \frac{1}{2}kc^4\rho. \tag{3.2.19}$$

将上式与牛顿引力场方程 $\nabla^2 U = 4\pi G\rho$ 比较, 得到常数 k 的值

$$k = \frac{8\pi G}{c^4}. \tag{3.2.20}$$

至此, 爱因斯坦引力场方程 (3.1.3) 中的常数 A 和 k 均已确定.

3.3 关于宇宙因子 λ 的讨论

起初爱因斯坦引入宇宙因子 λ 是为了得到静态宇宙解. 对于不等于零的平均密度 $T_0^0 = \rho c^2 = \text{const}$, λ 应等于 $8\pi G\rho/c^2$. 后来发现了红移, 爱因斯坦倾向于 $\lambda = 0$ 的场方程. 1930 年以前, 人们详细研究了 $\lambda \neq 0$ 的宇宙解 (静态的和非静态的). 但是直到 1967 年以前, 人们一直没有完全确认引入宇宙因子 λ 的必要性和真实性. 1967 年, 类星体按红移分布的一种解释指出, λ 可能不为零, 具有量级 $\lambda \approx 10^{-55}\text{cm}^{-2}$.

至今, 上述解释也没有被完全证明. 甚至在用于一些新观测到的类星体时遇到了困难. 但是另一方面, 讨论过程表明, 简单地假定 $\lambda = 0$ 也没有根据, 大多数学者不认为 $\lambda = 0$. 可以预料, 近些年仍然很难确定 λ 值或它的极限值.

宇宙因子有什么物理含义? 为什么学者们对它如此感兴趣呢?

前面曾指出, λ 的量纲是 $[\lambda] = \text{cm}^{-2}$. 由此可以把它看作空的空间 (没有物质和引力波) 的曲率. 而引力理论把曲率和能量、动量、物质压强联系起来. 在式 (3.1.6) 中, 将 λ 项移到右端, 我们得到

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = kT_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu}. \tag{3.3.1}$$

$\lambda \neq 0$ 意味着空的空间产生了引力场. 它相当于充满整个空间的物质, 其密度为

$$\rho_{\lambda} = \frac{c^2\lambda}{8\pi G}, \tag{3.3.2}$$

能量密度为

$$\varepsilon_\lambda = \frac{c^4\lambda}{8\pi G}, \tag{3.3.3}$$

压强为

$$P_\lambda = -\varepsilon_\lambda = -\frac{c^4\lambda}{8\pi G}. \tag{3.3.4}$$

对于 $\lambda \approx 10^{-55}\text{cm}^{-2}, \rho_\lambda \approx 10^{-28}\text{g}\cdot\text{cm}^{-3}, \varepsilon_\lambda \approx 10^{-7}\text{erg}\cdot\text{cm}^{-3}(1\text{erg} = 10^{-7}\text{J})$.

在这个意义上, 可以说真空具有能量密度 ε_λ 和压强 P_λ(压强张量).

这里应指出, 对于 ε_λ 和 ρ_λ, 我们做了这样的假定: 理论的相对论协变性不被破坏; ε_λ 和 P_λ 在洛伦兹变换下是不变的.

上述各量在基本粒子实验和原子、分子物理实验中不表现出来. 进行实验的局部空间中的真空能量起着常数项的作用, 可以在能量守恒定律中被消掉.

ε_λ 和 P_λ 只在引力现象中出现. 由 (3.3.1) 可见, 宇宙项在场方程中是和物质场能–动张量平权的一项, 它们同样作用于空间. 因此, 卡文迪许实验原则上应可以用来发现和测量 ε_λ 及 P_λ. 两铅球的引力取决于铅的密度和真空的密度 $\rho_\lambda(|\rho_\lambda| < 10^{-28}\text{g}\cdot\text{cm}^{-3})$, 积分时遍及铅球的体积.

实际测量 ε_λ 和 P_λ 是不可能的. 无论用实验室中的实验、观测太阳系中行星的运动, 还是观测银河系中恒星的运动, 都无法测得 ε_λ 和 P_λ 的值. 实际上, 在太阳系中, 在半径等于地球轨道半径的空间范围内, 物质的平均密度为 $\langle\rho\rangle \approx 10^{-7}\text{g}\cdot\text{cm}^{-3}$, 在银河系中为 $10^{-24}\text{g}\cdot\text{cm}^{-3}$ ρ_λ 的效应均无法观测 (可忽略不计). 它的影响只能在宇宙尺度上表现出来.

关于 λ 的性质, 一些学者认为, 确定的值 λ 和对应的 ρ_λ、ε_λ、P_λ 均作为宇宙常数, 不再作进一步的解释. 另一种观点是假定零级近似: $\lambda = \rho_\lambda = \varepsilon_\lambda = P_\lambda = 0$.

下面我们先回顾一下关于真空能量的理论发展, 再说明关于建立宇宙因子 λ 的理论的一些观点.

第一批关于电磁场量子化的尝试导致了真空能量密度无限大的佯谬. 真空作为所研究系统的最低能态 (例如在研究电磁现象时用 Maxwell 议程组表征), 粒子 (如光子) 是基本的受激系统. 类似于量子力学中原子核在晶体点阵中运动的图像: 基本的受激态称为光子 (声子、量子); 在晶体的基态不含有光子, 即具有零温度. 这个状态类似于真空. 晶体基态的能量具有完全确定的值, 是可以测量的. 同一元素的不同的同位素, 其基态能量依赖于同位素原子气体的温度. 在最简单的场论方案中, 基态具有无限大的能量. 但是可以改变一下理论的形式, 使得自由场的自由态能量等于零.

在经典 Maxwell 理论中, 能量密度等于 $\varepsilon = \dfrac{E^2 + H^2}{8\pi}$. 里弗西兹 (Lifshitz) 曾指出, 不存在一种量子电动力学理论, 能使真空中 E^2 或 H^2 的平均值等于零 (离电

荷很远并且不存在实光子). 因此, 为了借助于通常的算符乘积来构成这些理论, 使真空 $\varepsilon = 0$, 就必须放弃 ε 与场强之间的经典关系式.

真空能量的另一种来源是由狄拉克 (Dirac) 电子理论给出的. 负能态被充满的思想不可避免地导致能量密度具有负值. 在这种情况下, 也必须改变原理论, 使得对于无相互作用的真空 ε 恒等于零. 但是不能保证在有相互作用时真空能量仍为零. 按照现在的理论, 不仅实粒子之间存在相互作用, 而且虚粒子也有相互作用. 注意这里"相互作用"一术语和经典意义上的不同. 在经典物理中谈到两个碰撞物体的相互作用, 质子和电子的库仑相互作用等; 在量子场论中谈到 4-费米相互作用 (当中子、电子、质子和中微子散射时) 和光子–电子相互作用 (当电子辐射光子时).

众所周知, 自由电子不能辐射实光子. 但是可以说自由电子辐射然后又吸收了虚光子. 这将使电子的质量和磁矩发生变化, 正如 Lemb 实验所证实的那样. 实验测定电子质量的变化是不可能的, 因为不可能测量失去虚光子后电子的质量. 但是电子磁矩的变化却可以测出来.

还有许多类似的过程, 例如电子对 (e^+,e^-) 在真空中产生和湮灭.

现在, 真空的组成和性质的理论不像 60 年前那么简单和明显.

真空能量理论的第一个可能方案是假定在没有场和相互作用时真空的能量恒等于零; 当它们存在时真空的能量不等于零. 引入实粒子时它应等于一个附加常数. 根据这一方案建立的粒子理论可以使所得结果不依赖于未知的 (不确定的或无限大的) 真空能量. 费曼正是这样做的. 他把跃迁幅 A_{12}(真空加始态 1 的粒子 $\rightarrow$ 真空加末态 2 的粒子) 分解成 A_V(真空 $\rightarrow$ 真空) 和比值 A_{12}/A_V 的积. 只有 A_{12}/A_V 才是与实粒子相互作用对应的真实值. 这一方案使真空能量问题得到了很好的解决, 但是这一方案不包含引力场. 在引力理论中, 真空的能量密度如前面所说, 是真实的, 原则上可观测的.

在粒子理论中, 真空能量理论的第二个方案, 即公理式的方案, 假定真空的能量密度和相应的压强恒等于零.

这一假定只能作一种可能性提出. 有些文献中出现这样的断言: 这一公理是必需的, 只有这样才能与相对论的不变性相符合. 这样的断言是不正确的. 正如前面指出的, 真空的压强 P_λ 和能量密度 ε_λ 均不为零, 它们之间的关系 $P_\lambda = -\varepsilon_\lambda$(由场方程得出) 具有相对不变性.

我们指出, 像粒子理论一样, 原则上可以估计 ε_λ 的量级, 它不等于零且保持相对论不变性. 这里应注意, 常常在研究有限体积 V 内的能量 $E = \varepsilon\nu$ 时发生错误. 真空的三维动量 P 显然等于零, 因为真空中无法分辨方向. 能量和动量构成四维矢量 $(E, \boldsymbol{P})$; 对于给定的体积, 这 4- 矢量是 $(E, 0)$. 这样的组合显然不是不变量. 如果不假定 $E = 0(\varepsilon = 0)$, 在另一相对于该坐标系运动的坐标系中将有 $\boldsymbol{P} \neq 0$. 错误发生在选择了特殊的有限体积, 因为这违背相对论不变性. 无限的 (非局域的) 介

质, 其中包括真空, 可以用能量密度表征, 它是一个能量–动量张量的分量 T_0^0, 此张量的其余分量 $T_0^i(i=1,2,3)$ 同时描述空间的能流和动量密度. 能量–动量张量的分量 T_ν^μ 对应于弹性理论中的张力. 对于流体 (各向同性的)$T_\nu^\mu = P\delta_\nu^\mu$.

在这里重复这些众所周知的内容是为了强调, 问题不在于真空是否具有能量–动量矢量, 而在于是否存在能量–动量张量. 不存在具有相对论不变性的矢量 (它的大小恒等于零), 但是完全有可能存在相对论不变的张量. 在洛伦兹系中, 这一张量应具有形式

$$[T_{\mu\nu}] = \text{const}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{3.3.5}$$

而这正是在 $\lambda \neq 0$ 的情况下所提到的那个张量. 人们没有理由先验地排除这样的与真空相联系的张量.

现在仍然存在的问题是:

(1) 是否存在某种要求 $\lambda \neq 0$ 的原理?

(2) 我们是否应该把 λ 看作新的独立的常数? 或者说

(3) 能否由其他的普适常数来计算 λ(尽管只是量级)?

下面我们试图回答第三个问题, 不涉及前两个问题. 这一回答 (根据量纲和量级的比较) 也许有利于构成更正确的和最终的理论.

在实验物理中, 我们测量 (真空 + 粒子) 系统和单独真空系统的能量之差, 不等于零的 ε_λ 在计算中被消掉了. 按照真空极化理论和量子的粒子理论所作的全部工作都是这样的.

量 ε_λ 只在引力理论中才引入. 虽然没有精确的理论, 但是我们可以借助于量纲的分析提出重要的设想.

基本粒子理论使人们能够建立具有 ε_λ 的量纲的量. 由理论基本常数可以构成能量 mc^2, 长度 $\dfrac{h}{mc}$, 密度 $\left(\dfrac{mc}{h}\right)^3$ 和 $\varepsilon_\lambda = mc^2 \times \left(\dfrac{mc}{h}\right)^3$. 这样得到的量 ε_λ 明显地不合用. 因为以电子质量代入时得 $\varepsilon_\lambda = 10^{22}\text{erg}\cdot\text{cm}^{-3}$, 以质子质量代入时得 $\varepsilon_\lambda \sim 10^{35}\text{erg}\cdot\text{cm}^{-3}$. 这些数值远大于宇宙学中假定的值 ($\varepsilon_\lambda < 10^{-7}\text{erg}\cdot\text{cm}^{-3}$). 正因为这样, 物理学家才本能地反对 $\lambda \neq 0$: 如果不能取更大的 ε_λ(相应地取更大的 λ), 则什么都谈不到.

在天文学家的影响下, 人们发现将 $mc^2\left(\dfrac{mc}{h}\right)^3$ 乘以一个表征引力的无量纲因子 $\dfrac{Gm^2}{hc}$, 可能构造出一个合理的 ε_λ. 这一表达式为

$$\varepsilon_\lambda = \left(\frac{Gm^2}{hc}\right)\cdot mc^2 \cdot \left(\frac{mc}{h}\right)^3$$

$$= \frac{Gm^2}{\lambda} \cdot \frac{1}{\lambda^3}, \quad \lambda = \frac{h}{mc}. \tag{3.3.6}$$

这一表达式可以解释为：在真空中产生虚粒子，质量为 m，它们的平均空间距离为 λ；假定它们的总的本征能量为零，使得真空的总能量密度只取决于相邻粒子间的相互作用. 对于 $m = m_e$，上式给出 $\varepsilon_\lambda = 10^{-19}\text{erg}\cdot\text{cm}^{-3}$；对于 $m = m_p$，上式给出 $\varepsilon_\lambda = 1\text{erg}\cdot\text{cm}^{-3}$. 宇宙学所假定的 ε_λ 值介于二者之间.

还有一个问题，人们常说 $\lambda \neq 0$ 意味着引力子具有不为零的静止质量，这似乎不合理. 我们知道，当 $\lambda \neq 0$ 时，即使物质不存在，时空也不可能是平直的. 而在弯曲空间中引力子质量的定义是不明确的.

宇宙因子项如果不等于零，它的数值也是很小的，它的效应只在宇宙学中才可能出现，这一点是无疑的.

关于宇宙常数，我们在第六篇 3.8 节和第九篇 2.1 节中还要讨论.

3.4 引力场的变分原理

前面已经建立了爱因斯坦引力场方程. 本节将由引力场的变分原理得到这一组场方程. 为了使所得到的场方程具有协变性，最好的途径是由变分原理出发进行推导. 在许多非爱因斯坦引力理论中也都是这样做的. 问题的关键在于选择适当的作用量泛函.

引入标量泛函

$$I = I_g + I_f = \int (L_g + L_f)\sqrt{-g}\mathrm{d}^4x, \tag{3.4.1}$$

式中 I_g 和 L_g 分别表示引力场的作用量和拉格朗日函数，I_f 和 L_f 分别表示除引力场之外的所有其他场的作用量和拉格朗日函数. L_g 和 L_f 的表示式取为

$$L_g = R, \quad L_f = -2kL_f, \tag{3.4.2}$$

式中 k 为爱因斯坦引力常数，$k = 8\pi G/c^4$.

变分原理表示为

$$\delta I = 0. \tag{3.4.3}$$

首先计算 δI_g.

$$\begin{aligned} \delta I_g &= \delta\int \sqrt{-g}R\mathrm{d}^4x = \delta\int \sqrt{-g}g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}\mathrm{d}^4x \\ &= \int \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}\mathrm{d}^4x + \int R_{\mu\nu}\delta(\sqrt{-g}g^{\mu\nu})\mathrm{d}^4x. \end{aligned} \tag{3.4.4}$$

为了求出 $\delta R_{\mu\nu}$, 采用短程线坐标系. 此时有

$$\begin{aligned}\delta R_{\mu\nu} &= \delta\left\{\frac{\partial\Gamma^\lambda_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}-\frac{\partial\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu}+\Gamma^\sigma_{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\lambda\sigma}-\Gamma^\sigma_{\nu\lambda}\Gamma^\lambda_{\mu\sigma}\right\}\\ &= \delta\left\{\frac{\partial\Gamma^\lambda_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}-\frac{\partial\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu}\right\}\\ &= \frac{\partial(\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu})}{\partial x^\lambda}-\frac{\partial(\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda})}{\partial x^\nu}\\ &= (\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu})_{;\lambda}-(\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda})_{;\nu}.\end{aligned}\tag{3.4.5}$$

在上式中, 注意到 $(\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu})$ 是张量. 这是一个张量方程, 因此, 它在任何参考系中的任何时空点都成立, 不局限于短程线参考系. 于是式 (3.4.4) 右端第一项的被积式可写为

$$\begin{aligned}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} &= \sqrt{-g}g_{\mu\nu}\{(\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu})_{;\lambda}-(\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda})_{;\nu}\}\\ &= \sqrt{-g}\{g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu})_{;\lambda}-(g^{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\mu\lambda})_{;\nu}\}\\ &= \sqrt{-g}\{(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu})_{;\lambda})-(g^{\mu\lambda}\delta\Gamma^\sigma_{\mu\sigma})_{;,\lambda}\}\\ &= \sqrt{-g}V^\lambda_{;\lambda},\end{aligned}\tag{3.4.6}$$

式中

$$V^\lambda = g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}-g^{\mu\lambda}\delta\Gamma^\sigma_{\mu\sigma}\tag{3.4.7}$$

为一逆变矢量. 由此得到

$$\int\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}\mathrm{d}^4x=\int\frac{\partial(\sqrt{-g}V^\lambda)}{\partial x^\lambda}\mathrm{d}^4x.\tag{3.4.8}$$

此式由高斯定理化为沿系统边界面的面积分. 在系统边界面上 $\delta g^{\mu\nu}$(从而 $\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$) 为零, 因此上式等于零

$$\int\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}\mathrm{d}^4x=0.\tag{3.4.9}$$

(3.4.4) 右端第二项为

$$\begin{aligned}\int R_{\mu\nu}\delta(\sqrt{-g}g^{\mu\nu})\mathrm{d}x &= \int\sqrt{-g}R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\mathrm{d}^4x+\int R_{\mu\nu}g^{\mu\nu}\delta\sqrt{-g}\mathrm{d}^4x\\ &= \int\sqrt{-g}R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\mathrm{d}^4x+\int R\delta\sqrt{-g}\mathrm{d}^4x.\end{aligned}\tag{3.4.10}$$

其中右端第二项中 $\delta\sqrt{-g}$ 可由行列式性质得到

$$\delta\sqrt{-g}=-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{-g}}\delta g=-\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}.\tag{3.4.11}$$

于是有

$$\int R_{\mu\nu}\delta(\sqrt{-g}g^{\mu\nu})\mathrm{d}^4x=\int\sqrt{-g}\left(R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right)\delta g^{\mu\nu}\mathrm{d}^4x. \tag{3.4.12}$$

将上式和 (3.4.9) 代入 (3.4.4) 得

$$\delta I_g=\delta\int\sqrt{-g}R\mathrm{d}^4x=\int\sqrt{-g}\left(R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right)\delta g^{\mu\nu}\mathrm{d}^4x. \tag{3.4.13}$$

下面计算除引力场以外的其他场作用量 I_f 的变分 δI_f. 由 (3.4.1) 和 (3.4.2) 知

$$\delta I_f=-2k\delta\int\sqrt{-g}L_f\mathrm{d}^4x. \tag{3.4.14}$$

由变分学可知, 对于泛函

$$I=\int F(q^\mu,q^\mu_{,\lambda},q^\mu_{,\lambda,\lambda_1},\cdots,q^\nu,q^\nu_{,\lambda},q^\nu_{,\lambda,\lambda_1},\cdots)\mathrm{d}^nx, \tag{3.4.15}$$

其变分表示为

$$\begin{aligned}\delta I=\int\Bigg\{&\frac{\delta F}{\delta q^\mu}\delta q^\mu+\frac{\delta F}{\delta q^\mu_{,\lambda}}\delta q^\mu_{,\lambda}+\frac{\delta F}{\delta q^\mu_{,\lambda,\lambda_1}}\delta q^\mu_{,\lambda,\lambda_1}+\cdots\\&+\frac{\delta F}{\delta q^\nu}\delta q^\nu+\frac{\delta F}{\delta q^\nu_{,\lambda}}\delta q^\nu_{,\lambda}+\frac{\delta F}{\delta q^\nu_{,\lambda,\lambda_1}}\delta q^\mu_{,\lambda,\lambda_1}+\cdots\Bigg\}\mathrm{d}^nx.\end{aligned} \tag{3.4.16}$$

式中各变分导数表示为

$$\frac{\delta F}{\delta q^\mu}=\sum_{m\geqslant 0}(-1)^m\left(\frac{\partial F}{\partial q^\mu_{,\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m}}\right)_{,\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m} \tag{3.4.17}$$

$$\frac{\delta F}{\delta q^\mu_{,\lambda}}=\sum_{m\geqslant 0}(-1)^m\left(\frac{\partial F}{\partial q^\mu_{,\lambda,\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m}}\right)_{,\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m} \tag{3.4.18}$$

设 (3.4.14) 中的 L_f 不含有 $g^{\mu\nu}$ 的高于一阶偏导数, $L_f=L_f(g^{\mu\nu},g^{\mu\nu}_{,\lambda})$, 代入 (3.4.15)~(3.4.18) 得

$$\delta I_f=-2k\int\left\{\frac{\partial(\sqrt{-g}L_f)}{\partial g^{\mu\nu}}\delta g^{\mu\nu}+\frac{\partial(\sqrt{-g}L_f)}{\partial g^{\mu\nu}_{,\lambda}}\delta g^{\mu\nu}_{,\lambda}\right\}\mathrm{d}^4x. \tag{3.4.19}$$

(3.4.19) 右端被积式中第二项可写为

$$\frac{\partial(\sqrt{-g}L_f)}{\partial g^{\mu\nu}_{,\lambda}}\delta g^{\mu\nu}_{,\lambda}=\left[\frac{\partial(\sqrt{-g}L_f)}{\partial g^{\mu\nu}_{,\lambda}}\delta g^{\mu\nu}\right]_{,\lambda}-\left[\frac{\partial(\sqrt{-g}L_f)}{\partial g^{\mu\nu}_{,\lambda}}\right]_{,\lambda}\delta g^{\mu\nu}. \tag{3.4.20}$$

上式第一项代入 (3.4.19) 化为沿系统边界面的面积分, 等于零 (因为边界面上 $\delta g^{\mu\nu} = 0$). 将上式第二项代入 (3.4.19) 得

$$\delta I_f = -2k \int \left\{ \frac{\partial(\sqrt{-g}L_f)}{\partial g^{\mu\nu}} - \left\{ \frac{\partial(\sqrt{-g}L_f)}{\partial g^{\mu\nu}_{,\lambda}} \right]_{,\lambda} \right\} \delta g^{\mu\nu} \mathrm{d}^4 x. \tag{3.4.21}$$

定义能量–动量张量 $T_{\mu\nu}$

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \left\{ \frac{\partial(\sqrt{-g}L_f)}{\partial g^{\mu\nu}} - \left[\frac{\partial(\sqrt{-g}L_f)}{\partial g^{\mu\nu}_{,\lambda}} \right]_{,\lambda} \right\}, \tag{3.4.22}$$

我们得到

$$\delta I_f = -k \int \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \mathrm{d}^4 x. \tag{3.4.23}$$

由 (3.4.23) 和 (3.4.13) 可知作用量 I 的变分 δI 为

$$\delta I = \int \sqrt{-g} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - k T_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} \mathrm{d}^4 x. \tag{3.4.24}$$

令 $\delta I = 0$, 考虑到 $\delta g^{\mu\nu}$ 的任意性, 得到

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = k T_{\mu\nu}. \tag{3.4.25}$$

如果在作用量 I 中引入宇宙作用量

$$I_\lambda = c \int \sqrt{-g} \mathrm{d}^4 x, \tag{3.4.26}$$

式中 c 为一待定常数. 则有

$$\delta I_\lambda = \frac{c}{2} \int g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \mathrm{d}^4 x.$$

此时由 $\delta(I_g + I_f + I_\lambda) = 0$ 得

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \lambda g_{\mu\nu} = k T_{\mu\nu}, \tag{3.4.27}$$

式中 $\lambda = \frac{c}{2}$, 此即含宇宙项的爱因斯坦引力场方程.

3.5　引力场中的 Maxwell 方程

根据广义协变原理, 我们可以将狭义相对论中四维形式的 Maxwell 方程推广到弯曲空间. 原则上讲, 只要将普通导数换为协变导数即可.

当电磁场存在时, 因为它属于引力场以外的物质场, 它应影响时空几何性质, 电磁场的能量–动量张量作为引力场方程中 $T_{\mu\nu}$ 的一个组成部分, 应以明显形式给出. 我们仍从变分原理出发.

如果除引力场之外只有电磁场存在, 则由狭义相对论推广到弯曲空间的情况, (3.4.14) 中的 L_f 应具有形式

$$L_f = -\frac{1}{16\pi}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{c}J^\mu A_\mu + L_e, \tag{3.5.1}$$

式中 J^μ 为四维电流密度, L_e 为电荷对 L_f 的单独贡献. 现在考虑纯电磁场的情况, 即上式后两项为零:

$$L_f = -\frac{1}{16\pi}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \tag{3.5.2}$$

注意到 $F_{\mu\nu} = A_{\nu;\mu} - A_{\mu;\nu}$, 可知 $(L_f\sqrt{-g})$ 只是 g_μ 和 A_μ 的函数.

首先, 保持 A_μ 不变, 对 $g_{\mu\nu}$ 求变分. 此时 $F_{\mu\nu} = \text{const}$, 而 $F^{\mu\nu} \neq \text{const}$. 我们得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\sqrt{-g}L_f)}{\partial g^{\mu\nu}} &= -\frac{1}{16\pi}F_{\rho\sigma}F_{\alpha\beta}\frac{\partial(\sqrt{-g}g^{\alpha\rho}g^{\beta\sigma})}{\partial g^{\mu\nu}}\\ &= -\frac{1}{16\pi}F_{\alpha\beta}F_{\rho\sigma}\left\{g^{\alpha\rho}g^{\beta\sigma}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial g^{\mu\nu}} + \sqrt{-g}(g^{\alpha\rho}\delta^\beta_\mu\delta^\sigma_\nu + g^{\beta\sigma}\delta^\alpha_\mu\delta^\rho_\nu)\right\}\\ &= -\frac{1}{16\pi}\left(F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial g^{\mu\nu}} + 2\sqrt{-g}F_{\mu\sigma}F^\sigma_\nu\right),\end{aligned} \tag{3.5.3}$$

其中

$$\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial g^{\mu\nu}} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial g}{\partial g^{\mu\nu}} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}. \tag{3.5.4}$$

最后得

$$\frac{\partial(\sqrt{-g}L_f)}{\partial g^{\mu\nu}} = \frac{\sqrt{-g}}{8\pi}\left(\frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} - F_{\mu\sigma}F^\sigma_\nu\right). \tag{3.5.5}$$

令

$$E_{\mu\nu} = T_{\mu\nu(e_m)} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} - F_{\mu\sigma}F^\sigma_\nu\right). \tag{3.5.6}$$

此式正是狭义相对论中对应式的推广. 将 (3.5.5) 代入 $\delta I = \delta(I_g + I_f) = 0$, 便得到 Einstein-Maxwell 方程

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = kE_{\mu\nu}. \tag{3.5.7}$$

张量 E^ν_μ 是零迹的:

$$E = E^\lambda_\lambda = g^{\lambda\sigma}E_{\lambda\sigma} = 0. \tag{3.5.8}$$

将 (3.5.7) 缩并得 $R = -kE$, 所以 $R = 0$, (3.5.7) 简化为

$$R_{\mu\nu} = kE_{\mu\nu}. \tag{3.5.9}$$

上式是只存在电磁场时的爱因斯坦引力场方程.

有电荷存在时, 作用量应增加一项. 对于电荷为 e 的单个粒子, 增加的一项为

$$I_e = -e\int A_\mu \mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}\tau = -e\int A_\mu u^\mu \mathrm{d}s\mathrm{d}\tau, \tag{3.5.10}$$

式中积分 $\mathrm{d}s$ 沿世界线.

为了避免奇点, 我们讨论带电物质连续分布的情况. 设每一物质元带有电荷. 在每一点 x^μ, 有速度矢量 u^μ(可有一因子与之相乘). 我们总可以确定一逆变矢量密度 $\mathscr{T}^\mu$, 它与 u^μ 同方向, 并使

$$\mathscr{T}^0 \mathrm{d}x^1 \mathrm{d}x^2 \mathrm{d}x^3 \tag{3.5.11}$$

表示某一体元 d^3x 内的电荷, 而使

$$\mathscr{T}^1 \mathrm{d}x^0 \mathrm{d}x^2 \mathrm{d}x^3 \tag{3.5.12}$$

表示时间间隔 $\mathrm{d}x^0$ 内通过面元 $\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3$ 的电量. 由于电荷守恒, 于是有

$$\mathscr{T}^\mu_{,\mu} = 0. \tag{3.5.13}$$

设一电荷元由位置 x^μ 移到位置 $x^\mu + h^\mu$, h^μ 为一阶小量. 我们要确定给定点 x^μ 处 $\mathscr{T}^\mu$ 的变化.

首先考虑 $h^0 = 0$ 的情况. 在一三维体积 V 内, 电荷的增量等于通过 V 的界面流出的电量的负值:

$$\delta\int_V \mathscr{T}^0 \mathrm{d}x^1 \mathrm{d}x^2 \mathrm{d}x^3 = -\int_S \mathscr{T}^0 h^i \mathrm{d}s_i, \tag{3.5.14}$$

式中 S 为 V 的界面. 根据高斯定理, 可以把上式右端的面积分换成体积分. 于是得到

$$\delta\mathscr{T}^0 = -(\mathscr{T}^0 h^i)_{,i}. \tag{3.5.15}$$

下面将 (3.5.15) 推广到 $h^0 \neq 0$ 的情况. 我们注意到, 如果 h^μ 正比于 $\mathscr{T}^\mu$, 则物质元沿其世界线移动, 从而 $\mathscr{T}^\mu$ 不变. 这样, 上式应推广为

$$\delta\mathscr{T}^0 = (\mathscr{T}^i h^0 - \mathscr{T}^0 h^i)_{,i} \tag{3.5.16}$$

这是因为当 $h^0 = 0$ 时上式与 (3.5.15) 相合; 而当 h^μ 正比于 $\mathscr{T}^\mu$ 时, 上式给出 $\delta\mathscr{T}^0 = 0$. 对于 $\mathscr{T}^\mu$ 的其他分量有相应的式子, 所以可写为

$$\delta\mathscr{T}^\mu = (\mathscr{T}^\nu h^\mu - \mathscr{T}^\mu h\nu)_{,\nu} \tag{3.5.17}$$

量 $\mathscr{T}^\mu$ 是连续带电物质流作用量中的基本变量. 经过变分和适当的分部积分运算后, 令 h^μ 的系数等于零, 便给出电荷的运动方程.

对于带电物质连续分布的情况, 带电粒子的作用量 (3.5.10) 应写为

$$I_e = -\int \mathscr{T}^0 A_\mu u^\mu \mathrm{d}x^1 \mathrm{d}x^2 \mathrm{d}x^3 \mathrm{d}s. \tag{3.5.18}$$

引进度规时可令

$$\mathscr{T}^\mu = \rho_e u^\mu \sqrt{-g}, \tag{3.5.19}$$

式中 ρ_e 为一标量, 表征电荷密度. 于是 (3.5.18) 变为

$$\begin{aligned} I_e &= -\int \rho_e A_\mu u^\mu \sqrt{-g} \mathrm{d}x^1 \mathrm{d}x^2 \mathrm{d}x^3 \mathrm{d}s \\ &= -\int A_\mu \mathscr{T}^\mu \mathrm{d}x^1 \mathrm{d}x^2 \mathrm{d}x^3 \mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{3.5.20}$$

由此得

$$\begin{aligned} \delta I_e &= -\int \{\mathscr{T}^\mu \delta A_\mu + A_\mu (\mathscr{T}^\nu h^\mu - \mathscr{T}^\mu h^\nu)_{,\nu}\} \mathrm{d}^4 x \\ &= \int \{-\rho_e u^\mu \sqrt{-g} \delta A_\mu + A_{\mu,\nu} (\mathscr{T}^\nu h^\mu - \mathscr{T}^\mu h^\nu)\} \mathrm{d}^4 x \\ &= \int \rho_e (-u^\mu \delta A_\mu + F_{\mu\nu} u^\nu h^\mu) \sqrt{-g} \mathrm{d}^4 x. \end{aligned} \tag{3.5.21}$$

代入变分原理

$$\delta_I = \delta(I_g + I_{em} + I_\lambda + I_e + I_m) = 0. \tag{3.5.22}$$

式中括号内各项分别表示引力场、电磁场、真空场、电荷和物质场的作用量, 我们可以得到上述各类场和引力场相互作用的方程. 为此, 将前面得到的 $\delta I_g, \delta I_{em}, \delta I_\lambda, \delta I_e$ 和 δI_f[即 (3.4.23)] 代入 (3.5.22), 并注意到 (3.5.17), 然后分别令 $\delta g_{\mu\nu}, \delta A_\mu$ 和 h^μ 的系数为零.

(1) $\delta g_{\mu\nu}$ 的系数为零给出

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \lambda g_{\mu\nu} = k(T_{\mu\nu} + E_{\mu\nu}). \tag{3.5.23}$$

这就是有电磁场和物质场存在时的 Einstein-Maxwell 方程, 右端的 $T_{\mu\nu}$ 表示物质场的能量–动量张量.

(2) δA_μ 的系数为零给出

$$-\rho_e u^\mu + F^{\mu\nu}_{\nu} = 0. \tag{3.5.24}$$

由 (3.5.19) 可知 $\rho_e u^\mu = J^\mu$ 为电流密度矢量, 因此上式即为引力场中的 Maxwell 方程

$$F^{\mu\nu}_{;\nu} = J^\mu. \tag{3.5.25}$$

至于另一组 Maxwell 方程, 很容易由 $F_{\mu\nu}$ 的反对称性得到. 实际上, 由 $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$ 和 $\Gamma^\mu_{\sigma\tau} = \Gamma^\mu_{\tau\sigma}$ 得到

$$\Gamma^\rho_{\mu\nu} F_{\lambda\rho} + \Gamma^\rho_{\nu\mu} F_{\rho\lambda} = \Gamma^\rho_{\lambda\mu} F_{\nu\rho} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda} F_{\rho\nu} = \Gamma^\rho_{\nu\lambda} F_{\mu\rho} + \Gamma^\rho_{\lambda\nu} F_{\rho\mu} = 0.$$

将这三个等于零的式子与狭义相对论中对应的方程

$$F_{\mu\nu;\lambda} + F_{\nu\lambda;\mu} + F_{\lambda\mu,\nu} = 0 \tag{3.5.26}$$

相加, 便得到

$$F_{\mu\nu;\lambda} + F_{\nu\lambda;\mu} + F_{\lambda\mu;\nu} = 0. \tag{3.5.27}$$

这就是另一组 Maxwell 方程 (在引力场中).

(3) 式 (3.5.23) 中的连续物质的 $T_{\mu\nu}$ 可由与引入 $\mathscr{T}^\mu$ 类似的过程引入 ρ^μ 而得到 (零压情况), 其结果为

$$T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu. \tag{3.5.28}$$

此时 h^μ 的系数为零给出

$$\rho u_{\mu;\nu} u^\nu + \rho_e F_{\mu\nu} u^\nu = 0,$$

即

$$-\rho u_{\mu;\nu} u^\nu + F_{\mu\nu} J^\nu = 0. \tag{3.5.29}$$

式中第二项给出洛伦兹力, 它使物质元的运动偏离短程线.

方程 (3.5.29) 也可由守恒定律得到. 即由

$$(\rho u^\mu u^\nu + E^{\mu\nu})_{;\nu} = 0 \tag{3.5.30}$$

导出. 由于

$$\begin{aligned} E^{\mu\nu}_{;\nu} &= F^{\mu\alpha} F^\nu_{\alpha;\nu} + F^{\mu\alpha}_{;\nu} F^\nu_\alpha - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta;\nu} \\ &= F^{\mu\alpha} F^\nu_{\alpha;\nu} + \frac{1}{2} g^{\mu\rho} F^{\nu\sigma} (F_{\rho\sigma;\nu} - F_{\rho\nu;\sigma} - F_{\nu\sigma;\rho}) \\ &= -F^{\mu\alpha} J_\alpha, \end{aligned}$$

我们得到

$$u^\mu (\rho u^\nu)_{;\nu} + \rho u^\mu u^\nu_{;\nu} - F^{\mu\alpha} J_\alpha = 0. \tag{3.5.31}$$

上式乘以 u_μ 缩并, 并注意

$$u_\mu u^\nu_{;\sigma} = 0, \tag{3.5.32}$$

得到

$$(\rho u^\nu)_{;\nu} = -F^{\mu\alpha} u_\mu J_\alpha = 0. \tag{3.5.33}$$

这里用了条件 $J_\alpha = \rho_e u_\alpha$, 即 J_α 与 u_α 同一方向. 将 (3.5.33) 代入 (3.5.31), 便得到 (3.5.29).

在这里, 我们选择自然单位制 $(c = G = 1)$.

3.6 物质的运动方程和物质场的能量–动量张量

当电磁场不存在时, 爱因斯坦引力场方程可写为 (对于零压流体)

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi \rho u_\mu u_\nu. \tag{3.6.1}$$

从方程 (3.6.1) 可以导出物质守恒方程和物质运动方程 —— 短程线方程. 为此, 将方程两端求协变散度, 得到

$$(\rho u^\mu u^\nu)_{;\nu} = 0,$$

即

$$u^\mu (\rho u^\nu)_{;\nu} + \rho u^\nu u^\mu_{;\nu} = 0. \tag{3.6.2}$$

上式乘以 u_μ 缩并, 注意到 $u_\mu u^\mu_{;\nu} = 0$, 得到

$$(\rho u^\nu)_{;\nu} = 0, \tag{3.6.3}$$

此即物质守恒方程. 将此式代回 (3.6.2), 便得到短程线方程:

$$u^\nu u^\mu_{;\nu} = 0. \tag{3.6.4}$$

这就是说, 对于一个物质元, 把真空引力场方程应用到该物质元的周围空间, 则其运动被约束在一短程线上.

由场方程可以导出场源的运动方程, 或者说, 场方程中包含了场源的运动方程, 这是引力场特有的性质.

电磁场不具有上述性质. 由电磁场方程

$$F^{\mu\nu}_{;\nu} = J^\mu$$

求协变散度, 注意到 $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$, 得到

$$J^\mu_{;\mu} = 0, \tag{3.6.5}$$

这是电荷守恒定律. 由此可见, 电磁场方程本身只包含场源的守恒律, 与场源的运动方程无关. 这表明, 在电动力学中, 可以在满足守恒律的条件下任意给定场源 (电荷) 的分布和运动来求解场方程. 而在引力理论中, 引力场源 (物质系统) 的运动方程必须与引力场方程同时求解.

下面我们给出几种场源物质的能量–动量张量的具体形式.

各向同性理想流体的能量–动量张量与狭义相对论中的形式相同

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu - p g_{\mu\nu}, \tag{3.6.6}$$

式中 ρ 表示随动坐标系中的能量密度, p 是压强. 如果以 ρ 表示质量密度, 还常加内能项 $\rho\pi$.

在随动坐标系中, 流体的动量和能量流均为零, 所以

$$T_{0\mu} = T_{\mu 0} = 0. \tag{3.6.7}$$

由于压强各向同性, 故有

$$T_\mu^\nu = T\delta_\mu^\nu. \tag{3.6.8}$$

于是 $T_{\mu\nu}$ 具有简单形式

$$[T_{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}. \tag{3.6.9}$$

沿 x 轴正方向以光速运动的相对论粒子, 其能量–动量张量可写为

$$[T_{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} \rho & \rho & 0 & 0 \\ \rho & \rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.6.10}$$

上述粒子沿 x 轴反方向运动时, 其能量–动量张量可写为

$$[T_{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} \rho & -\rho & 0 & 0 \\ -\rho & \rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.6.11}$$

所有方向的粒子流叠加, 便得到相对论气体的能量–动量张量 ($p = \rho/3$).

在洛伦兹系中, 沿 $x^1 = x$ 方向的纯磁场 $(H_y = H_z = E_i = 0)$ 的能量–动量张量可写为

$$[T_{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho \end{pmatrix}, \tag{3.6.12}$$

此式是 (3.5.6) 的特殊情况. 式中 $\rho = \dfrac{H^2}{8\pi}$, 为能量密度. 沿 x 轴方向作用有负压力 $(T_{11} = -\rho)$ 沿 y 轴和 z 轴作用有正压力 (ρ). 如果场强是沿着一个确定的轴, 而是任意的, 则 $T_{\mu\nu}$ 中会有不为零的对角元素. 但是它的迹 T_i^i(在直角坐标系中等于 $-T_{11} - T_{22} - T_{33}$) 保持不变.

对于纯磁场, 将能量–动量张量按最大不均匀程度取平均, 我们得到

$$[T_{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho/3 \end{pmatrix}. \tag{3.6.13}$$

即纯磁场平均地看类似于气体, 它具有特殊的态方程 $p = \rho/3$. 我们重新得到了前边的结果.

3.7 Lie 导数和时空的对称性

对于坐标变换 $x \to x'$, 度规 $g_{\mu\nu}(x)$ 变为 $g'_{\mu\nu}(x')$. 如果 $g'_{\mu\nu}(x)$ 作为 x 的函数的形式与 $g'_{\mu\nu}(x')$ 作为 x' 的函数的形式相同, 则将 $g'_{\mu\nu}(x')$ 中的 x' 换为 x 时, 所得函数 $g'_{\mu\nu}(x)$ 便与 $g_{\mu\nu}(x)$ 相等了

$$g'_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu}(x). \tag{3.7.1}$$

如果对于所有点 x^μ, (3.7.1) 均成立, 则称度规 $g_{\mu\nu}(x)$ 对于坐标变换 $x \to x'$ 是**形式不变的**(注意上述条件与标量的变换条件不同).

在任一点 x^μ, 度规的变换式为

$$g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} g_{\lambda\sigma}(x), \tag{3.7.2}$$

$$g_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\mu}\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} g'_{\lambda\sigma}(x'). \tag{3.7.3}$$

将 (3.7.1) 代入得

$$g_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\mu}\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} g_{\lambda\sigma}(x'). \tag{3.7.4}$$

满足 (3.7.4) 的变换称为**等度量变换**.

在时空中同一点, 可以用两个坐标系 x^μ 和 x'^μ 来描述. 例如, 在 Minkowski 时空中的每一点, 既可用 $x^\mu=(ct,x,y,z)$ 描述, 也可用球坐标 $x'^\mu=(ct,r,\theta,\phi)$ 描述. 两坐标之间有确定的变换关系. 本节中我们引入一种本质不同的坐标变换, 从而引入 Lie 导数的概念, 以便用来讨论时空的对称性.

条件 (3.7.4) 对函数 $x'^\mu=x'^\mu(x)$ 是一个很复杂的限制. 为了使其简化, 我们讨论特殊情况. 考虑一坐标变换

$$\widetilde{x}^\mu=\widetilde{x}^\mu(\varepsilon;x), \tag{3.7.5}$$

式中

$$x^\mu=\widetilde{x}^\mu(0;x), \tag{3.7.6}$$

ε 为一参量. 方程 (3.7.5) 表示变换 $x\to\widetilde{x}$ 的一个单参量族.

设时空中有一点 P, 以坐标 x^μ 标志; 同一时空中我们指定另一点 Q, 以坐标 $\widetilde{x}^\mu$ 标志.$\widetilde{x}^\mu$ 和 x^μ 属于同一坐标系. 因此, 变换 (3.7.5) 表示一个**时空映射 (向自身的)**.

再考虑 (3.7.5) 的一个特殊情况 —— 无穷小变换

$$\widetilde{x}^\mu=x^\mu+\varepsilon\xi^\mu(x),\quad |\varepsilon|\ll 1. \tag{3.7.7}$$

这便是一个**无穷小映射**. 式中 ε 是一个无穷小参量, $\xi^\mu(x)$ 是一个逆变矢量场.$\xi^\mu(x)$ 由下式确定:

$$\xi^\mu(x)=\left.\frac{\partial\widetilde{x}^\mu}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}. \tag{3.7.8}$$

考虑同一时空中一个张量场 $T(x)$. 在点 $Q(\widetilde{x}^\mu)$, 我们可以用两种不同的方法确定张量 T 的值. 首先, 有坐标系 x^μ 中, 有 T 的值 $T(\widetilde{x})$. 另一方面, 用通常坐标变换的方法得到 $\widetilde{x}^\mu$ 系中 T 的值 $\widetilde{T}(\widetilde{x})$. 这样, 在坐标为 $\widetilde{x}^\mu$ 的点 Q, 张量 T 有两个不同的值. 二者之差便给张量 T 的**Lie 导数**的概念.

下面分别给出标量场、矢量场和张量场的 Lie 导数.

1. **标量场** $\phi(x)$

在点 Q,ϕ 的值为 $\phi(\widetilde{x})$. 可将 $\phi(\widetilde{x})$ 在 x^μ 处按 ε 作无限小展开

$$\phi(\widetilde{x})=\phi(x+\varepsilon\xi)=\phi(x)+\varepsilon\frac{\partial\phi(x)}{\partial x^\alpha}\xi^\alpha. \tag{3.7.9}$$

另一方面, 按定义, 标量函数 ϕ 在坐标变换下是不变的, 即

$$\widetilde{\phi}(\widetilde{x})=\phi(x), \tag{3.7.10}$$

式中 $\widetilde{\phi}$ 是定值在点 Q 的一个函数, 其坐标为 $\widetilde{x}^\mu$; 而 ϕ 是定值在点 P 的, 其坐标为 x^μ.

标量函数的 Lie 导数记作 $\mathscr{L}_\xi\phi(x)$, 其定义为

$$\mathscr{L}_\xi\phi(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\phi(\widetilde{x}) - \widetilde{\phi}(\widetilde{x})}{\varepsilon}. \tag{3.7.11}$$

将 (3.7.9) 和 (3.7.10) 代入上式得到

$$\mathscr{L}_\xi\phi(x) = \xi^\alpha(x)\frac{\partial\phi(x)}{\partial x^\alpha}, \tag{3.7.12}$$

即函数 ϕ 的 Lie 导数恰为矢量 ξ^α 和 ϕ 的梯度的标量积.

还可以用另一途径给出标量函数 ϕ 的 Lie 导数. 我们认为所有函数都定值在点 P. 这时函数 $\widetilde{\phi}(\widetilde{x})$ 展开为

$$\begin{aligned}\widetilde{\phi}(\widetilde{x}) &= \widetilde{\phi}(x+\varepsilon\xi)\\ &= \widetilde{\phi}(x) + \varepsilon\xi^\alpha(x)\frac{\partial\phi(x)}{\partial x^\alpha} + o(\varepsilon^2).\end{aligned} \tag{3.7.13}$$

将 (3.7.10) 代入得

$$\phi(x) - \widetilde{\phi}(x) = \varepsilon\xi^\alpha(x)\frac{\partial\widetilde{\phi}(x)}{\partial x^\alpha} + o(\varepsilon^2). \tag{3.7.14}$$

于是有

$$\mathscr{L}_\xi\phi(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\phi(x) - \widetilde{\phi}(x)}{\varepsilon} = \xi^\alpha(x)\frac{\partial\phi(x)}{\partial x^\alpha}. \tag{3.7.15}$$

在引力场中, 我们应该用协变导数代替上式中的偏导数. 注意到 $\phi(x)$ 的是标量函数, 上式可直接写为

$$\mathscr{L}_\xi\phi(x) = \xi^\alpha(x)[\phi(x)]_{;\alpha}. \tag{3.7.16}$$

按照标量函数 Lie 导数的定义式, 一般张量 T 的 Lie 导数定义为

$$\mathscr{L}_\xi T(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{T(x) - \widetilde{T}(x)}{\varepsilon}. \tag{3.7.17}$$

下面讨论矢量和二阶张量的 Lie 导数表示式.

2. 逆变矢量场 A^μ

对于无限小坐标变换 (3.7.7), 矢量 A^μ 按下式变换:

$$\widetilde{A}^\mu(\widetilde{x}) = \frac{\partial\widetilde{x}^\mu}{\partial x^\alpha}A^\alpha(x). \tag{3.7.18}$$

由 (3.7.7) 得

$$\frac{\partial\widetilde{x}^\mu}{\partial x^\alpha} = \partial^\mu_\alpha + \varepsilon\frac{\partial\xi^\mu}{\partial x^\alpha}. \tag{3.7.19}$$

代入 (3.7.18) 得

$$\widetilde{A}^{\mu}(\widetilde{x}) = A^{\mu}(x) + \varepsilon A^{\alpha}(x)\frac{\partial \xi^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}. \tag{3.7.20}$$

将 $\widetilde{A}^{\mu}(\widetilde{x})$ 在点 x^{μ} 展开

$$\widetilde{A}^{\mu}(\widetilde{x}) = \widetilde{A}(x) + \varepsilon \xi^{\alpha}(x)\frac{\partial A^{\mu}(x)}{\partial x^{\alpha}} + o(\varepsilon^2). \tag{3.7.21}$$

比较 (3.7.21) 和 (3.7.20), 得到

$$\widetilde{A}^{\mu}(x) = A^{\mu}(x) + \varepsilon\left(A^{\alpha}\frac{\partial \xi^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} - \xi^{\alpha}\frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\right) + o(\varepsilon^2). \tag{3.7.22}$$

式中所有函数都定值在 P 点. 由此得

$$\mathscr{L}_{\xi} A = \operatorname*{Lim}_{\varepsilon \to 0} \frac{A^{\mu}(x) - \widetilde{A}(x)}{\varepsilon} = \xi^{\alpha}\frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} - A^{\alpha}\frac{\partial \xi^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}. \tag{3.7.23}$$

上式中的偏导数可代之以协变导数

$$\mathscr{L}_{\xi} A^{\mu} = \xi^{\alpha} A^{\mu}_{;\alpha} - A^{\alpha}\xi^{\mu}_{;\alpha}. \tag{3.7.24}$$

3. *协变矢量场* A_{μ}

按照同样的方法, 我们有

$$\widetilde{A}_{\mu}(\widetilde{x}) = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \widetilde{x}^{\mu}} A_{\alpha}(x). \tag{3.7.25}$$

将 (3.7.7) 对 $\widetilde{x}^{\nu}$ 求导得

$$\delta^{\mu}_{\nu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \widetilde{x}^{\nu}} + \varepsilon\frac{\partial \xi^{\mu}}{\partial \widetilde{x}^{\nu}}.$$

代入 (3.7.25), 得到

$$\widetilde{A}_{\mu}(\widetilde{x}) = A_{\mu}(x) - \varepsilon A_{\alpha}(x)\frac{\partial \xi^{\alpha}(x)}{\partial x^{\mu}} + o(\varepsilon^2). \tag{3.7.26}$$

将 $\widetilde{A}(\widetilde{x})$ 在 P 点展开

$$\widetilde{A}_{\mu}(\widetilde{x}) = \widetilde{A}_{\mu}(x) + \varepsilon \xi^{\alpha}(x)\frac{\partial A_{\mu}(x)}{\partial x^{\alpha}} + o(\varepsilon^2). \tag{3.7.27}$$

比较 (3.7.26) 和 (3.7.27) 得

$$\widetilde{A}_{\mu}(x) = A_{\mu}(x) - \varepsilon\left(A_{\alpha}\frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} + \xi^{\alpha}\frac{\partial A_{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\right) + o(\varepsilon^2). \tag{3.7.28}$$

按定义 (3.7.17) 有

$$\mathscr{L}_{\xi} A_{\mu} = \xi^{\alpha}\frac{\partial A_{\mu}}{\partial x^{\alpha}} + A^{\alpha}\frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}}. \tag{3.7.29}$$

上式中的偏导数可代之以协变导数, 我们最后得到协变矢量的 Lie 导数:

$$\mathscr{L}_{\xi} A_{\mu} = \xi^{\alpha} A_{\mu;\alpha} + A_{\alpha}\xi^{\alpha}_{;\mu}. \tag{3.7.30}$$

4. 二阶张量场 $T_{\mu\nu}$ 和 $T^{\mu\nu}$

对于无限小坐标变换 (3.7.7), $T_{\mu\nu}$ 的变换式为

$$\widetilde{T}_{\mu\nu}(\widetilde{x})=T_{\mu\nu}(x)-\varepsilon\left(T_{\mu\alpha}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\nu}+T_{\alpha\nu}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}\right)+o(\varepsilon^2). \tag{3.7.31}$$

另一方面, 将 $\widetilde{T}_{\mu\nu}(\widetilde{x})$ 按 x^μ 展开, 得到

$$\widetilde{T}_{\mu\nu}(\widetilde{x})=\widetilde{T}_{\mu\nu}(x)+\varepsilon\xi^\alpha\frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}+o(\varepsilon^2). \tag{3.7.32}$$

比较上二式, 得到

$$\widetilde{T}_{\mu\nu}(x)=T_{\mu\nu}(x)-\varepsilon\left(\xi^\alpha\frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}+T_{\mu\alpha}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\nu}+T_{\alpha\gamma}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}\right)+o(\varepsilon^2). \tag{3.7.33}$$

于是有

$$\mathscr{L}_\xi T_{\mu\nu}=\xi^\alpha\frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}+T_{\mu\alpha}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\nu}+T_{\alpha\nu}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}. \tag{3.7.34}$$

对于二阶逆变张量 $T^{\mu\nu}$, 类似地可以得到

$$\mathscr{L}_\xi T^{\mu\nu}=\xi^\alpha\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}-T^{\mu\alpha}\frac{\partial\xi^\nu}{\partial x^\alpha}-T^{\alpha\nu}\frac{\partial\xi^\mu}{\partial x^\alpha}. \tag{3.7.35}$$

我们可以将上二式中的偏导数代之以协变导数

$$\mathscr{L}_\xi T_{\mu\nu}=\xi^\alpha T_{\mu\nu;\alpha}+T_{\mu\alpha}\xi^\alpha_{;\nu}+T_{\alpha\nu}\xi^\alpha_{;\mu}, \tag{3.7.36}$$

$$\mathscr{L}_\xi T^{\mu\nu}=\xi^\alpha T^{\mu\nu}_{;\alpha}-T^{\mu\alpha}\xi^\nu_{;\alpha}-T^{\alpha\nu}\xi^\mu_{;\alpha}. \tag{3.7.37}$$

对于度规张量场, 由上二式可得

$$\mathscr{L}_\xi g_{\mu\nu}=\xi_{\nu;\mu}+\xi_{\nu;\mu}, \tag{3.7.38}$$

$$\mathscr{L}_\xi g^{\mu\nu}=-(\xi^{\nu;\mu}+\xi^{\mu;\nu}), \tag{3.7.39}$$

$$(\nabla^\mu=g^{\mu\alpha}\nabla_\alpha).$$

5. 矢量和张量的积

可以证明, 矢量和张量的积的 Lie 导数满足下式:

$$\mathscr{L}_\xi(AT)=A\mathscr{L}_\xi T+(\mathscr{L}_\xi A)T. \tag{3.7.40}$$

作为例子, 我们计算 $\mathscr{L}_\xi(A^\alpha T_{\alpha\rho})$.

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_\xi(A^\alpha T_{\alpha\rho})&=\xi^\beta(A^\alpha T_{\alpha\rho})_{;\beta}+A^\alpha T_{\alpha\beta}\xi^\beta_{e\rho}\\&=\xi^\beta(A^\alpha T_{\alpha\rho;\beta}+T_{\alpha\rho}A^\alpha_{;\beta})+A^\alpha T_{\alpha\beta}\xi^\beta_{;\rho}\\&=A^\alpha(\xi^\beta T_{\alpha\rho;\beta}+T_{\alpha\rho}\xi^\beta_{;\rho}+T_{\beta\rho}\xi^\beta_{;\alpha})+T_{\alpha\rho}(\xi^\beta A^\alpha_{;\beta}-A^\beta\xi^\alpha_{;\beta})\\&=A^\alpha\mathscr{L}_\xi T_{\alpha\rho}+(\mathscr{L}_\xi A^\alpha)T_{\alpha\rho}.\end{aligned}$$

6. **标量密度** $(W = +1)$

设 A 为标量, 则其密度为

$$\mathscr{A} = \sqrt{-g}A.$$

将 $\mathscr{A}(\widetilde{x})$ 在点 x^μ 展开, 得到

$$\widetilde{\mathscr{A}}(\widetilde{x}) = \widetilde{\mathscr{A}}(x + \varepsilon\xi) = \widetilde{\mathscr{A}}(x) + \varepsilon\xi^\alpha \frac{\partial \mathscr{A}}{\partial x^\alpha} + o(\varepsilon^2). \tag{3.7.41}$$

另一方面, 函数 $\mathscr{A}$ 的变换为

$$\widetilde{\mathscr{A}}(\widetilde{x}) = \sqrt{-\widetilde{g}(\widetilde{x})}\widetilde{A}(\widetilde{x}) = \sqrt{-\widetilde{g}(\widetilde{x})}A(x). \tag{3.7.42}$$

由 $\widetilde{g} = \left|\dfrac{\partial x}{\partial x}\right|^2 g$, 可将上式写为

$$\widetilde{\mathscr{A}}(\widetilde{x}) = \left|\frac{\partial x}{\partial x}\right| \sqrt{-g(x)}A(x) = \left|\frac{\partial x}{\partial \widetilde{x}}\right| \mathscr{A}(x). \tag{3.7.43}$$

又由 (3.7.7) 可得

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial \widetilde{x}^\nu} = \delta^\mu_\nu - \varepsilon\frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\nu} + o(\varepsilon^2), \tag{3.7.44}$$

从而有

$$\left|\frac{\partial x}{\partial \widetilde{x}}\right| = 1 - \varepsilon\frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\mu} + o(\varepsilon^2). \tag{3.7.45}$$

将上式代入 (3.7.43) 得

$$\widetilde{\mathscr{A}}(\widetilde{x}) = \mathscr{A}(x) - \varepsilon\mathscr{A}(x)\frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\mu} + o(\varepsilon^2). \tag{3.7.46}$$

比较 (3.7.41) 和 (3.7.46), 得到

$$\widetilde{\mathscr{A}} = \mathscr{A} - \varepsilon\left(\xi^\alpha\frac{\partial \mathscr{A}}{\partial x^\alpha} + \mathscr{A}\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\alpha}\right) + o(\varepsilon^2),$$

$$\mathscr{L}_\xi\mathscr{A} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\mathscr{A}(x) - \widetilde{\mathscr{A}}(x)}{\varepsilon} = \xi^\alpha\frac{\partial \mathscr{A}}{\partial x^\alpha} + \mathscr{A}\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\alpha}. \tag{3.7.47}$$

我们可以将上式中的偏导数改写为协变导数

$$\mathscr{L}_\xi\mathscr{A} = \xi^\alpha\mathscr{A}_{;\alpha} + \mathscr{A}\xi^\alpha_{;\alpha}. \tag{3.7.48}$$

3.8 Killing 矢 量

从本节开始, 我们应用 Lie 导数的概念讨论度规张量的对称性, 即讨论时空的对称性.

我们已经谈到了等度量变换 (3.7.2) 或 (3.7.1), 按照 Lie 导数的定义, 无穷小变换

$$\widetilde{x} = x^\mu + \varepsilon\xi^\mu \tag{3.8.1}$$

为等度量变换的条件即度规张量的 Lie 导数等于零. 此时由 (3.7.38) 有

$$\xi_{\nu;\mu} + \xi_{\mu;\nu} = 0. \tag{3.8.2}$$

度规张量 $g_{\mu\nu}(x)$ 在变换 (3.8.1) 下是形式不变的, 这就是说时空映射为其自身. 这种映射称为**共形映射.**

可以看出, 方程 (3.8.2) 的解 $\xi_\mu(x)$ 存在, 是时空中存在共形映射的条件. 方程 (3.8.2) 称为**Killing 方程**; 它的解 $\xi_\mu(x)$ 称为**Killing 矢量**. 当然, 给定一时空, Killing 方程不一定有解. 没有对称性的时空, 此方程无解.

一般地说, 如果存在 Killing 矢量, 即 Killing 方程有解, 则对应的时空具有确定的对称性.

Killing 方程 (3.8.2) 是对时空的很强的约束条件. 由这一方程, 我们可以从 ξ_μ 和 $\xi_{\mu;\nu}$ 的给定值来决定整个函数 $\xi_\mu(x)$. 下面我们论证这一点.

矢量 ξ_μ 的两次协变导数的对易式为

$$\xi_{\mu;\rho;\sigma} - \xi_{\mu;\sigma;\rho} = R^\tau_{\mu\rho\sigma}\xi_{;\tau}. \tag{3.8.3}$$

将上式脚标作两次循环, 并将所得二式与上式相加, 得到 ξ_μ 须满足的式子

$$\xi_{\mu;\rho;\sigma} - \xi_{\mu;\sigma;\rho} + \xi_{\sigma;\mu;\rho} - \xi_{\rho;\mu;\sigma} + \xi_{\rho;\sigma;\mu} - \xi_{\sigma;\rho;\mu} = 0. \tag{3.8.4}$$

将 Killing 方程 (3.8.2) 代入上式得

$$\xi_{\mu;\rho;\sigma} - \xi_{\mu;\sigma;\rho} - \xi_{\sigma;\rho;\mu} = 0. \tag{3.8.5}$$

于是 (3.8.3) 可写为

$$\xi_{\sigma;\rho;\mu} = R^\tau_{\mu\rho\sigma}\xi_\tau. \tag{3.8.6}$$

此式表明, 在某一给定的点 $\bar{x}$, 一旦给出 $\xi_\tau(\bar{x})$ 和 $\xi_{\tau;\lambda}(\bar{x})$, 便可求得 $\xi_\tau(x)$ 在点 $\bar{x}$ 处的二阶导数值. 再对 (3.8.6) 求导数, 可继续求得 $\xi^\zeta_\tau(x)$ 在 $\bar{x}$ 的高阶导数值. 这样, $\xi_\tau(x)$ 在 $\bar{x}$ 点的各阶导数值均可表示为 $\xi_\tau(\bar{x})$ 和 $\xi_{\tau;\lambda}(\bar{x})$ 的线性组合. 于是在点 $\bar{x}$ 的邻域内可将函数 $\xi_\tau(x)$ 表示为 $(x^\lambda - \bar{x}^\lambda)$ 的泰勒级数. 即任一度规 $g_{\mu\nu}(x)$ 的 Killing 矢量 $\xi^n_\rho(x)$ 可以写为

$$\xi^n_\rho(x) = M^\lambda_\rho(x;\bar{x})\xi^n_\lambda(\bar{x}) + N^{\lambda\nu}_\rho(x;\bar{x})\xi^n_{\lambda;\nu}(\bar{x}). \tag{3.8.7}$$

式中 M_ρ^λ 和 $N_\rho^{\lambda\nu}$ 是度规和 $\bar{x}$ 的函数, 但不含有 $\xi_\lambda(\bar{x})$ 和 $\xi_{\lambda;\nu}(\bar{x})$, 因此它们对于所有的 Killing 矢量都是相同的. 这就是说, 所有 Killing 矢量 $\xi_\rho(x)$ 都可由任一给定点 $\bar{x}$ 处的 $x_\rho(\bar{x})$ 和 $\xi_{\rho;\lambda}(\bar{x})$ 值唯一确定.

下面我们讨论 N 维空间中最多能有多少个 Killing 矢量. 考虑一组 Killing 矢量 $\xi_\mu^n(x)$, 其中 n 表示序号, 从 1 取到 M(即共有 M 个矢量). 对于每一个 n, 显然有 N 个独立的 $\xi_\mu^n(\bar{x})$. 注意到式 (3.8.2), 知 $\xi_{\mu;\nu}^n(\bar{x})$ 和 $\xi_{\nu;\mu}^n(\bar{x})$ 不是独立的. 因此, 独立的量 $\xi_{\mu;\nu}^n(\bar{x})$ 的个数等于

$$C_N^2 = \frac{1}{2}N(N-1). \tag{3.8.8}$$

式中 C_N^2 表示从 N 个元素中任取 2 个的组合数. 这样, 在式 (3.8.7) 的右端有 $N + \dfrac{N}{2}(N-1) = \dfrac{1}{2}N(N+1)$ 个独立的项 $\xi_\mu^n(\bar{x})$ 和 $\xi_{\mu;\nu}^n(\bar{x})$; 只能组成 $\dfrac{1}{2}N(N+1)$ 个独立的 Killing 矢量 $\xi_\mu^n(x)$. 这里我们不妨把 $\xi_\mu^n(\bar{x})$ 和 $\xi_{\mu;\nu}^n(\bar{x})$看作这 M 个矢量在 $\dfrac{1}{2}N(N+1)$ 维空间中的分量. 如果 $M > \dfrac{1}{2}N(N+1)$, 则这 M 个矢量不可能是线性独立的, 所以它们必须满足关系式

$$C_n\xi_\rho^n(\bar{x}) = C_n\xi_{\rho;\nu}^n(\bar{x}) = 0 \quad (C_n\text{为常数}); \tag{3.8.9}$$

由 (3.8.7) 知 Killing 矢量 $\xi_\rho^n(x)$ 处处满足条件

$$C_n\xi_\rho^n(x) = 0, \tag{3.8.10}$$

所以它们不是独立的 Killing 矢量. 至此, 我们证明了一个定理: **在 N 维空间中最多能有 $\dfrac{1}{2}N(N+1)$个独立的 Killing 矢量**. 这里**独立的**矢量定义为不满足任何常系数线性关系 (3.8.10) 的矢量.

根据这一定理, 四维时空最多能有 10 个 Killing 矢量. 下面我们将求出四维 Minkowski 平直时空的 Killing 矢量. 这时 $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$,

$$[\eta_{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}. \tag{3.8.11}$$

将上式代入 Killing 方程 (3.8.2) 并取 $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$, 得到四个方程

$$\frac{\partial\xi_0}{\partial x^0} = \frac{\partial\xi_1}{\partial x^1} = \frac{\partial\xi_2}{\partial x^2} = \frac{\partial\xi_3}{\partial\xi^3} = 0, \tag{3.8.12}$$

和另外六个方程

$$\frac{\partial\xi_0}{\partial x^i} = -\frac{\partial\xi_i}{\partial x^0}, \tag{3.8.13}$$

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial x^k} = -\frac{\partial \xi_k}{\partial x^i}. \tag{3.8.14}$$

方程 (3.8.12) 的解具有形式

$$\begin{aligned} &\xi_0 = \xi_0(x^i), \quad \xi_1 = \xi_1(x^0, x^2, x^3), \\ &\xi_2 = \xi_2(x^0, x^1, x^3), \quad \xi_3 = \xi_3(x^0, x^1, x^2). \end{aligned} \tag{3.8.15}$$

方程 (3.8.13) 的左端不含 x^0, 而右端不含 $x^i (i = 1$ 或 2,3), 所以两端都必须等于常数. 同理, (3.8.14) 两端也都必须等于常数. 于是 (3.8.13) 和 (3.8.14) 的解具有形式

$$\xi_\mu(x) = \alpha_{\mu\nu} x^\nu + \zeta_\mu. \tag{3.8.16}$$

式中 $\alpha_{\mu\nu}$ 和 ζ_μ 为常数, 且 $\alpha_{\mu\nu} = -\alpha_{\nu\mu}$. 上式写成矩阵形式为

$$\begin{pmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{01} & \alpha_{02} & \alpha_{03} \\ -\alpha_{01} & 0 & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ -\alpha_{02} & -\alpha_{12} & 0 & \alpha_{23} \\ -\alpha_{03} & -\alpha_{13} & -\alpha_{23} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \zeta_0 \\ \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{pmatrix}. \tag{3.8.17}$$

逆变分量为

$$\xi^\mu(x) = \eta^{\mu\nu} \xi_\mu(x) = \alpha^\mu_\lambda x^\lambda + \zeta^\mu. \tag{3.8.18}$$

式中

$$\alpha^\mu_\lambda = \eta^{\mu\nu} \alpha_{\nu\lambda}, \quad \zeta^\mu = \eta^{\mu\nu} \zeta_\nu. \tag{3.8.19}$$

上式可写为矩阵形式

$$\begin{pmatrix} \xi^0 \\ \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{01} & \alpha_{02} & \alpha_{03} \\ \alpha_{01} & 0 & -\alpha_{12} & \alpha_{31} \\ \alpha_{02} & \alpha_{12} & 0 & -\alpha_{23} \\ \alpha_{03} & -\alpha_{31} & \alpha_{23} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \zeta^0 \\ \zeta^1 \\ \zeta^2 \\ \zeta^3 \end{pmatrix}. \tag{3.8.20}$$

上式明显地给出了 Killing 矢量的几何意义. 矢量 ζ^μ 显然描述 Minkowski 空间中沿 x^μ 轴的平移. 它们是 Poincare 群之平移子群的无限小生成元, 是 Minkowski 平直空间的对称群. 另外 6 个参量 $\alpha_{\mu\nu}$ 显然描述平直空间中的 6 个 Lorentz 转动. 它们中每一个描述一个三维转动或者一个均匀的 Lorentz 变换 (缩短). 其中 α_{23}, α_{31} 和 α_{12} 分别描述绕 $x^i (i = 1, 2, 3)$ 轴的三维转动, 可以用矩阵表示为

$$\alpha^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\alpha^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \tag{3.8.21}$$

$\alpha_{01}, \alpha_{02}, \alpha_{03}$ 分别描述沿 x^i 轴的 Lorentz 缩短, 可用矩阵表示为

$$\alpha^4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\alpha^6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.8.22}$$

利用上二式, 可将 (3.8.20) 改写为

$$\begin{aligned}(\xi^\mu) =& ((\alpha_{23}\alpha^1 + \alpha_{31}\alpha^2 + \alpha_{12}\alpha^3) \\ &+ (\alpha_{01}\alpha^4 + \alpha_{02}\alpha^5 + \alpha_{03}\alpha^6))(x^\mu) + (\zeta^\mu).\end{aligned} \tag{3.8.23}$$

为了说明无限小 Lorentz 矩阵的确满足通常均匀 Lorentz 群的对易关系, 我们令

$$\begin{aligned}&J_l = \mathrm{i}\alpha^l, \quad l = 1,2,3, \\ &K_l = \mathrm{i}\alpha^p, \quad p = 4,5,6 \text{ 分别与 } l = 1,2,3 \text{ 对应}.\end{aligned} \tag{3.8.24}$$

此时容易得到 $(l,m,n = 1,2,3)$

$$[J_l, J_m] = \mathrm{i}\varepsilon_{lmn}J_n, \tag{3.8.25a}$$

$$[K_l, K_m] = -\mathrm{i}\varepsilon_{lmn}J_n, \tag{3.8.25b}$$

$$[J_l, K_m] = \mathrm{i}\varepsilon_{lmn}K_n. \tag{3.8.25c}$$

式中 $[A,B] \equiv AB - BA$.

令

$$J_l = \frac{1}{2}\varepsilon_{lmn}J_{mn}, \quad K_l = \mathrm{i}J_{ol}. \tag{3.8.26}$$

式中 J_{lm} 关于脚标具有和 ε_{lm} 相同的对称性. 此时可将 (3.8.25) 诸式合写为一个式子

$$[J_{l\lambda}, J_{\mu\nu}] = \mathrm{i}(\delta_{l\mu}J_{\lambda\nu} + \delta_{\lambda\nu}J_{l\mu} - \delta_{l\nu}J_{\lambda\mu} - \delta_{\lambda\mu}J_{l\nu}). \tag{3.8.27}$$

用无限小矩阵 $\alpha^l(l=1,2,\cdots,6)$ 可表示 3 维有限转动和有限 Lorentz 变换

$$\begin{aligned}\alpha^l(\psi) &= \exp(\psi\alpha^l) \\ &= I+\psi\alpha^l+\frac{\psi^2}{2!}(\alpha^l)^2+\frac{\psi^3}{3!}(\alpha^l)^3+\cdots\end{aligned} \tag{3.8.28}$$

式中 I 为 4×4 单位矩阵. 当 $l=1$, 容易得到

$$(\alpha^1)^{2m+1}=(-1)^m\alpha^1,\quad (\alpha^1)^{2m}=(-1)^{m+1}(\alpha^1)^2,\quad m=1,2,\cdots \tag{3.8.29}$$

其中 α^1 已由 (3.8.21) 给出, 而 $(\alpha^1)^2$ 可写为

$$(\alpha^1)^2=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}. \tag{3.8.30}$$

将 (3.8.30) 和 (3.8.29) 代入 (3.8.28) 得

$$\begin{aligned}\alpha^1(\psi) =&I+\left(\psi-\frac{1}{3!}\psi^3+\cdots\right)\alpha^1 \\ &+\left(\frac{1}{2!}\psi^2-\frac{1}{4!}\psi^4+\cdots\right)(\alpha^1)^2 \\ =&I+\sin\psi\alpha^1+(1-\cos\psi)(\alpha^1)^2.\end{aligned} \tag{3.8.31}$$

写成矩阵形式即

$$\alpha^1(\psi)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&\cos\psi&-\sin\psi\\0&0&\sin\psi&\cos\psi\end{pmatrix}. \tag{3.8.32a}$$

用同样方法可以得到

$$\alpha^2(\psi)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\cos\psi&0&\sin\psi\\0&0&1&0\\0&-\sin\psi&0&\cos\psi\end{pmatrix}, \tag{3.8.32b}$$

$$\alpha^3(\psi)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\cos\psi&-\sin\psi&0\\0&\sin\psi&\cos\psi&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}, \tag{3.8.32c}$$

$$\alpha^4(\psi) = \begin{pmatrix} \text{ch}\psi & \text{sh}\psi & 0 & 0 \\ \text{sh}\psi & \text{ch}\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.8.32d}$$

$$\alpha^5(\psi) = \begin{pmatrix} \text{ch}\psi & 0 & \text{sh}\psi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \text{sh}\psi & 0 & \text{ch}\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.8.32e}$$

$$\alpha^b(\psi) = \begin{pmatrix} \text{ch}\psi & 0 & 0 & \text{sh}\psi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \text{sh}\psi & 0 & 0 & \text{ch}\psi \end{pmatrix}. \tag{3.8.32f}$$

由 (3.8.28) 可知

$$\alpha^l = \left.\frac{\mathrm{d}\alpha^l(\psi)}{\mathrm{d}\psi}\right|_{\phi=0}, \quad l = 1, 2, \cdots, 6. \tag{3.8.33}$$

(3.8.32a)~(3.8.32c) 中的 ψ 表示转动前后两个 Lorentz 标架间的夹角, 而 (3.8.32d)~(3.8.32f) 中的 ψ 表示相互运动的两个 Lorentz 标架间的转动角.

我们可以证明, 如果两坐标系的相对速度为 v, 则 ψ 和 v 之间存在的关系式

$$\text{sh}\psi = \frac{-v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad \text{ch}\psi = 1/\sqrt{1-v^2/c^2}. \tag{3.8.34}$$

设两个坐标系间的变换以 (3.8.32d) 表示, 且设 $x^0 = ct, x_1 = x, x^2 = y, x^3 = z$, 则

$$\begin{aligned} ct' &= ct\text{ch}\psi + x\text{sh}\psi, \\ x' &= ct\text{sh}\psi + x\text{ch}\psi, \\ y' &= y, \\ z' &= z. \end{aligned} \tag{3.8.35}$$

对于 x^μ 系原点有 $x = 0$, 代入上式得

$$\frac{x'}{t'} = -v = \text{cth}\psi, \tag{3.8.36}$$

从而得 (3.8.34).

将 (3.8.34) 代入 (3.8.35) 便得到沿 x 轴运动的 Lorentz 变换式

$$t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z. \tag{3.8.37}$$

用同样方法可以得到沿 y 轴和 z 轴运动的 Lorentz 变换式.

至此, 我们得到了 Minkowski 空间中 Killing 方程的全部解 ——10 个 Killing 矢量, 它们表示 Poincare 群的 10 个参量. 这是四维空间中 Killing 方程所能有的最多的解. 因此, Minkowski 空间是具有最大对称性的时空.

为了使问题的表述更加明显, 我们解与空间 $E(2)$ 中欧几里得群对应的 Killing 方程.

在 $E(2)$ 中度规可写为

$$g_{ab} = \delta_{ab}, \quad a, b = 1, 2. \tag{3.8.38}$$

Killing 方程为

$$\frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{b}} + \frac{\partial \xi_{b}}{\partial x^{\alpha}} = 0, \tag{3.8.39}$$

即

$$\frac{\partial \xi^1}{\partial x} + \frac{\partial \xi^2}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \xi^1}{\partial y} + \frac{\partial \xi^2}{\partial x} = 0. \tag{3.8.40}$$

由此得到

$$\xi^1 = \xi^1(y), \quad \xi^2 = \xi^2(x), \tag{3.8.41}$$

$$\frac{\mathrm{d}\xi^2(x)}{\mathrm{d}x} = -\frac{\mathrm{d}\xi^1(y)}{\mathrm{d}y}. \tag{3.8.42}$$

上式两端必须都等于一常数, 以 ϕ 表示, 积分得

$$\xi^2 = \phi x + A, \tag{3.8.43}$$

$$\xi^1 = -\phi y + B.$$

式中 A 和 B 均为常数. 这表明有三个参量来描述 $E(2)$ 中的无限小运动群. 参量 A 和 B 对应于沿 x 轴和 y 轴的平移变换, 参量 ϕ 对应于绕原点的转动.

上面的结果也可以写成共形映射 (3.7.7) 的形式. 这只要将 (3.8.43) 代入 (3.7.7) 即可. 首先令 $\phi = 0$, 代入 (3.7.7) 得

$$\widetilde{x} = x + \varepsilon A, \quad \widetilde{y} = y + \varepsilon B, \tag{3.8.44}$$

此即平移变换. 再令 $A = B = 0$, 代入 (3.7.7) 得

$$\widetilde{x} = x - \varepsilon\phi y, \quad \widetilde{y} = y + \varepsilon\phi x, \tag{3.8.45}$$

写成矩阵形式即

$$\begin{pmatrix} \widetilde{x} \\ \widetilde{y} \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \varepsilon\phi \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\approx \begin{pmatrix} \cos\varepsilon\phi & -\sin\varepsilon\phi \\ \sin\varepsilon\phi & \cos\varepsilon\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{3.8.46}$$

上式描述绕原点的无限小转动 (转动角为 $\varepsilon\phi$).

3.9 引力场的对称性

1. 几个基本概念

引力场就是时空度规张量场. 因此, 讨论引力场的对称性实际上就是讨论四维时空的对称性. 广义相对论中所研究的时空都是度规空间. 下面我们给出关于空间对称性的几个基本概念.

如果在度规空间中任一点 $\bar{x}$, 存在无限小等度量变换 (3.7.7), 把 $\bar{x}$ 变到它的邻域内任意其他点, 即该度规可使 Killing 矢量在任意点取一切可能值, 则此空间称**为均匀的**. 例如, 在 N 维空间中, 可以选一组 (N 个)Killing 矢量 $\xi_\sigma^{(\mu)}(x;\bar{x})$, 使得 $\xi_\sigma^{(\mu)}(\bar{x};\bar{x}) = \delta_\sigma^\mu$. 这些矢量显然是独立的, 因为任何关系式 $C_\mu\xi_\nu^{(\mu)}(x;\bar{x}) = 0$ 在 $x = \bar{x}$ 有 $C_\mu = 0$.

如果存在无限小等度量变换 (3.7.7), 使点 $\bar{x}$ 固定、$\xi^\mu(\bar{x}) = 0$, 且使 $\xi_{\mu;\nu}(\bar{x})$ 除满足 Killing 方程以外可以取一切可能值, 则称此度规空间为关于给定点 $\bar{x}$**各向同性的**. 例如, 在 N 维空间中, 可以选一组 $N(N-1)/2$ 个 Killing 矢量 $\xi_\sigma^{(\mu\nu)}(x;\bar{x})$, 且有

$$\xi_\sigma^{(\mu\nu)}(x;\bar{x}) \equiv -\xi_\sigma^{(\nu\mu)}(x;\bar{x}), \tag{3.9.1}$$

$$\xi_\sigma^{(\mu\nu)}(\bar{x};\bar{x}) \equiv 0, \tag{3.9.2}$$

$$\begin{aligned} \xi_{\sigma;\lambda}^{(\mu\nu)}(\bar{x};\bar{x}) &\equiv \frac{\partial}{\partial x^\lambda}\xi_\sigma^{(\mu\nu)}(x;\bar{x})\bigg|_{x=\bar{x}} \\ &\equiv \delta_\sigma^\mu\delta_\lambda^\nu - \delta_\lambda^\mu\delta_\sigma^\nu. \end{aligned} \tag{3.9.3}$$

这些 Killing 矢量都是独立的, 因为任何关系式 $c_{\mu\nu}\xi_\sigma^{(\mu\nu)}(x;\bar{x}) = 0$ 且 $c_{\mu\nu} = -c_{\nu\mu}$ 在 $\bar{x}$ 点必导致 $c_{\mu\nu} - c_{\nu\mu} = 2c_{\mu\nu} = 0$. ($c_{\mu\nu}\xi_\sigma^{(\mu\nu)}$ 对 μ 和 ν 不取和, 下同).

如果空间中存在 Killing 矢量 $\xi_\sigma^{(\mu\nu)}(x;\bar{x})$ 和 $\xi_\sigma^{(\mu\nu)}(x;\bar{x}+\mathrm{d}\bar{x})$, 它们分别在点 $\bar{x}$ 和 $\bar{x}+\mathrm{d}\bar{x}$ 满足上面的初始条件, 则称此空间是**每点各向同性的**. 这些 Killing 矢量的任何线性组合也是 Killing 矢量, 所以 $\dfrac{\partial\xi_\sigma^{(\mu\nu)}(x;\bar{x})}{\partial x^\lambda}$ 也是该度规的 Killing 矢量.

由 (3.9.2) 可得

$$\frac{\partial}{\partial\bar{x}^\lambda}\xi^{(\mu\nu)}(\bar{x},\bar{x}) = \left[\frac{\partial}{\partial x^\lambda}\xi_\sigma^{(\mu\nu)}(x;\bar{x})\right]_{x=\bar{x}}$$

$$+\left[\frac{\partial}{\partial \bar{x}^\lambda}\xi_\sigma^{(\mu\nu)}(x;\bar{x})\right]_{x=\bar{x}}=0.$$

从而有

$$\left[\frac{\partial}{\partial \bar{x}^\lambda}\xi_\sigma^{(\mu\nu)}(x;\bar{x})\right]_{x=\bar{x}}=-\delta^\mu_\sigma\delta^\nu_\lambda+\delta^\mu_\lambda\delta^\nu_\sigma. \tag{3.9.4}$$

显然可找到一矢量 $\xi_\sigma(x)$

$$\xi_\sigma(x)=\frac{\alpha_\nu}{N-1}\frac{\partial}{\partial \bar{x}^\lambda}\xi_\sigma^{(\lambda\nu)}(x;\bar{x}), \tag{3.9.5}$$

该矢量在点 $x=\bar{x}$ 可以取任意值 α_ν. 因此, 任意一个**每点各向同性的空间必是均匀的.**

如果一空间的度规具有最大数目 $N(N+1)/2$ 个 Killing 矢量, 则此空间称为**最大对称的**. **一个均匀且于某点各向同性的空间必是最大对称的**. 实际上, 一个空间既是均匀的又是在某点各向同性的, 就要求有 $N(N+1)/2$ 个 Killing 矢量 $\xi_\sigma^{(\mu)}(x;\bar{x})$ 和 $\xi_\sigma^{(\mu\nu)}(x;\bar{x})$. 这些 Killing 矢量显然是独立的. 因为假设它们间有一线性关系

$$\begin{aligned}&c_\mu\xi_\sigma^{(\mu)}(x;\bar{x})+c_{\mu\nu}\xi_\sigma^{(\mu\nu)}(x;\bar{x})=0,\\&c_{\mu\nu}=-c_{\nu\mu},\end{aligned} \tag{3.9.6}$$

则对 x^λ 求导后令 $x=\bar{x}$ 得 $c_{\sigma\lambda}=0$; 将 $x=\bar{x}$ 直接代入得 $c_\sigma=0$. 即 $N(N+1)/2$ 个 Killing 矢量不可能是线性相关的, 必是独立的. 下面的定理是明显成立的:

每点各向同性的空间必是最大对称的. 下面我们证明此定理的逆定理: 最大对称空间必是均匀且每点各向同性的. 设有 $N(N+1)/2$ 个独立的 Killing 矢量 $\xi_\sigma^n(x)$. 我们可以把 $\xi_\rho^n(x)$、$\xi_{\lambda;\nu}^n(x)$ 排成一个方阵; 用 n 标明 $N(N+1)/2$ 行, 用 N 个 ρ 和 $N(N-1)/2$ 个 λ 与 $\nu(\lambda>\nu)$ 标明 $N(N+1)/2$ 列. 这个方阵的行列式一定不等于零. 因为假若有

$$c_n\xi_\rho^n(\bar{x})=c_n\xi_{\lambda;\nu}^n(\bar{x})=0,$$

则考虑到 (3.8.7), 可导致 $c_n\xi_\rho^n(x)=0$, 这与假设 Killing 矢量 $\xi_\sigma^n(x)$ 独立相矛盾. 因此对于任何“行矢量”, 方程组

$$\mathrm{d}_n\xi_\mu^\nu(\bar{x})=a_\mu, \tag{3.9.7}$$

$$\mathrm{d}_n\xi_{\mu;\nu}^n(\bar{x})=b_{\mu\nu} \tag{3.9.8}$$

必定有解, 式中 a_μ 和 $b_{\mu\nu}=-b_{\nu\mu}$ 为“行矢量”的“分量”. 很容易找到一个 Killing 矢量 $\xi_\mu(x)$:

$$\xi_\mu(x)=\mathrm{d}_n\xi_\mu^n(x), \tag{3.9.9}$$

它在点 $\bar{x}$ 取值 $\xi_\mu(\bar{x}) = a_\mu$, 它的导数在 $\bar{x}$ 点取值 $\xi_{\mu;\nu}(\bar{x}) = b_{\mu\nu}$. 由于 a_μ 是任意的, 所以空间是均匀的. $b_{\mu\nu}$ 也是任意的 (只要满足 $b_{\mu\nu} = -b_{\nu\mu}$), 因此空间对点 $\bar{x}$ 是各向同性的.

作为最大对称空间的例子, 我们在上一节中讨论了四维平直空间, 求出了 $N(N+1)/2 = 10$ 个 Killing 矢量. 为了使问题更加明显, 我们还讨论了 $E(2)$ 空间. 现在我们证明, 一个曲率张量为零的 N 维空间 (N 维平直空间) 一定是最大对称空间.

适当选择坐标系 (如 Descartes 坐标), 可使 N 维平直空间度规张量各分量均为常数, 且仿射联络为零. 此时方程 (3.8.6) 简化为

$$\frac{\partial^2 \xi_\mu}{\partial x^\rho \partial x^\mu} = 0, \tag{3.9.10}$$

它的解具有形式

$$\xi_\mu(x) = \alpha_{\mu\nu} x^\nu + b_\mu. \tag{3.9.11}$$

式中 $\alpha_{\mu\nu}$ 和 b_μ 为积分常数. 将上式代入 Killing 方程, 得到

$$\alpha_{\mu\nu} = -\alpha_{\nu\mu}. \tag{3.9.12}$$

因此, 我们可以选取 $N(N+1)/2$ 个 Killing 矢量:

$$\xi_\mu^{(\nu)}(x) \equiv \delta_\mu^\nu, \quad \xi_\mu^{(\nu\lambda)}(x) \equiv \delta_\mu^\nu x^\lambda - \delta_\mu^\lambda x^\nu. \tag{3.9.13}$$

而一般的 Killing 矢量为

$$\xi_\mu(x) = b_\nu \xi_\mu^{(\nu)}(x) + a_{\nu\lambda} \xi_\mu^{(\nu\lambda)}(x). \tag{3.9.14}$$

上式中 $b_\nu \xi_\mu^{(\nu)}$ 不对 ν 取和. N 个 Killing 矢量 $\xi_\mu^{(\nu)}(x)$ 描述平移, $N(N-1)/2$ 个矢量 $\xi_\mu^{(\nu\lambda)}$ 描述无限小旋转, 对于 Minkowski 空间表示 Lorentz 变换. 因此, 任一 N 维平直空间存在 $N(N+1)/2$ 个独立的 Killing 矢量, 所以是最大对称空间.

一确定的空间中, 独立的 Killing 矢量的个数与坐标系的选择无关. 这就是说, 独立的 Killing 矢量的个数是空间的内禀属性. 现在我们说明这一点. 设 $\xi^\mu(x)$ 是空间度规 $g_{\mu\nu}(x)$ 的 Killing 矢量. 在坐标变换 $x^\mu \to x'^\mu$ 下, 度规 $g_{\mu\nu}(x)$ 变为

$$g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} g_{\alpha\beta}(x). \tag{3.9.15}$$

不难看出, 矢量

$$\xi'^\mu(x') = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \xi^\alpha(x) \tag{3.9.16}$$

在坐标系 x'^μ 中满足 Killing 方程, 即矢量 $\xi'^\mu(x')$ 是度规 $g'_{\mu\nu}(x')$ 的 Killing 矢量. 各 Killing 矢量 $\xi'^\mu(x')$ 是独立的, 因为否则各 Killing 矢量 $\xi^\mu(x)$ 也不是独立的 (由 $\xi^{\mu\prime}(x')$ 之间的线性关系将导致 $\xi^\mu(x)$ 之间的线性关系).

由上面的讨论可以得出结论：给定空间的最大对称性是空间的内禀属性，与坐标系选择无关. 例如，曲率张量为零的空间必是最大对称空间 (注意其逆定理不成立).

容易发现，空间的均匀性和各向同性也都与坐标系的选择无关.

2. 常曲率空间

由 (3.8.3) 有

$$\xi_{\rho;\mu;\sigma;\nu} - \xi_{\rho;\mu;\nu;\sigma} = R^{\lambda}_{\rho\sigma\nu}\xi_{\lambda;\mu} + R^{\lambda}_{\mu\sigma\nu}\xi_{\rho;\lambda}. \tag{3.9.17}$$

(3.8.6) 满足 (3.9.17) 的充分且必要条件是

$$\begin{aligned}&R^{\lambda}_{\nu\rho\mu}\xi_{\lambda;\sigma} - R^{\lambda}_{\sigma\rho\mu}\xi_{\lambda;\nu} + (R^{\lambda}_{\nu\rho\mu;\sigma} - R^{\lambda}_{\sigma\rho\mu;\nu})\xi_{\lambda}\\ =&R^{\lambda}_{\rho\sigma\nu}\xi_{\lambda;\mu} + R^{\lambda}_{\mu\sigma\nu}\xi_{\rho;\lambda}.\end{aligned} \tag{3.9.18}$$

将 Killing 方程代入上式得

$$\begin{aligned}&(R^{\lambda}_{\rho\sigma\nu}\sigma^{\alpha}_{\mu} - R^{\lambda}_{\mu\sigma\nu}\delta^{\alpha}_{\rho} + R^{\lambda}_{\sigma\rho\mu}\delta^{\alpha}_{\nu} - R^{\lambda}_{\nu\rho\mu}\delta^{\alpha}_{\sigma})\xi_{\lambda;\alpha}\\ =&(R^{\lambda}_{\nu\rho\mu;\sigma} - R^{\lambda}_{\sigma\rho\mu;\nu})\xi_{\lambda}.\end{aligned} \tag{3.9.19}$$

前面已经证明，在最大对称空间中任一点 x^{μ}，我们可以找到 Killing 矢量 ξ_{μ}，使得 $\xi_{\mu}(x)=0$. 再考虑到 $\xi_{\lambda;\alpha}(x)$ 是任意反对称矩阵，可知式 (3.9.19) 中 $\xi_{\lambda;\alpha}(x)$ 的系数必有等于零的反对称部分，即

$$\begin{aligned}&R^{\lambda}_{\rho\sigma\nu}\delta^{\alpha}_{\mu} - R^{\lambda}_{\mu\sigma\nu}\delta^{\alpha}_{\rho} + R^{\lambda}_{\sigma\rho\mu}\delta^{\alpha}_{\nu} - R^{\lambda}_{\nu\rho\mu}\delta^{\alpha}_{\sigma}\\ =&R^{\alpha}_{\rho\sigma\nu}\delta^{\lambda}_{\mu} - R^{\alpha}_{\mu\sigma\nu}\delta^{\lambda}_{\rho} + R^{\alpha}_{\sigma\rho\mu}\delta^{\lambda}_{\nu} - R^{\alpha}_{\nu\rho\mu}\delta^{\lambda}_{\sigma}.\end{aligned} \tag{3.9.20}$$

前面还证明了，在最大对称空间中任一给定的点 x 存在 Killing 矢量 $\xi_{\mu}, \xi_{\mu}(x)$ 可取任意值. 这样，由 (3.9.20) 和 (3.9.19) 得

$$R^{\lambda}_{\nu\rho\mu;\sigma} = R^{\lambda}_{\sigma\rho\mu;\nu}. \tag{3.9.21}$$

实际上前面已经证明了，一个每点各向同性 [因而满足 (3.9.20)] 的空间必是均匀的，所以必满足 (3.9.21).

将 (3.9.20) 中的 α 与 μ 缩并，得到

$$\begin{aligned}&NR^{\lambda}_{\rho\sigma\nu} - R^{\lambda}_{\rho\sigma\nu} + R^{\lambda}_{\sigma\rho\nu} - R^{\lambda}_{\nu\rho\sigma}\\ =&R^{\lambda}_{\rho\sigma\nu} - R_{\sigma\rho}\delta^{\lambda}_{\nu} + R_{\nu\rho}\delta^{\lambda}_{\sigma}.\end{aligned} \tag{3.9.22}$$

利用曲率张量 $R^{\lambda}_{\rho\sigma\nu}$ 的性质得

$$(N-1)R_{\lambda\rho\sigma\nu} = R_{\nu\rho}g_{\lambda\sigma} - R_{\sigma\rho}g_{\lambda\nu}. \tag{3.9.23}$$

上式对 λ 和 ρ 反对称, 于是有

$$R_{\nu\rho}g_{\lambda\sigma} - R_{\sigma\rho}g_{\lambda\nu} = -R_{\nu\lambda}g_{\rho\sigma} + R_{\sigma\lambda}g_{\rho\sigma}.$$

对 λ 和 ν 缩并, 得到

$$\begin{aligned} R_{\sigma\rho} - NR_{\sigma\rho} &= -R^{\lambda}_{\lambda}g_{\sigma\rho} + R_{\rho\sigma}, \\ R_{\sigma\rho} &= \frac{1}{N}R^{\lambda}_{\lambda}g_{\sigma\rho}. \end{aligned} \tag{3.9.24}$$

将上式代入 (3.9.23), 得到曲率张量的表达式

$$R_{\lambda\rho\sigma\nu} = \frac{R^{\lambda}_{\lambda}}{N(N-1)}(g_{\nu\rho}g_{\lambda\sigma} - g_{\sigma\rho}g_{\lambda\nu}). \tag{3.9.25}$$

在每点各向同性的空间中, 式 (3.9.24) 和 (3.9.25) 处处成立. 不难证明, 在**三维或高于三维($N \neq 2$)的空间中, R^{λ}_{λ}必为常数.** 实际上由 (3.9.24) 得到

$$\left(R^{\sigma}_{\rho} - \frac{1}{2}\delta^{\sigma}_{\rho}R^{\lambda}_{\lambda}\right)_{;\sigma} = 0,$$

即

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{2}\right)R^{\lambda}_{\lambda;\sigma} &= 0, \\ \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{2}\right)\frac{\partial}{\partial x^{\sigma}}R^{\lambda}_{\lambda} &= 0. \end{aligned} \tag{3.9.26}$$

由此得 $R^{\lambda}_{\lambda} = \text{const}$. 引入常曲率 K 代替 R^{λ}_{λ} 更加方便

$$R^{\lambda}_{\lambda} \equiv -N(N-1)K. \tag{3.9.27}$$

此时 (3.9.24) 和 (3.9.25) 改写为

$$R_{\sigma\rho} = -(N-1)Kg_{\sigma\rho}, \tag{3.9.28}$$

$$R_{\lambda\rho\sigma\nu} = K(g_{\sigma\rho}g_{\lambda\nu} - g_{\nu\rho}g_{\lambda\sigma}). \tag{3.9.29}$$

具有上述性质的空间称为**常曲率空间.**

由 (3.9.26) 可知, 当 $N = 2$ 时无法判定 R^{λ}_{λ} 是否为常数. 我们可以由 (3.9.21) 出发, 证明 $N = 2$ 的最大对称空间确实为常曲率空间, 即 (3.9.29) 中的 K 为常数. 这一工作读者可自己完成.

关于最大对称空间, 存在下述定理 (唯一性定理): 最大对称空间由曲率常数 K 和度规张量的正、负特征值个数唯一确定. 根据这一定理, 我们只要随便用任何方式构成一个具有任意常曲率 K 的空间, 了解了它, 便了解了最大对称空间的普遍性质. 我们这样构成一常曲率空间. 先考虑一个 $(N+1)$ 维平直空间, 其度规可写为

$$\mathrm{d}s^2 = C_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu + K^{-1}\mathrm{d}z^2. \tag{3.9.30}$$

式中 $C_{\mu\nu} = \text{const}, K = \text{const}; \mu, \nu = 1, 2, \cdots, N$. 即由 N 个量 x^μ 和一个量 z 确定一个 $(N+1)$ 维空间的点. 用条件

$$KC_{\mu\nu}x^\mu x^\nu + z^2 = 1 \tag{3.9.31}$$

把一个 N 维非欧几里得空间嵌入这个高一维的空间中. 上述条件相当于把变量 x^μ 和 z 限制在一伪球 (或球) 的表面上, 在这一 N 维空间中 (上述伪球面上), $\mathrm{d}z^2$ 可写为

$$\mathrm{d}z^2 = \frac{K^2(C_{\mu\nu}x^\mu \mathrm{d}x^\nu)^2}{z^2} = \frac{K^2(C_{\mu\nu}x^\mu \mathrm{d}x^\nu)^2}{1 - KC_{\mu\nu}x^\mu x^\nu}. \tag{3.9.32}$$

将上式代入 (3.9.30) 得

$$\mathrm{d}s^2 = C_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu + \frac{K(C_{\alpha\beta}x^\alpha \mathrm{d}x^\beta)^2}{(1 - KC_{\mu\nu}x^\mu x^\nu)}. \tag{3.9.33}$$

因此度规可写为

$$g_{\mu\nu}(x) = C_{\mu\nu} + \frac{KC_{\mu\alpha}C_{\nu\beta}}{1 - KC_{\rho\sigma}x^\rho x^\sigma}x^\alpha x^\beta. \tag{3.9.34}$$

上式给出了最一般的最大对称空间度规. 当 $K = 0$ 时, 上式退化为平直空间度规.

由上述构造过程可知 (3.9.34) 允许有 $N(N+1)/2$ 个参量的等度量变换群. 因为 $(N+1)$ 维线元 (3.9.30) 与嵌入条件 (3.9.31) 在 $(N+1)$ 维空间里的“转动”下是不变的. 这些变换是

$$x'^\mu = R^\mu_\nu x^\nu + R^\mu_z z, \tag{3.9.35}$$

$$z' = R^z_\mu z^\mu + R^z_z z. \tag{3.9.36}$$

式中 $R^\lambda_\sigma = \text{const}$, 且满足下列方程:

$$C_{\mu\nu}R^\mu_\rho R^\nu_\sigma + K^{-1}R^z_\rho R^z_\sigma = C_{\rho\sigma}, \tag{3.9.37}$$

$$C_{\mu\nu}R^\mu_\rho R^\nu_z + KR^z_\rho R^z_z = 0, \tag{3.9.38}$$

$$C_{\mu\nu}R^\mu_z R^\nu_z + K^{-1}(R^z_z)^2 = K^{-1}. \tag{3.9.39}$$

我们可以将满足上三式的变换分为两类

$$(\mathrm{I}) R_z^\mu = R_\mu^z = 0, \quad R_z^z = 1. \tag{3.9.40}$$

此时有

$$C_{\mu\nu} R_\rho^\mu R_\sigma^\nu = C_{\rho\sigma}, \tag{3.9.41}$$

$$x'^\mu = R_\nu^\mu x^\nu. \tag{3.9.42}$$

可见矩阵 $R_\nu^\mu(N \times N$ 矩阵) 表示绕原点的刚性“旋转”.

$$\begin{aligned}&(\mathrm{II}) R_z^\mu = a^\mu, \quad R_\mu^z = -K C_{\mu\nu} a^\nu, \\ &R_z^z = (1 - K C_{\alpha\beta} a^\alpha a^\beta)^{1/2}, \quad R_\nu^\mu = \delta_\nu^\mu - b K C_{\nu\sigma} a^\sigma a^\mu.\end{aligned} \tag{3.9.43}$$

式中 a^μ 是任意的, b 的表达式为

$$b \equiv \frac{1 - (1 - K C_{\alpha\beta} a^\alpha a^\beta)^{1/2}}{K C_{\alpha\beta} a^\alpha a^\beta} \tag{3.9.44}$$

R_z^z 为实数, 即

$$K C_{\alpha\beta} a^\alpha a^\beta \leqslant 1. \tag{3.9.45}$$

这些变换是“平移”

$$x'^\mu = x^\mu + a^\mu \{(1 - K C_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta)^{1/2} - b K C_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta\}, \tag{3.9.46}$$

把原点 $x^\alpha = 0$ 变为 $x'^\mu = a^\mu$.

注意到 a^μ 的任意性, 变换 (3.9.46) 的存在便表明了空间是均匀的. 变换 (3.9.42) 的存在表明该空间对原点是各向同性的. 因为度规是均匀的, 又是对原点各向同性的, 所以它是每点各向同性的, 也是最大对称的.

为了确定度规中常数 K 的含义, 我们寻求曲率张量 $R_{\lambda\nu\rho\sigma}$ 的表达式. 为此, 由 (3.9.34) 先求出 $\Gamma_{v\sigma}^\lambda$

$$\Gamma_{v\sigma}^\lambda = K x^\lambda g_{v\sigma}. \tag{3.9.47}$$

由此得到

$$\begin{aligned}R_{\lambda\nu\rho\sigma} =& K(C_{\lambda\sigma} C_{\nu\rho} - C_{\lambda\rho} C_{\nu\sigma}) \\ &+ K^2 (1 - K C_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta)^{-1} (C_{\lambda\sigma} x_\nu x_\rho - C_{\lambda\rho} x_\nu x_\sigma \\ &+ C_{\nu\rho} x_\lambda x_\sigma - C_{\nu\sigma} x_\rho x_\lambda),\end{aligned} \tag{3.9.48}$$

即

$$R_{\lambda\nu\rho\sigma} = K(g_{\rho\nu} g_{\lambda\sigma} - g_{\sigma\nu} g_{\lambda\rho}). \tag{3.9.49}$$

将此式与 (3.9.29) 比较, 可知度规 (3.9.34) 中的常数 K 就是 (3.9.27) 中引入的曲率常数. K 是不依坐标系选择的常数. 因此, 在坐标变换下, 不同的度规必具有和 (3.9.34) 相同的 K 值. 变换后得到的度规应和 (3.9.34) 形式相同, 只是 $C_{\mu\nu}$ 不同. 对于线性变换 $x^\mu = \alpha^\mu_\nu x'^\nu, C_{\mu\nu}$ 变为

$$C'_{\mu\nu} = \alpha^\alpha_\mu \alpha^\beta_\nu C_{\alpha\beta}. \tag{3.9.50}$$

Sylvester 定理指出, 矩阵 (张量) 的正的、负的或为零的本征值的数目在上述线性变换下分别保持不变. 因此, 通过变换 (3.9.50) 可以把 $C_{\mu\nu}$ 变为我们所需要的任何一个实对称张量, 只要保持它的正、负特征值的个数不变. 由于空间是均匀的, 所以 $C_{\mu\nu}$ 的特征值个数与 $g_{\mu\nu}$ 在 $x=0$ 点的相同.

一个 N 维度规允许引入局部欧几里得坐标系, 其所有的特征值都是正的, 故当 $K \neq 0$ 时可以取 $C_{\mu\nu} = \dfrac{\delta_{\mu\nu}}{|K|}$. 此时 (3.9.33) 可改写为

$$\mathrm{d}s^2 = \begin{cases} \dfrac{1}{K}\left(\mathrm{d}x_\mu \mathrm{d}x^\mu + \dfrac{(x_\alpha \mathrm{d}x^\alpha)^2}{1 - x_\mu x^\mu}\right), & 当 K > 0 \quad (3.9.51) \\ -\dfrac{1}{K}\left(\mathrm{d}x_\mu \mathrm{d}x^\mu - \dfrac{(x_\alpha \mathrm{d}x^\alpha)^2}{1 + x_\mu x^\mu}\right), & 当 K < 0 \quad (3.9.52) \\ \mathrm{d}x_\mu \mathrm{d}x^\mu. & 当 K = 0 \quad (3.9.53) \end{cases}$$

式中 $\mathrm{d}x_\mu \mathrm{d}x^\mu = \delta_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu$.

对于 $K > 0$ 的情况, 将 $C_{\mu\nu} = \dfrac{\delta_{\mu\nu}}{|K|}$ 代入 (3.9.30) 和 (3.9.31), 得到

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{1}{K}(\mathrm{d}x_\mu \mathrm{d}x^\mu + \mathrm{d}z^2), \quad \mathrm{d}x_\mu \mathrm{d}x^\mu = \delta_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu \tag{3.9.54}$$

和

$$x_\mu x^\mu + z^2 = 1, \quad x_\mu x^\mu = \delta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu) \tag{3.9.55}$$

因此, (3.9.51) 可解释为嵌入平直空间 (3.9.54) 中的曲面 (3.9.55). 为了更加明显, 令 $x^\mu = \dfrac{1}{\sqrt{K}} x^\mu, z' = \dfrac{1}{\sqrt{K}} z$, 则上二式成为 (变换后去掉一撇号)

$$\mathrm{d}s^2 = \delta_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu + \mathrm{d}z^2, \tag{3.9.54a}$$

$$\delta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = \frac{1}{K}. \tag{3.9.55a}$$

显然, (3.9.51) 描述 $N+1$ 维欧几里得空间 (3.9.54a) 中半径为 $\dfrac{1}{\sqrt{K}}$ 的球面. 对于 $(N+1) = 3$ 的三维平直空间 (3.9.54a), 我们可以引入角坐标 θ, ϕ 和径坐标 r, 使

$$x^1 = \sin\theta \cos\phi, \quad x^2 = \sin\theta \sin\phi, \quad z = r. \tag{3.9.56}$$

此时曲面方程 (3.9.55) 化为

$$r^2 = \cos^2\theta; \tag{3.9.57}$$

代入三维平直度规 (3.9.54), 得到

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{1}{K}(dx^{1^2} + dx^{2^2} + dz^2) \\ &= \frac{1}{K} - (\sin^2\theta d\phi^2 + d\theta^2), \end{aligned} \tag{3.9.58}$$

这正是熟知的二维球面线元, 球面半径为 $\frac{1}{\sqrt{K}}$.

现在我们讨论, 四维最大对称时空度规, 特征值取为一正三负. 令

$$C_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}, \tag{3.9.59}$$

则线元 (3.9.33) 可写为

$$ds^2 = dt^2 - \delta_{ij}dx^i dx^j + \frac{K(tdt - \delta_{ij}x^i dx^j)^2}{1 - K(t^2 - \delta_{ij}x^i x^j)}. \tag{3.9.60}$$

令 $\boldsymbol{r} = (x^1, x^2, x^3)$, 则上式可写为

$$ds^2 = dt^2 - (d\boldsymbol{r})^2 + \frac{K(tdt - \boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{r})^2}{1 - K(t^2 - r^2)}. \tag{3.9.61}$$

对于 $K > 0$, 引入新坐标 $t', \boldsymbol{r}'$

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{\sqrt{K}}\left\{\frac{Kr'^2}{2}\cosh(\sqrt{K}t') + \left(1 + \frac{Kr'^2}{2}\right)\cdot\sinh(\sqrt{K}t')\right\}, \\ \boldsymbol{r} &= \boldsymbol{r}'\exp(\sqrt{K}t'), \end{aligned} \tag{3.9.62}$$

度规 (3.9.61) 变换为

$$ds^2 = dt'^2 - \exp(2\sqrt{K}t')(d\boldsymbol{r}')^2. \tag{3.9.63}$$

再做一次坐标变换可以得到与时间无关的度规. 这一变换为

$$\begin{aligned} t'' &= t' - \frac{1}{2\sqrt{K}}\ln[1 - K\boldsymbol{r}'^2\exp(2\sqrt{K}t')], \\ \boldsymbol{r}'' &= \boldsymbol{r}'\exp(\sqrt{K}t'); \end{aligned} \tag{3.9.64}$$

度规变为 (去掉 $t'', \boldsymbol{r}''$ 中的两撇号)

$$ds^2 = (1 - Kr^2)dt^2 - dr^2 - \frac{K(\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{r})^2}{1 - Kr^2}. \tag{3.9.65}$$

度规 (3.9.63) 和 (3.9.65) 在处理稳恒态宇宙模型时是有用的, 它们曾为 de Sitter 研究过.

3. 最大对称子空间

在许多情况下, 整个时空不是最大对称的, 但它可以分解为一些最大对称的子空间族. 设 N 维空间中有一些 M 维的最大对称子空间. 我们可以用 $(N-M)$ 个坐标记号 v^α 来标记这些子空间, 用 M 个坐标 u^i 标记每个子空间中的点.

定理 在上述 N 维空间中, 总可以选择 M 个 u^i 坐标, 使这个 N 维空间的度规具有形式

$$\mathrm{d}s^2 = g_{ab}(v)\mathrm{d}v^a\mathrm{d}v^b + f(v)\widetilde{g}_{ij}(u)\mathrm{d}u^i\mathrm{d}u^j. \tag{3.9.66}$$

式中 $\widetilde{g}_{ij}(u)$ 是 M 维最大对称空间的度规, $g_{ab}(v)$ 和 $f(v)$ 都只是 v 坐标的函数.

我们假设整个空间可以分解为一些每点各向同性的子空间. 这一假设在很多有物理意义的情况下都会满足. 这时在任一点 (v, u^0) 有 $\xi i(a) = 0$, 且有 $\xi_{i;j}$ 为任意反对称张量, $\xi^{(a)}$ 为整个 N 维空间的 Killing 矢量. 我们可以找到 $M(M-1)/2$ 个 Killing 矢量 $\xi^{(lm)}(u, v; u^0)$, 它们满足条件

$$\xi^{a(lm)}(u, v; u^0) = 0, \tag{3.9.67}$$

$$\xi^{i(lm)}(u, v; u^0) = -\xi^{i(ml)}(u, v; u^0), \tag{3.9.68}$$

$$\begin{aligned}\xi_{i;j}^{(lm)}(u^0, v; u^0) &\equiv g_{ij}(u^0, v)\left[\frac{\partial \xi^{k(lm)}(u, v; u^0)}{\partial u^j}\right]_{u=u^0}\\ &= \delta_i^l\delta_j^m - \delta_i^m\delta_j^l.\end{aligned} \tag{3.9.69}$$

又由 (I) 中的讨论可知, 整个空间的 Killing 矢量

$$\xi^{\mu(l)}(u, v; u^0) \equiv \frac{\partial}{\partial u^{0m}}\xi^{\mu(lm)}(u, v; u^0) \tag{3.9.70}$$

满足

$$\xi^{a(l)}(u, v; u^0) = 0 \tag{3.9.71}$$

和

$$\xi^{i(l)}(u, v; u^0) = -\frac{1}{N-1}\widetilde{g}^{il}(u^0, v). \tag{3.9.72}$$

Killing 矢量 $\xi^{\mu(lm)}$ 和 $\xi^{\mu(l)}$ 是独立的, 它们的总个数为 $M(M+1)/2$. 这就证明了上述 M 维空间是最大对称的.

在引力理论中, 最大子空间不是**时空**, 而是**空间**. 此时我们可以利用 (3.9.51)~(3.9.53) 来求出 $\widetilde{g}_{ij}\mathrm{d}u^i\mathrm{d}u^j$ 的形式. 这样, 考虑到 (3.9.66), 我们得到

$$\mathrm{d}s^2 = g_{ab}\mathrm{d}v^a\mathrm{d}v^b + f(v)\left[\mathrm{d}\boldsymbol{u}^2 + \frac{k(\boldsymbol{u}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{u})^2}{1-k\boldsymbol{u}^2}\right], \tag{3.9.73}$$

$$f(v) < 0, [f(v)\text{代替}\,|K|^{-1}f(v)]$$

$$k=\begin{cases}+1, & \text{当}M\text{空间的}K>0,\\ -1, & \text{当}M\text{空间的}K<0,\\ 0, & \text{当}M\text{空间的}K=0.\end{cases}\tag{3.9.74}$$

对于**球对称空间**, 设 $N=3, M=2$. 设 v 坐标为 r; u 坐标为 θ,ϕ. 定义

$$u^1=\sin\theta\cos\phi,\quad u^2=\sin\theta\sin\phi.\tag{3.9.75}$$

代入 (3.9.73), 取 $k=+1$, 得

$$\mathrm{d}s^2=g(r)\mathrm{d}r^2+f(r)(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2).\tag{3.9.76}$$

式中 $g(r)<0, f(r)<0$.

对于**球对称时空**, 设 $N=4$, 度规特征值为一正三负; $M=2$. 于是 v 坐标有 $(N-M)=2$ 个, 记为 r 和 t; u 坐标有 $M=2$ 个, 仍记为 θ 和 ϕ, u^1 和 u^2 的定义同 (3.9.75). 将它们代入 (3.9.73), 取 $k=+1$, 得到

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2=&g_{tt}(r,t)\mathrm{d}t^2+2g_{rt}(r,t)\mathrm{d}r\mathrm{d}t\\&+g_{rr}(r,t)\mathrm{d}r^2+f(r,t)(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2).\end{aligned}\tag{3.9.77}$$

式中 $f(r,t)<0$.

对于**均匀球对称时空**, 设 $N=4$, 其度规特征值为一正三负, $M=3$. 此时有一个 v 坐标和 3 个 u 坐标. 由 (3.9.73) 得

$$\mathrm{d}s^2=g(v)\mathrm{d}v^2+f(v)\left[\mathrm{d}\boldsymbol{u}^2+\frac{K(\boldsymbol{u}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{u})^2}{1-K\boldsymbol{u}^2}\right],\tag{3.9.78}$$

式中 $g(v)>0, f(v)<0$. 定义

$$\begin{aligned}t&\equiv\int\sqrt{g(v)}\mathrm{d}v,\\u^1&=r\sin\theta\cos\phi,\\u^2&=r\sin\theta\sin\phi,\\u^3&=r\cos\theta,\end{aligned}\tag{3.9.79}$$

则度规可写为

$$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}t^2-R^2(t)\left(\frac{\mathrm{d}r^2}{1-kr^2}+r^2\mathrm{d}\theta^2+r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2\right).\tag{3.9.80}$$

式中 $R^2(t)=-f(v)$.

度规 (3.9.80) 是著名的 Robertson-Walker 度规 (Robertson 1935, 1936; Walker 1936). 由于它描述的时空是均匀、各向同性的, 因此在宇宙学中有重要意义. 对于球对称恒星的引力场, 采用随动坐标系, 可以由爱因斯坦引力场方程的严格解给出度规 (3.9.80).

4. 稳恒引力场

下面讨论两种基本类型的、具有特殊对称性的引力场.

在引力场 $g_{\mu\nu}$ 中, 如果允许有一类时 Killing 矢量场 ξ^μ 存在, 即如果 Killing 方程

$$\xi_{\nu;\mu}+\xi_{\mu;\nu}=0,\quad \xi^\mu\xi_\mu>0 \tag{3.9.81}$$

的解存在, 则这一引力场称为**稳恒引力场**, 或者称时空 $g_{\mu\nu}$ 为**稳恒时空**. 现在说明这一定义的物理含义.

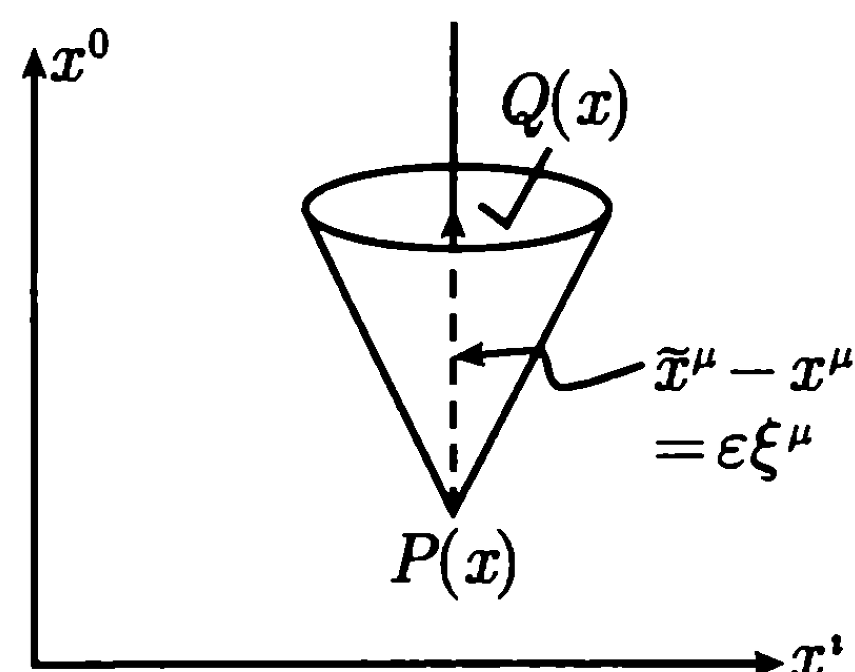


图 2-5

考虑矢量场 $\xi^\mu(x)$ 的一条无限短的世界线 PQ. 我们建立一个坐标系 x^μ, 使 x^0 轴的方程沿着 PQ(图 2-5). 沿着这条世界线 PQ 只有时间坐标发生变化, 而空间坐标 x^i 保持不变. 这是做得到的, 因为 ξ^μ 是类时 Killing 矢量. 我们还可以适当选择坐标轴上的长度单位, 使 $\xi^0=1$, 即

$$\xi^\mu=(1,0,0,0). \tag{3.9.82}$$

Killing 方程还可以写为

$$\xi^\alpha_{;\nu}g_{\alpha\mu}+\xi^\alpha_{;\mu}g_{\alpha\nu}=0,$$

即

$$\xi^\alpha_{,\nu}g_{\alpha\mu}+\xi^\alpha_{,\mu}g_{\alpha\nu}+(\Gamma^\alpha_{\nu\sigma}\xi^\sigma g_{\alpha\mu}+\Gamma^\alpha_{\mu\alpha}\xi^\sigma_{\alpha\nu})=0.$$

由 $g_{\mu r;\sigma}=0$ 知上式左端后一括号为 $\xi^\sigma g_{\mu\nu,\sigma}$, 从而有

$$\xi^\alpha g_{\mu\nu;\alpha}+g_{\mu\alpha}\xi^\alpha_{,\nu}+g_{\alpha\nu}\xi^\alpha_{,\mu}=0. \tag{3.9.83}$$

将 (3.9.82) 代入 (3.9.83), 得到

$$g_{\mu\nu,0}=0. \tag{3.9.84}$$

这样, 在我们所选定的坐标系中, **度规张量的所有分量均不含时间坐标**.

我们指出, 满足 (3.9.84) 的坐标系不止一个. 作变换

$$x'^0=x^0+f(x^i), \tag{3.9.85}$$

$$x'^i=x^i.$$

式中 $f(x^i)$ 为一任意形式的函数. 此时度规张量的变换式为

$$g'_{00}=g_{00},\quad g'_{0i}=g_{0i}-g_{00}\frac{\partial f}{\partial x^i},$$

$$g'_{ik}=g_{ik}-g_{0i}\frac{\partial f}{\partial x^k}-g_{0k}\frac{\partial f}{\partial x^i}+g_{00}\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^k}. \tag{3.9.86}$$

由此得到

$$\frac{\partial g'_{\mu\nu}}{\partial x'^0} = \frac{\partial g'_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^0} = \frac{\partial g'_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\delta_0^\alpha = \frac{\partial g'_{\mu\nu}}{\partial x^0}. \tag{3.9.87}$$

将 (3.9.86) 和 (3.9.84) 代入 (3.9.87), 得到

$$\frac{\partial g'_{\mu\nu}}{\partial x'^0} = 0. \tag{3.9.88}$$

变换 (3.9.85) 表明, 在时空中可以任意选择时间的起点, 即 x^0 可以附加一个任意常数.

但是当改变 x^0 的符号时, 所得到的两个方向对于稳恒引力场是不等效的, 这是由于 $g_{0i} \neq 0$ 的缘故, 如 Kerr 度规的情况. 当 $x^0 \to -x^0$ 时角速度的方向也要改变.

作为稳恒引力场的特殊情况, 当 Killing 矢量 ξ^μ 的世界线与超曲面族正交时, 这个稳态引力场称为**静态引力场**, 或称时空 $g_{\mu\nu}$ 为**静态时空**. 下面我们证明, 在静态引力场中一定存在一个坐标系, 使其中 $g_{0i} = 0$.

按定义, Killing 矢量 ξ^μ 和超曲面正交, 即

$$\xi^\mu(x) = \phi(x)\frac{\partial\psi(x)}{\partial x^\mu}. \tag{3.9.89}$$

式中 $\phi(x)$ 和 $\psi(x)$ 均为标量函数. 由此可得

$$\xi_{\tau,\nu} = \phi_{,\nu}\psi_{,\tau} + \phi\psi_{,\tau\nu}, \tag{3.9.90}$$

$$\xi_\mu\varepsilon_{\tau,\nu} = \phi\psi_{,\mu}(\phi_{,\nu}\psi_{,\tau} + \phi\psi_{,\tau\nu}). \tag{3.9.91}$$

由 (3.9.91) 可得

$$\xi_{[\mu}\xi_{\tau,\nu]} \equiv \xi_\mu\xi_{\tau,\nu} + \xi_\nu\xi_{\mu,\tau} + \xi_\tau\xi_{\nu,\mu} - \xi_\nu\xi_{\tau,\mu} - \xi_\mu\xi_{\nu,\tau} - \xi_\tau\xi_{\mu\nu} = 0. \tag{3.9.92}$$

上式中的偏导数可代之以协变导数

$$\xi_{[\mu}\xi_{\tau;\nu]} = 0, \tag{3.9.93}$$

因为其中含 $\Gamma^\tau_{\alpha\beta}$ 的项互相抵消了.

将 Killing 方程代入 (3.9.93), 得到

$$\xi_\mu\xi_{\tau;\nu} + \xi_\nu\xi_{\mu;\tau} + \xi_\tau\xi_{\nu;\mu} = 0. \tag{3.9.94}$$

将上式乘以 ξ^τ 缩并, 令 $\xi_\alpha\xi^\alpha \equiv \xi^2$, 得到

$$\xi_\mu\xi^\tau\xi_{\tau;\nu} - \xi_\nu\xi^\tau\xi_{\tau;\mu} + \xi^2\xi_{\nu;\mu} = 0 \tag{3.9.95}$$

和

$$\xi_\mu\xi_\tau\xi_{\tau;\nu} - \xi_\nu\xi_\tau\xi_{\tau;\mu} - \xi^2\xi_{\mu;\nu} = 0. \tag{3.9.96}$$

将 (3.9.95) 和 (3.9.96) 相加, 得到

$$(\xi_\mu\xi^2_{;\nu} - \xi_\nu\xi^2_{;\mu}) + \xi^2(\xi_{\nu;\mu} - \xi_{\mu;\nu}) = 0. \tag{3.9.97}$$

在上式中, 由于含 $\Gamma^\tau_{\alpha\beta}$ 项互相抵消, 所以可将协变导数写为偏导数形式

$$(\xi_\mu\xi^2_{,\nu} - \xi_\nu\xi^2_{,\mu}) + \xi^2(\xi_{\nu,\mu} - \xi_{\mu,\nu}) = 0. \tag{3.9.98}$$

此式又可写成

$$\left(\frac{\xi_\nu}{\xi^2}\right)_{,\mu} - \left(\frac{\xi_\mu}{\xi^2}\right)_{,\nu} = 0. \tag{3.9.99}$$

此方程的解为

$$\frac{\xi_\mu}{\xi^2} = \frac{\partial\psi(x)}{\partial x^\mu}. \tag{3.9.100}$$

式中 $\psi(x)$ 为标量函数.

比较 (3.9.100) 和 (3.9.89), 得 $\phi(x) = \xi^2(x)$. 选择一坐标系, 使 $\xi^\alpha = \delta^\alpha_0$, 则 (3.9.100) 给出

$$\xi_\mu = \xi^2\psi_{,\mu} = g_{\mu\nu}\xi^\nu = g_{\mu 0}. \tag{3.9.101}$$

又因为

$$\xi^2 = g_{\mu\nu}\delta^\mu_0\delta^\nu_0 = g_{00}, \tag{3.9.102}$$

故有

$$g_{\mu 0} = g_{00}\psi_{,\mu}. \tag{3.9.103}$$

在上式中代入 $\mu = 0$, 得到

$$\begin{aligned} &\psi_{,0} = 1, \\ &\psi(x) = x^0 + f(x^i). \end{aligned} \tag{3.9.104}$$

选择一个坐标系 x'^μ, 使得

$$x'^o = x^0 + f(x^i), \quad x'^k = x^k, \tag{3.9.105}$$

则有

$$g'_{0k} = g_{0k} - g_{00}f_{,k}. \tag{3.9.106}$$

将 (3.9.104) 代入得

$$g'_{0k} = g_{0k} - g_{00}\psi_{,k}, \tag{3.9.107}$$

由 (3.9.103) 知

$$g'_{0k} = 0. \tag{3.9.108}$$

我们证明了, 在静态引力场中, 一定存在一个坐标系, 在其中, 引力场同时满足稳恒条件和时轴正交条件:

$$g_{\mu\nu,0} = 0, \quad g_{i0} = 0. \tag{3.9.109}$$

3.10 引力场方程的正交标架形式

对于时空中同一点, 可以引入一局部惯性系 X^μ 和一任意坐标系 x^μ. 其线元分别表示为

$$\mathrm{d}s^2 = \eta_{\mu\nu}\mathrm{d}X^\mu\mathrm{d}X^\nu \tag{3.10.1}$$

和

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu. \tag{3.10.2}$$

平直时空度规 $\eta_{\mu\nu}$ 和任意坐标的度规 $g_{\mu\nu}$ 之间有关系式

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial X^\beta}{\partial x^\nu}\eta_{\alpha\beta}. \tag{3.10.3}$$

令

$$h^\alpha_\mu \equiv \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\mu}, \quad h^\beta_\nu \equiv \frac{\partial X^\beta}{\partial x^\nu}, \tag{3.10.4}$$

则有

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta}h^\alpha_\mu h^\beta_\nu = h_{\beta\mu}h^\beta_\nu. \tag{3.10.5}$$

式中 $h_{\beta\mu} \equiv \eta_{\alpha\beta}h^\alpha_\mu \cdot h^\alpha_\mu$ 的指标由 $\eta_{\alpha\beta}$ 或 $\eta^{\alpha\beta}$ 进行下移或上移. 此时线元可写为

$$\mathrm{d}s^2 = h_{\beta\mu}h^\beta_\nu\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu, \tag{3.10.6}$$

此即标架表象. 脚标 α, β, γ 称为 Lorentz 脚标; 它们的上移和下移由 $\eta_{\alpha\beta}$ 和 $\eta^{\alpha\beta}$ 进行. 脚标 μ, ν, τ 等为协变脚标, 它们的上移和下移仍由 $g_{\mu\nu}$ 和 $g^{\mu\nu}$ 进行.

由 (3.10.5) 可以得到行列式 $|h_{\alpha\mu}|$ 和 g 之间的关系

$$\begin{aligned} g = |g_{\mu\nu}| &= |\eta^{\beta\alpha}| \cdot |h_{\alpha\mu}| \cdot |h_{\beta\nu}| \\ &= -|h_{\alpha\mu}|^2, \end{aligned}$$

或者

$$|h_{\alpha\mu}| = \sqrt{-g}. \tag{3.10.7}$$

按定义, $h_\alpha^\mu \equiv g^{\mu\nu}h_{\alpha\nu}$, 由此可得

$$h_\mu^\alpha h_\alpha^\nu = \delta_\mu^\nu. \tag{3.10.8}$$

又由

$$g^{\mu\sigma} = \frac{A^{\mu\sigma}}{g} = \frac{A^{\mu\alpha}A_\alpha^\sigma}{h^2}, \quad h \equiv |h_{\alpha\mu}|. \tag{3.10.9}$$

式中 $A^{\mu\alpha}$ 和 A_α^σ 分别表示行列式 $|h_{\alpha\mu}|$ 中元素 $h_{\mu\alpha}$ 和 $h_{\alpha\sigma}$ 的代数余子式. 我们有

$$h^{\mu\alpha} = g^{\mu\sigma}h_\sigma^\alpha = \frac{A^{\mu\beta}A_\beta^\sigma}{h^2}h_\sigma^\alpha. \tag{3.10.10}$$

而

$$h^{\mu\alpha} = \frac{A^{\mu\alpha}}{h}, \tag{3.10.11}$$

所以有

$$\frac{A_\beta^\sigma}{h}h_\sigma^\alpha = \delta_\beta^\alpha, \tag{3.10.12}$$

即

$$h_\mu^\alpha h_\beta^\mu = \delta_\beta^\alpha. \tag{3.10.13}$$

式 (3.10.13) 和 (3.10.8) 表明,h_μ^α 无论对于协变脚标还是对于 Lorentz 脚标, 都是正交归一的, 故称**正交标架**.

考虑标架空间的一个仿射正交变换

$$\begin{aligned} &h'_{\alpha\mu} = \lambda_\alpha^\beta h_{\beta\mu}, \\ &\lambda_\alpha^\beta \lambda_\beta^\nu = \delta_\alpha^\nu. \end{aligned} \tag{3.10.14}$$

此时度规张量的变换式为

$$\begin{aligned} g'_{\mu\nu} &= h'_{\alpha\mu}h'^\alpha_\nu = \lambda_\alpha^\beta\lambda_\tau^\alpha h_{\beta\mu}h_\nu^\tau \\ &= \delta_\tau^\beta h_{\beta\mu}h_\nu^\tau = h_{\tau\mu}h_\nu^\tau = g_{\mu\nu}. \end{aligned} \tag{3.10.15a}$$

此式表明, **对于标架空间的仿射正交变换, $g_{\mu\nu}$是一个不变量**.

设标架不动, 坐标变换 $x^\mu \to x'^\mu$, 此时有

$$h'^\alpha_\mu = \frac{\partial X^\alpha}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\nu}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}h_\nu^\alpha. \tag{3.10.15b}$$

这就是说, **$h_{\alpha\mu}$在坐标空间中是一协变矢量**.

现在我们给出曲率张量的正交标架形式. 和在坐标空间的情况类似, 由 $h_{\alpha\mu}$ 的协变导数不可对易便可给出曲率张量的表达式. 我们定义 $R_{\tau\mu\nu}^\lambda$

$$h_{\alpha\tau;\mu\nu} - h_{\alpha\tau;\nu\mu} = R_{\tau\mu\nu}^\lambda h_{\alpha\lambda}, \tag{3.10.16}$$

即

$$R^{\lambda}_{\tau\mu\nu} = h^{\alpha\lambda}(h_{\alpha\tau;\mu\nu} - h_{\alpha\tau;\nu\mu}). \tag{3.10.17}$$

由 $g^{\mu\nu}_{,\lambda} = 0$ 可得

$$h^{\mu}_{\alpha;\lambda}h^{\alpha;\nu} + h^{\mu}_{\alpha}h^{\alpha\nu}_{;\lambda} = 0.$$

从而有

$$\begin{aligned}(h^{\nu}_{\alpha}h^{\alpha\mu}_{;\lambda})_{;\nu} &= h^{\nu}_{\alpha;\nu}h^{\alpha\mu}_{;\lambda} + h^{\nu}_{\alpha}h^{\alpha\mu}_{;\lambda\nu}\\ &= -(h^{\mu}_{\alpha;\nu}h^{\alpha\nu}_{;\lambda} + h^{\mu}_{\alpha}h^{\alpha\nu}_{;\lambda\nu}),\end{aligned} \tag{3.10.18}$$

或者写成

$$h^{\nu}_{\alpha}h^{\alpha\mu}_{;\lambda\nu} = -(h^{\nu}_{\alpha;\nu}h^{\alpha\mu}_{;\lambda} + h^{\mu}_{\alpha\nu;}h^{\alpha\nu}_{;\lambda} + h^{\mu}_{\alpha}h^{\nu\alpha}_{;\lambda\nu}). \tag{3.10.19}$$

由 (3.10.19) 和 (3.10.17), 得到

$$\begin{aligned}R^{\mu}_{\lambda} &= h^{\alpha\nu}(h^{\mu}_{\alpha;\nu\lambda} - h^{\mu}_{\alpha;\lambda\nu})\\ &= h^{\alpha\nu}_{;\nu}h^{\mu}_{\alpha;\lambda} + h^{\alpha\mu}_{;\nu}h^{\nu}_{\alpha;\lambda} + h^{\alpha\mu}h^{\nu}_{\alpha;\lambda\nu} + h^{\alpha\nu}h^{\mu}_{\alpha;\nu\lambda}.\end{aligned} \tag{3.10.20a}$$

再缩并得

$$R = h^{\alpha\nu}_{;\nu}h^{\mu}_{\alpha;\mu} + h^{\alpha\nu}_{;\mu}h^{\mu}_{\alpha;\nu} + 2h^{\alpha\nu}h^{\mu}_{\alpha;\nu\mu}. \tag{3.10.20b}$$

由上式可见, 无论在坐标空间还是在标架空间, R 都是标量.

下面我们给出引力场方程的正交标架形式. 引力场的拉格朗日 $L = L(g_{\mu\nu}, g_{\mu\nu,\lambda})$, 而

$$g_{\mu\nu} = h^{\alpha}_{\mu}h_{\alpha\nu}.$$

现在对标架进行变分:

$$\begin{aligned}\delta g_{\mu\nu} &= h^{\alpha}_{\mu}\delta h_{\alpha\nu} + (\delta h^{\alpha}_{\mu})h_{\alpha\nu}\\ &= h^{\alpha}_{\mu}\delta h_{\alpha\nu} + h^{\alpha}_{\nu}\delta h_{\alpha\mu}\\ &= h^{\alpha}_{\mu}\delta(g_{\rho\nu}h^{\rho}_{\alpha}) + h^{\alpha}_{\nu}\delta(g_{\rho\mu}h^{\rho}_{\alpha})\\ &= 2\delta g_{\mu\nu} + (h^{\alpha}_{\mu}g_{\rho\nu} + h^{\alpha}_{\nu}g_{\rho\mu})h^{\rho}_{\alpha},\end{aligned} \tag{3.10.21}$$

即

$$\delta g_{\mu\nu} = -(h^{\alpha}_{\mu}g_{\rho\nu} + h^{\alpha}_{\tau}g_{\rho\mu})\delta h^{\rho}_{\alpha}. \tag{3.10.22}$$

将上式代入 (3.4.13), 得到

$$\delta I_g = \int\sqrt{-g}(R^{\mu}_{\rho} - \frac{1}{2}\delta^{\mu}_{\rho}R)h^{\alpha}_{\mu}\delta h^{\rho}_{\alpha}\mathrm{d}^4x. \tag{3.10.23}$$

此时 (3.4.21) 和 (3.4.22) 为

$$\delta I_f = -k\int\sqrt{-g}T^{\mu}_{\rho}h^{\alpha}_{\mu}\delta h^{\rho}_{\alpha}\mathrm{d}^4x. \tag{3.10.24}$$

将 (3.10.23) 和 (3.10.24) 代入 $\delta(I_g+I_f)=0$, 得到

$$(R^{\mu}_{\rho}-\frac{1}{2}\delta^{\mu}_{\rho}R)h^{\alpha}_{\mu}=kT^{\mu}_{\rho}h^{\alpha}_{\mu}, \tag{3.10.25}$$

即

$$R^{\alpha}_{\rho}-\frac{1}{2}Rh^{\alpha}_{\rho}=kT^{\alpha}_{\rho}. \tag{3.10.26}$$

此即正交标架形式的 Einstein 引力场方程. 两端乘以 $h_{\alpha\lambda}$ 便得到坐标形式的场方程.

3.11 引力场方程的零标架形式

Einstein 引力场方程除了通常的张量形式外, 还常以其他形式给出, 其中一种很有用的形式是 Newman 和 Penrose 给出的零标架形式, 常称为 Newman-Penrose 方程.

1. 零标架

在四维时空中每一点, 引入一组矢量 l_μ, n_μ, m_m 和 $\bar{m}_\mu$ 构成一标架. 其中 l_μ 和 n_μ 为实的零矢量, m_μ 和 $\bar{m}_\mu$ 为一对复的零矢量. m_μ 由两个实的正交矢量 a_μ 和 b_μ 构成

$$m_\mu=\frac{1}{\sqrt{2}}(a_\mu-\mathrm{i}b_\mu). \tag{3.11.1}$$

标架 $(l_\mu, n_\mu, m_\mu, \bar{m}_\mu,)$ 满足准正交条件

$$\begin{aligned}
&l_\mu m^\mu=n_\mu m^\mu=l_\mu\bar{m}^\mu=n_\mu\bar{m}^\mu=0,\\
&l_\mu l^\mu=n_\mu n^\mu=m_\mu m^\mu=\bar{m}_\mu\bar{m}^\mu=0,\\
&l_\mu n^\mu=-m_\mu\bar{m}^\mu=1.
\end{aligned} \tag{3.11.2}$$

引入零标架符号

$$Z_{m\mu}=(l_\mu, n_\mu, m_\mu, \bar{m}_\mu), \quad m=1,2,3,4. \tag{3.11.3}$$

零标架指标 m 的升降由平直时空度规 η^{mn} 进行, η^{mn} 的形式为

$$\eta^{mn}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&-1&0\end{pmatrix}=\eta_{mn}. \tag{3.11.4}$$

度规张量 $g_{\mu\nu}$ 可表示为

$$g_{\mu\nu} = Z_{m\mu}Z_{n\nu}\eta^{mn} = l_\mu n_\nu + n_\mu l_\nu - m_\mu \bar{m}_\nu - \bar{m}_\mu n_\nu, \tag{3.11.5}$$

$$\eta_{mn} = Z_{m\mu}Z_{n\nu}g^{\mu\nu}. \tag{3.11.6}$$

2. 旋系数

由这一标架可以定义复的 Ricci 旋系数 γ^{mnp}

$$\gamma^{mnp} = Z^m_{\mu;\nu}Z^{n\mu}Z^{p\nu}. \tag{3.11.7}$$

γ^{mnp} 具有反对称性

$$\gamma^{mnp} = -\gamma^{nmp}. \tag{3.11.8}$$

12 个旋系数表示为

$$\kappa = \gamma_{131} = l_{\mu;\nu}m^\mu l^\nu, \tag{3.11.9a}$$

$$\rho = \gamma_{134} = l_{\mu;\nu}m^\mu \bar{m}^\nu, \tag{3.11.9b}$$

$$\sigma = \gamma_{133} = l_{\mu;\nu}m^\mu m^\nu, \tag{3.11.9c}$$

$$\tau = \gamma_{132} = l_{\mu;\nu}m^\mu n^\nu, \tag{3.11.9b}$$

$$\nu = -\gamma_{242} = -n_{\mu;\nu}\bar{m}^\mu n^\nu, \tag{3.11.9e}$$

$$\mu = -\gamma_{243} = -n_{\mu;\nu}\bar{m}^\mu m^\nu, \tag{3.11.9f}$$

$$\lambda = -\gamma_{244} = -n_{\mu;\nu}\bar{m}^\mu \bar{m}\nu, \tag{3.11.9g}$$

$$\pi = -\gamma_{241} = -n_{\mu;\nu}\bar{m}^\mu l^\nu, \tag{3.11.9h}$$

$$\alpha = \frac{1}{2}(\gamma_{124} - \gamma_{344}) = \frac{1}{2}(l_{\mu;\nu}n^\mu \bar{m}^\nu - m_{\mu;\nu}\bar{m}^\mu \bar{m}^\nu), \tag{3.11.9i}$$

$$\beta = \frac{1}{2}(\gamma_{123} - \gamma_{343}) = \frac{1}{2}(l_{\mu;\nu}n^\mu m^\nu - m_{\mu;\nu}\bar{m}^\mu m^\nu), \tag{3.11.9j}$$

$$\gamma = \frac{1}{2}(\gamma_{122} - \gamma_{342}) = \frac{1}{2}(l_{\mu;\nu}n^\mu n^\nu - m_{\mu;\nu}\bar{m}^\mu n^\nu), \tag{3.11.9k}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\gamma_{121} - \gamma_{341}) = \frac{1}{2}(l_{\mu;\nu}n^\mu l^\nu - m_{\mu;\nu}\bar{m}^\mu l^\nu), \tag{3.11.9l}$$

3. 张量和方向导数

任一张量 $T_{\mu\nu\cdots}$ 的标架分量定义为

$$T_{mn\cdots} = T_{\mu\nu\cdots}Z^\mu_m Z^\nu_n \cdots. \tag{3.11.10}$$

在坐标空间中 Weyl 张量表示为

$$
\begin{aligned}
C_{\rho\sigma\mu\nu} =& R_{\rho\sigma\mu\nu} - \frac{1}{2}(g_{\rho\mu}R_{\sigma\nu} - g_{\rho\nu}R_{\sigma\mu} - g_{\sigma\mu}R_{\rho\nu} + g_{\sigma\nu}R_{\rho\mu}) \\
& - \frac{1}{6}(g_{\rho\nu}g_{\sigma\mu} - g_{\rho\mu}g_{\sigma\nu})R.
\end{aligned}
$$

在零标架中具有形式

$$
\begin{aligned}
C_{mnpq} =& R_{mnpq} - \frac{1}{2}(\eta_{mp}R_{nq} - \eta_{mq}R_{np} - \eta_{np}R_{mq} + \eta_{nq}R_{mp}) \\
& - \frac{1}{6}(\eta_{mq}\eta_{np} - \eta_{mp}\eta_{nq}).
\end{aligned} \tag{3.11.11}
$$

利用 Weyl 张量的无迹性和恒等式

$$
\begin{aligned}
&\eta^{mn}C_{mpqn} = C_{1pq2} + C_{2pq1} - C_{3pq4} - C_{4pq3} = 0, \\
&C_{1234} + C_{1423} + C_{1342} = 0,
\end{aligned}
$$

我们得到

$$
\begin{aligned}
&C_{1314} = C_{1413} = C_{2324} = C_{2423} = C_{1323} = C_{1424} = 0, \\
&C_{1313} = \bar{C}_{1414}, \quad C_{1213} = C_{1343} = \bar{C}_{1434} = \bar{C}_{1214}, \\
&C_{1242} = C_{2434} = \bar{C}_{1232} = \bar{C}_{2343}, \quad C_{2424} = C_{2323}, \\
&C_{1342} = \frac{1}{2}(C_{1212} - C_{1234}) = \frac{1}{2}(C_{3434} - C_{1234}).
\end{aligned}
$$

Weyl 张量的 5 个独立分量可写为

$$
\Psi_0 = -C_{1313} = -C_{\mu\nu\tau\lambda}l^{\mu}m^{\nu}l^{\tau}m^{\lambda}, \tag{3.11.11a}
$$

$$
\Psi_1 = -C_{1213} = -C_{\mu\nu\tau\lambda}l^{\mu}n^{\nu}m^{\nu}m^{\lambda}, \tag{3.11.11b}
$$

$$
\Psi_2 = -\frac{1}{2}(C_{1212} - C_{1234}) = -\frac{1}{2}C_{\mu\nu\tau\lambda}l^{\mu}n^{\nu}(l^{\tau}n^{\lambda} - m^{\tau}\bar{m}^{\lambda}), \tag{3.11.11c}
$$

$$
\Psi_3 = -C_{1242} = -C_{\mu\nu\tau\lambda}\bar{m}^{\mu}n^{\nu}l^{\tau}n^{\lambda}, \tag{3.11.11d}
$$

$$
\Psi_4 = -C_{2424} = -C_{\mu\nu\tau\lambda}\bar{m}^{\mu}n^{\nu}\bar{m}^{\tau}n^{\lambda}, \tag{3.11.11e}
$$

Ricci 张量的 6 个独立分量为

$$
\Phi_{00} = -\frac{1}{2}R_{11} = \overline{\Phi}_{00}, \tag{3.11.12a}
$$

$$
\Phi_{11} = -\frac{1}{4}(R_{12} + R_{34}), \tag{3.11.12b}
$$

$$
\Phi_{01} = -\frac{1}{2}R_{13} = \overline{\Phi}_{10}, \tag{3.11.12c}
$$

$$\Phi_{12} = -\frac{1}{2}R_{23}, \tag{3.11.12d}$$

$$\Phi_{10} = -\frac{1}{2}R_{14} = \overline{\Phi}_{01}, \tag{3.11.12e}$$

$$\Phi_{21} = -\frac{1}{2}R_{24}, \tag{3.11.12f}$$

$$\Phi_{02} = -\frac{1}{2}R_{33} = \overline{\Phi}_{20}, \tag{3.11.12g}$$

$$\Phi_{22} = -\frac{1}{2}R_{22}, \tag{3.11.12h}$$

$$\Phi_{20} = -\frac{1}{2}R_{44}, \tag{3.11.12i}$$

标曲率为

$$\Lambda = \frac{R}{24}. \tag{3.11.12j}$$

任意标量的方向导数定义为

$$\mathrm{D}\phi = \phi_{;\mu}l^{\mu} = \phi_{,\mu}l^{\mu}, \tag{3.11.13a}$$

$$\Delta\phi = \phi_{;\mu}n^{\mu} = \phi_{,\mu}n^{\mu}, \tag{3.11.13b}$$

$$\delta\phi = \phi_{;\mu}m^{\mu} = \phi_{,\mu}m^{\mu}, \tag{3.11.13c}$$

$$\bar{\delta}\phi = \phi_{;\mu}\bar{m}^{\mu} = \phi_{,\mu}\bar{m}^{\mu}, \tag{3.11.13d}$$

或者写为

$$\mathrm{D} = l^{\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}, \quad \Delta = n^{\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}},$$
$$\delta = m^{\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}, \quad \bar{\delta} = \bar{m}^{\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}. \tag{3.11.13}$$

4. Newman-Penrose 方程

应用前面定义的符号, 可以把 Einstein 引力场方程写成零标架形式, 这就是 Newman-Penrose 方程. 这是一组一阶偏微分方程, 含有 5 个 Weyl 张量的标架分量, 6 个独立的 Einstein 张量分量, 标曲率 Λ 和 12 个复的旋系数.

Newman-Penrose 方程分为三组: 对易关系, Ricci 恒等式和 Bianchi 恒等式.

1) 对易关系

按定义有

$$\phi^{;m} = \phi_{;\mu}Z^{m\mu}, \tag{3.11.14}$$

于是可以得到 $\phi^{;m;n}$ 和 $\phi^{;n;m}$ 的表达式

$$\phi^{;m;n} = (\phi_{;\mu}Z^{m\mu})_{;\nu}Z^{n\nu} = \phi_{;\mu\nu}Z^{m\mu}Z^{n\tau} + \phi^{;l}\gamma_{l}^{\ mn}, \tag{3.11.15}$$

$$\phi^{;n;m} = (\phi_{;\nu} Z^{n\nu})_{;\mu} Z^{m\mu} = \phi_{;\nu\mu} Z^{m\mu} Z^{n\nu} + \phi^{;l} \gamma_l^{\ nm}.$$

由上式得

$$\phi^{;m;n} - \phi^{;n;m} = \phi^{;l}(\gamma_l^{\ mn} - \gamma_l^{\ nm}). \tag{3.11.16}$$

在此式中取 $(m, n) = (1, 2), (2, 4), (1, 4), (3, 4)$, 得到

$$(\Delta \mathrm{D} - \mathrm{D}\Delta)\phi = [(\gamma + \bar{\gamma})\mathrm{D} + (\varepsilon + \bar{\varepsilon})\Delta - (\tau + \bar{\pi})\delta - (\bar{\tau} + \pi)\bar{\delta}]\phi, \tag{3.11.17a}$$

$$(\delta \mathrm{D} - \mathrm{D}\delta)\phi = [(\bar{\alpha} + \beta - \bar{\pi})\mathrm{D} + \kappa\Delta - \sigma\bar{\delta} - (\bar{\rho} + \varepsilon - \bar{\varepsilon})\delta]\phi, \tag{3.11.17b}$$

$$(\delta\Delta - \Delta\delta)\phi = [-\bar{\nu}\mathrm{D} + (\tau - \bar{\alpha} - \beta)\Delta + \bar{\lambda}\,\bar{\delta} + (\mu - \gamma + \bar{\gamma})\delta]\phi, \tag{3.11.17c}$$

$$(\bar{\delta}\delta - \delta\bar{\delta})\phi = [(\bar{\mu} - \mu)\mathrm{D} + (\bar{\rho} - \rho)\Delta - (\bar{\alpha} - \beta)\bar{\delta} - (\bar{\beta} - \alpha)\delta]\phi. \tag{3.11.17d}$$

2) Ricci 恒等式和旋系数方程

根据 Ricci 恒等式

$$Z_{m\mu;[\nu\rho]} = \frac{1}{2} Z_{m\sigma} R^{\sigma}_{\ \nu\mu\rho}, \tag{3.11.18}$$

可得 Riemann 张量的标架形式

$$\begin{aligned} R^{mnpq} =& \gamma^{mnp;q} - \gamma^{mnq;p} + \gamma_l^{\ mq}\gamma^{lnp} - \gamma_l^{\ mp}\gamma^{lnq} \\ &+ \gamma^{mnl}(\gamma_l^{\ pq} - \gamma_l^{\ qp}). \end{aligned} \tag{3.11.19}$$

将 (3.11.11) 代入上式, 得到

$$\begin{aligned} &\gamma_{mn[p;q]} + \gamma_{lmq}\gamma^l_{\ np} - \gamma_{lmp}\gamma^l_{\ nq} + \gamma^l_{\ mn}(\gamma_{lpq} - \gamma_{lqp}) \\ =& C_{mnpq} - \frac{1}{2}(\eta_{mp}R_{nq} - \eta_{mq}R_{np} + \eta_{nq}R_{mp} - \eta_{np}R_{mq}) \\ &- \frac{1}{6}R(\eta_{mq}\eta_{np} - \eta_{mp}\eta_{nq}). \end{aligned} \tag{3.11.20}$$

在上式中取

(m, n, p, q) = (1, 3, 4, 1), (1, 3, 3, 1), (1, 3, 2, 1), [(1, 2, 4, 1)−(3, 4, 4, 1)], [(1, 2, 3, 1,)−(3, 4, 3, 1)], [(1, 2, 2, 1)−(3, 4, 2, 1)], (2, 4, 4, 1), (2, 4, 3, 1), (2, 4, 2, 1), (2, 4, 4, 2), (1, 3, 4, 3), [(1, 2, 4, 3)−(3, 4, 4, 3)], (2, 4, 4, 3),(2, 4, 2, 3,), [(1, 2, 2, 3)−(3, 4, 2, 3)], (1, 3, 2, 3), (1, 3, 4, 2), [(1, 2, 4, 2)−(3, 4, 4, 2)],

注意到旋系数、Weyl 张量和 Ricci 张量的标架表达式, 我们得到下面一组方程:

$$\mathrm{D}\rho - \bar{\delta}\kappa = (\rho^2 + \sigma\bar{\sigma}) + (\varepsilon + \bar{\varepsilon})\rho - \bar{\kappa}\tau - \kappa(3\alpha + \bar{\beta} - \pi) + \Phi_{00}, \tag{3.11.21a}$$

$$\mathrm{D}\sigma - \delta\kappa = (\rho + \bar{\rho})\sigma + (3\varepsilon - \bar{\varepsilon})\sigma - (\tau - \bar{\pi} + \bar{\alpha} + 3\beta)\kappa + \Psi_0, \tag{3.11.21b}$$

$$\mathrm{D}\tau - \Delta\kappa = (\tau + \bar{\pi})\rho + (\bar{\tau} + \pi)\sigma + (\varepsilon - \bar{\varepsilon})\tau - (3\gamma + \bar{\gamma})\kappa + \Psi_1 + \Phi_{01}, \tag{3.11.21c}$$

$$D\alpha-\bar{\delta}\varepsilon=(\rho+\bar{\varepsilon}-2\varepsilon)\alpha+\beta\bar{\sigma}-\bar{\beta}\varepsilon-\kappa\lambda-\bar{\kappa}\gamma+(\varepsilon+\rho)\pi+\Phi_{10}, \quad (3.11.21d)$$

$$D\beta-\delta\varepsilon=(\alpha+\pi)\sigma+(\bar{\rho}-\bar{\varepsilon})\beta-(\mu+\gamma)\kappa-(\bar{\alpha}-\bar{\pi})\varepsilon+\Psi_1, \quad (3.11.21e)$$

$$D\gamma-\Delta\varepsilon=(\tau+\bar{\pi})\alpha+(\bar{\tau}+\pi)\beta-(\varepsilon+\bar{\varepsilon})\gamma-(\gamma+\bar{\gamma})\varepsilon+\tau\pi-\nu\kappa+\Psi_2-\Lambda+\Phi_{11}, \quad (3.11.21f)$$

$$D\lambda-\bar{\delta}\pi=(\rho\lambda+\bar{\sigma}\mu)+\pi^2+(\alpha-\bar{\beta})\pi-\nu\bar{\kappa}-(3\varepsilon-\bar{\varepsilon})\lambda+\Phi_{20}, \quad (3.11.21g)$$

$$D\mu-\delta\pi=(\bar{\rho}\nu+\sigma\lambda)+\pi\bar{\pi}-(\varepsilon+\bar{\varepsilon})\mu-\pi(\bar{\alpha}-\beta)-\nu\kappa+\Psi_2+2\Lambda, \quad (3.11.21h)$$

$$D\nu-\Delta\pi=(\pi+\bar{\tau})\mu+(\bar{\pi}+\tau)\lambda+(\gamma-\bar{\gamma})\pi-(3\varepsilon+\bar{\varepsilon})\nu+\Psi_3+\Phi_{21}, \quad (3.11.21i)$$

$$D\lambda-\bar{\delta}\nu=-(\mu+\bar{\mu})\lambda-(3\gamma-\bar{\gamma})\lambda+(3\alpha+\bar{\beta}+\pi-\bar{\tau})\nu-\Psi_4, \quad (3.11.21j)$$

$$\delta\rho-\bar{\delta}\sigma=\rho(\bar{\alpha}+\beta)-\sigma(3\alpha-\bar{\beta})+(\rho-\bar{\rho})\tau+(\mu-\bar{\mu})\kappa-\Psi_1+\Phi_{10}, \quad (3.11.21k)$$

$$\delta\alpha-\bar{\delta}\beta=(\mu\rho-\lambda\sigma)+\alpha\bar{\alpha}+\beta\bar{\beta}-2\alpha\beta+\gamma(\rho-\bar{\rho})+\varepsilon(\mu-\bar{\mu})-\Psi_2+\Lambda+\Phi_{11}, \quad (3.11.21l)$$

$$\delta\lambda-\bar{\delta}\mu=(\rho-\bar{\rho})\nu+(\mu-\bar{\mu})\pi+\mu(\alpha+\bar{\beta})+\lambda(\bar{\alpha}-3\beta)-\Psi_3+\Phi_{21}, \quad (3.11.21m)$$

$$\delta\nu-\Delta\mu=(\mu^2+\lambda\bar{\lambda})+(\gamma+\bar{\gamma})\mu+\bar{\nu}\pi+(\tau-3\beta-\bar{\alpha})\nu+\Phi_{22}, \quad (3.11.21n)$$

$$\delta\gamma-\Delta\beta=(\tau-\bar{\alpha}-\beta)\gamma+\mu\tau-\sigma\nu-\varepsilon\bar{\nu}-\beta(\gamma-\bar{\gamma}-\mu)+\alpha\bar{\lambda}+\Phi_{12}, \quad (3.11.21o)$$

$$\delta\tau-\Delta\sigma=(\mu\sigma+\bar{\lambda}\rho)+(\tau+\beta-\bar{\alpha})\tau-(3\gamma-\bar{\gamma})\sigma-\kappa\bar{\nu}+\Phi_{02}, \quad (3.11.21p)$$

$$\Delta\rho-\bar{\delta}\tau=-(\rho\bar{\mu}+\sigma\lambda)+(\bar{\beta}-\alpha-\bar{\tau})\tau+(\gamma+\bar{\gamma})\rho+\nu\kappa-\Psi_2-2\Lambda, \quad (3.11.21q)$$

$$\Delta\alpha-\bar{\delta}\gamma=(\rho+\varepsilon)\nu-(\tau+\beta)\lambda+(\bar{\gamma}-\bar{\mu})\alpha+(\bar{\beta}-\bar{\tau})\gamma-\Psi_3. \quad (3.11.21r)$$

3) Bianchi 恒等式

Bianchi 恒等式 $R_{\mu\nu\{\tau\lambda;\sigma\}}=0$ 在零标架中具有形式

$$R_{mn\{pq;r\}}-(\gamma^l_{mr}R_{pqln}+\gamma^1_{mp}R_{qrln}+\gamma^l_{mq}R_{rpln}-\gamma^l_{nr}R_{pqlm}$$
$$-\gamma^l_{np}R_{qrlm}-\gamma^l_{nq}R_{rplm}+2R_{mnlp}\gamma^l_{rq}+2R_{mnlr}\gamma^l_{qp}+2R_{mnlq}\gamma^l_{pr})=0. \quad (3.11.22)$$

在上式中, 取

(m,n,p,q,r)=(1, 3, 1, 3, 4), (1, 3, 4, 2, 1), (1, 3, 1, 3, 2), [(2, 1, 1, 3, 2)−(2, 3, 1, 3, 4)], [(1, 2, 2, 4, 1)−(1, 4, 2, 4, 3)], (2, 4, 3, 1, 2), (2, 4, 2, 4, 1), (2, 4, 2, 4, 3), {[(4, 3, 1, 3, 4)+(1, 2, 3, 4, 1)]+2(1, 3, 4, 2, 1)}, {[(2, 1, 1, 3, 2)−(2, 3, 1, 3, 4)]−(1, 3, 4, 2, 3)}, {[(3, 4, 2, 4, 3)+(2, 1, 4, 3, 2)]+(2, 4, 3, 1, 2)},

注意 Riemann 张量的标架表达式, 我们得到下面一组方程:

$$\bar{\delta}\Psi_0-D\Psi_1+D\Phi_{01}-\delta\Phi_{00}=(4\alpha-\pi)\Psi_0-2(2\rho+\varepsilon)\Psi_1+3\kappa\Psi_2+(\bar{\pi}-2\bar{\alpha}-2\beta)\Phi_{00}$$
$$+2(\varepsilon+\bar{\rho})\Phi_{01}+2\sigma\Phi_{10}-2\kappa\Phi_{11}-\bar{\kappa}\Phi_{02}, \quad (3.11.23a)$$

$$\Delta\Psi_0-\delta\Psi_1+D\Phi_{02}-\delta\Phi_{01}=(4\gamma-\mu)\Psi_0-2(2\tau+\beta)\Psi_1+3\sigma\Psi_2-\bar{\lambda}\Phi_{00}+2(\bar{\pi}-\beta)\Phi_{01}$$
$$+2\sigma\Phi_{11}+(2\varepsilon-2\bar{\varepsilon}+\bar{\rho})\Phi_{02}-2\kappa\Phi_{12}, \quad (3.11.23b)$$

$$
\begin{aligned}
&3(\bar{\delta}\Phi_1-\mathrm{D}\Phi_2)+2(\mathrm{D}\Phi_{11}-\delta\Phi_{10})+\bar{\delta}\Phi_{01}-\Delta\Phi_{00}\\
=&3\lambda\Psi_0-9\rho\Psi_2+6(\alpha-\pi)\Psi_1+6\kappa\Psi_3+(\bar{\mu}-2\mu-2\gamma-2\bar{\gamma})\Phi_{00}+(2\alpha+2\pi+2\bar{\tau})\Phi_{01}\\
&+2(\tau-2\bar{\alpha}+\bar{\pi})\Phi_{10}+2(2\bar{\rho}-\rho)\Phi_{11}+2\sigma\Phi_{20}-\bar{\delta}\Phi_{02}-2\kappa\bar{\Phi}_{12}-2\kappa\Phi_{21}, \qquad (3.11.23\mathrm{c})\\
&3(\Delta\Psi_1-\delta\Psi_2)+2(\mathrm{D}\Phi_{12}-\delta\Phi_{11})+(\bar{\delta}\Phi_{02}-\Delta\Phi_{01})\\
=&3\nu\Psi_0+6(\gamma-\mu)\Psi_1-9\tau\Psi_2+6\delta\Psi_3-\bar{\nu}\Phi_{00}\\
&+2(\bar{\mu}-\mu-\gamma)\Phi_{01}-2\bar{\lambda}\Phi_{10}+2(\tau+2\bar{\pi})\Phi_{11}\\
&+(2\alpha+2\pi+\bar{\tau}-2\bar{\beta})\Phi_{02}+(2\bar{\rho}-2\rho-4\bar{\varepsilon})\Phi_{12}+2\sigma\Phi_{21}-2\kappa\Phi_{22}, \qquad (3.11.23\mathrm{d})\\
&3(\bar{\delta}\Psi_2-\mathrm{D}\Psi_3)+\mathrm{D}\Phi_{21}-\delta\Phi_{20}+2(\bar{\delta}\Phi_{11}-\Delta\Phi_{10})\\
=&6\lambda\Psi_1-9\pi\Psi_2+6(\varepsilon-\rho)\Psi_3+3\kappa\Psi_4-2\nu\Phi_{00}+2\lambda\Phi_{01}+2(\bar{\mu}-\mu-2\bar{\gamma})\Phi_{10}\\
&+(2\pi+4\bar{\tau})\Phi_{11}+(2\beta+2\tau+\bar{\pi}-2\bar{\alpha})\Phi_{20}-2\bar{\sigma}\Phi_{12}+2(\bar{\rho}-\rho-\varepsilon)\Phi_{21}-\bar{\kappa}\Phi_{22}, \qquad (3.11.23\mathrm{e})\\
&3(\Delta\Psi_2-\delta\Psi_3)+\mathrm{D}\Phi_{22}-\delta\Phi_{21}+2(\bar{\delta}\Phi_{12}-\Delta\Phi_{11})\\
=&6\nu\Psi_1-9\mu\Psi_2+6(\beta-\tau)\Psi_3+3\sigma\Psi_4-2\nu\Phi_{01}-2\bar{\nu}\Phi_{10}\\
&+2(2\bar{\mu}-\mu)\Phi_{11}+2\lambda\Phi_{02}-\bar{\lambda}\Phi_{20}+2(\pi+\bar{\tau}-2\beta)\Phi_{12}\\
&+2(\beta+\tau+\bar{\pi})\Phi_{21}+(\bar{\rho}-2\varepsilon-2\bar{\varepsilon}-2\rho)\Phi_{22}, \qquad (3.11.23\mathrm{f})\\
&\bar{\delta}\Psi_3-\mathrm{D}\Psi_4+\bar{\delta}\Phi_{21}-\Delta\Phi_{20}\\
=&3\lambda\Psi_2-2(\alpha+2\pi)\Psi_3+(4\varepsilon-\rho)\Psi_4-2\nu\Phi_{10}+2\lambda\Phi_{11}\\
&+(2\gamma-2\bar{\gamma}+\bar{\mu})\Phi_{20}+2(\bar{\tau}-\alpha)\Phi_{21}-\bar{\sigma}\Phi_{22}, \qquad (3.11.23\mathrm{g})\\
&\Delta\Psi_3-\delta\Psi_4+\bar{\delta}\Phi_{22}-\Delta\Phi_{21}\\
=&3\nu\Psi_2-2(\gamma+2\mu)\Psi_3+(4\beta-\tau)\Psi_4-2\nu\Psi_{11}-\bar{\nu}\Phi_{10}+2\lambda\Phi_{12}\\
&+2(\gamma+\bar{\mu})\Phi_{21}+(\bar{\tau}-2\beta-2\alpha)\Phi_{22}, \qquad (3.11.23\mathrm{h})\\
&\mathrm{D}\Phi_{11}-\delta\Phi_{10}-\bar{\delta}\Phi_{01}+\Delta\Phi_{00}+3\mathrm{D}\Lambda\\
=&(2\gamma-\mu+2\bar{\gamma}-\bar{\mu})\Phi_{00}+(\pi-2\alpha-2\bar{\tau})\Phi_{01}+(\bar{\pi}-2\bar{\alpha}-2\tau)\Phi_{10}\\
&+2(\rho+\bar{\rho})\Phi_{11}+\bar{\sigma}\Phi_{02}+\sigma\Phi_{20}-\bar{\kappa}\Phi_{12}-\kappa\Phi_{21}, \qquad (3.11.23\mathrm{i})\\
&\mathrm{D}\Phi_{21}-\delta\Phi_{11}-\bar{\delta}\Phi_{02}+\Delta\Phi_{01}+3\delta\Lambda\\
=&(2\gamma-\mu-2\bar{\mu})\Phi_{01}+\bar{\nu}\Phi_{00}-\bar{\lambda}\Phi_{01}+(2\bar{\pi}-\tau)\Phi_{11}+(\pi+2\bar{\beta}-2\alpha-\bar{\tau})\Phi k_{02}\\
&+(2\rho+\bar{\rho}-2\bar{\varepsilon})\Phi_{12}+\sigma\Phi_{21}-\kappa\Phi_{22}, \qquad (3.11.23\mathrm{j})\\
&\mathrm{D}\Phi_{22}-\delta\Phi_{21}-\bar{\delta}\Phi_{12}+\Delta\Phi_{11}+3\Delta\Lambda\\
=&\nu\Phi_{01}+\bar{\nu}\Phi_{10}-2(\mu+\bar{\mu})\Phi_{11}-\lambda\Phi_{02}-\bar{\lambda}\Phi_{20}+(2\pi-\bar{\tau}+2\bar{\beta})\Phi_{12}\\
&+(2\beta-\tau+2\bar{\pi})\Phi_{21}+(\rho+\bar{\rho}-2\varepsilon-2\bar{\varepsilon})\Phi_{22}. \qquad (3.11.23\mathrm{k})
\end{aligned}
$$

方程 (3.11.17),(3.11.21) 和 (3.11.23) 即为 Einstein 场方程的 Newman-Penrose 形式.

4) 速度场

速度 u^μ 的协变导数可构成一个与 u^μ 正交的表达式 $\mu_{\mu;\nu}+u_{\mu;\lambda}u^\lambda u_\nu$. 此式可分解为反对称部分、对称无迹部分和它的迹

$$u_{\mu;\nu}+u_{\mu;\lambda}u^\lambda u_\nu=\omega_{\mu\nu}+\sigma_{\mu\nu}+\theta h_{\mu\nu}/3,$$

即

$$u_{\mu;\nu}=-\dot{u}_\mu u_\nu+\omega_{\mu\nu}+\sigma_{\mu\nu}+\theta h_{\mu\nu}/3. \tag{3.11.24}$$

式中

$$\dot{u}_\mu=u_{\mu;\nu}u^\nu=\frac{Du_\mu}{Ds},$$

$$\omega_{\mu\nu}=u_{[\mu;\nu]}+\dot{u}_{[\mu}u_{\nu]}, \tag{3.11.25a}$$

$$\sigma_{\mu\nu}=u_{(\mu;\nu)}+\dot{u}_{(\mu}u_{\nu)}-\theta h_{\mu\nu}/3, \tag{3.11.25b}$$

$$\theta=u^\mu_{;\mu}, \tag{3.11.25c}$$

$$h_{\mu\nu}=g_{\mu\nu}+u_\mu u_\nu; \tag{3.11.25d}$$

$$\dot{u}_\mu u^\mu=0,\quad \omega_{\mu\nu}u^\nu=0,\quad \sigma_{\mu\nu}u^\nu=0,\quad h_{\mu\nu}u^\nu=0. \tag{3.11.25e}$$

速度场的性质包含在这些量中, $\dot{u}_\mu$ 称为加速度, $\omega_{\mu\nu}$ 称为**扭或旋速度**, $\sigma_{\mu\nu}$ 称为**切变速度**,θ 称为**膨胀速度**. 现在我们来说明这些量的几何意义.

设物质元的世界线簇 (流线簇) 为

$$x^\mu=x^\mu(y^i,\tau),$$

速度场为

$$u^\mu(x^\nu)=\frac{\partial x^\mu}{\partial\tau}.$$

沿着每条世界线有 $y^i=\text{const.}$ 当 τ 不变时, 由世界线 y^i 到邻近的世界线 $(y^i+\delta y^i)$ 有增量

$$\delta x^\mu=\frac{\partial x^\mu}{\partial y^i}\delta y^i.$$

由于

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}\tau}\delta x^\mu&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\delta x^\mu+\Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\tau}\delta x^\beta=\frac{\partial^2x^\mu}{\partial\tau\partial y^i}\delta y^i+\Gamma^\mu_{\alpha\beta}u^\alpha\delta x^\beta\\&=\frac{\partial u^\mu}{\partial y^i}\delta y^i+\Gamma^\mu_{\alpha\beta}u^\alpha\delta x^\beta=\frac{\partial u^\mu}{\partial x^\nu}\delta x^\nu+\Gamma^\mu_{\alpha\beta}u^\alpha\delta x^\beta,\end{aligned}$$

所以沿世界线有

$$(\delta x^\mu)^{\cdot}=u^\mu_{;\nu}\delta x^\nu$$

对于随动系中的观测者, 邻近体元的位移应是 δx^μ 向他的三维空间的投影:

$$\delta_\perp x^\mu = (g^\mu_\nu + u^\mu u_\nu)\delta x^\nu = h^\mu_\nu \delta x^\nu.$$

根据以上二式, 注意到 $(\delta_\perp x^\mu)u_\mu = 0$, 得到相应的速度

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}\tau}(\delta_\perp x^\mu) - (\delta_\perp x^\nu)(u^\mu \dot{u}_\nu - \dot{u}^\mu u_\nu) = (\delta_\perp x^\nu)^\cdot h^\mu_\nu.$$

将 (3.11.25) 代入上式, 得到

$$\begin{aligned}(\delta_\perp x^\nu)^\cdot h^\mu_\nu &= (u^\mu_{;\nu} + \dot{u}^\mu u_\nu)\delta_\perp x^\nu \\ &= (\omega^\mu_\nu + \sigma^\mu_\nu + \theta\delta^\mu_\nu/3)\delta_\perp x^\nu.\end{aligned}$$

由上式可以发现, 膨胀速度 θ 为径向速度, 其大小和方向无关. 当 $\theta > 0$ 时物质元的体积膨胀, 当 $\theta < 0$ 时收缩. 根据 (3.1.1), 可将反对称张量 $\omega_{\mu\nu}$ 变换为旋速度矢量 ω^μ

$$\omega^\mu = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\tau}u_\nu\omega_{\lambda\tau}, \quad \omega_{\lambda\tau} = \varepsilon_{\lambda\tau\alpha\beta}\omega^\alpha u^\beta.$$

由 ω^μ 描述的速度场具有形式

$$(\delta_\perp x^\nu)^\cdot h^\mu_\nu = \varepsilon^\mu_{\nu\lambda\tau}\omega^\lambda u^\tau \delta_\perp x^\nu,$$

可见速度垂直于位移 $\delta_\perp x^\mu$, 也垂直于旋速度 ω^μ. 所以, $\omega_{\mu\nu}$ 表征绕轴 ω^μ 旋转. 关于切变速度, 由于迹 $\sigma^\mu_\mu = 0$, 所以 $\sigma_{\mu\nu}$ 表征物质元由球变为椭球的等体积形变.

由零标架矢量 l_μ 的协变导数可以构成与 (3.11.25) 对应的三个标量场. 定义 $l^\mu = \dfrac{\partial x^\mu}{\partial \nu}$, ν 是沿着固定短程线的仿射参量. 这三个标量可以写为

$$\theta = -\frac{1}{2}l^\mu_{;\mu}, \tag{3.11.26a}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{2}l_{[\mu;\nu]}l^{\mu;\nu}}, \tag{3.11.26b}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{2}l_{(\mu;\nu)}l^{\mu;\nu} - \theta^2}. \tag{3.11.26c}$$

由 (3.11.9) 可以得到

$$\begin{aligned}l_{\mu;\nu} =& (\gamma+\bar{\gamma})l_\mu l_\nu + (\varepsilon+\bar{\varepsilon})l_\mu n_\nu - (\alpha+\bar{\beta})l_\mu m_\nu - (\bar{\alpha}+\beta)l_\mu \bar{m}_\nu - \bar{\tau}m_\mu l_\nu - \tau\bar{m}_\rho n_\nu \\ &- \bar{\kappa}m_\mu n_\nu - \kappa\bar{m}_\mu n_\nu + \bar{\sigma}m_\mu m_\nu + \sigma\bar{m}_\mu\bar{m}_\nu + \bar{\rho}m_\mu\bar{m}_\nu + \rho\bar{m}_\mu m_\nu.\end{aligned} \tag{3.11.27}$$

我们可以沿上述零曲线族中每一条短程线引入一仿射参量, 从而使 $\varepsilon+\bar{\varepsilon}=0$. 进而, 因 l_μ 为短程线的切线, 故有 $\kappa = 0$. 采用 (3.11.27), 可将标量场 θ、ω 和 $|\sigma|$ 用旋系

数表示出来

$$\theta = \frac{1}{2}(\rho + \bar{\rho}), \quad (3.11.28)$$

$$\omega = \frac{1}{2}|\rho + \bar{\rho}|, \quad (3.11.29)$$

$$|\sigma| = \sqrt{\sigma\bar{\sigma}}. \quad (3.11.30)$$

5) Maxwell 方程

在零标架形式中, Maxwell 方程可写为

$$\eta^{pq}(F_{mp;q} - F_{lp}\gamma^{l}_{mq} - F_{ml}\gamma^{l}_{pq}) = J_m. \quad (3.11.31)$$

在上式中取 $m = 1, 2, 3, 4$, 得到

$$\mathrm{D}\Phi_1 - \bar{\delta}\Phi_0 = (\pi - 2\alpha)\Phi_0 + 2\rho\Phi_1 - \kappa\Phi_2 + J_1, \quad (3.11.32a)$$

$$\mathrm{D}\Phi_2 - \bar{\delta}\Phi_1 = -\lambda\Phi_0 + 2\pi\Phi_1 + (\rho - 2\varepsilon)\Phi_2 + J_4, \quad (3.11.32b)$$

$$\delta\Phi_2 - \Delta\Phi_1 = -\nu\Phi_0 + 2\mu\Phi_1 + (\tau - 2\beta)\Phi_2 + J_2, \quad (3.11.32c)$$

$$\delta\Phi_1 - \Delta\Phi_0 = (\mu - 2\gamma)\Phi_0 + 2\tau\Phi_1 - \sigma\Phi_2 + J_3. \quad (3.11.32d)$$

式中

$$\Phi_0 = F_{\mu\nu}l^{\mu}m^{\nu}, \quad (3.11.33a)$$

$$\Phi_1 = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}(l^{\mu}n^{\nu} + \bar{m}^{\mu}m^{\nu}), \quad (3.11.33b)$$

$$\Phi_2 = F_{\mu\nu}\bar{m}^{\mu}n^{\nu}; \quad (3.11.33c)$$

$$J_m = J_{\mu}Z^{\mu}_{m},$$

J_{μ} 为四维电流密度矢量.

方程组 (3.11.32) 即 Maxwell 方程的零标架形式.

$F_{\mu\nu}$ 可用零标架表示为

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} =& - 4\mathrm{Re}(\Phi_1)l_{[\mu}n_{\nu]} + 4\mathrm{i}\mathrm{Im}(\Phi_1)m_{[\mu}\bar{m}_{\nu]} + 2\Phi_2 l_{[\mu}m_{\nu]} \\ &+ 2\Phi_2 l_{[\mu}\bar{m}_{\nu]} - 2\Phi_0 n_{[\mu}m_{\nu]} - 2\Phi_0 n_{[\mu}\bar{m}_{\nu]}. \end{aligned} \quad (3.11.34)$$

将上式代入电磁场能量–动量张量表达式

$$E_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} - F_{\mu\sigma}F^{\sigma\nu}\right), \quad (3.11.35)$$

得到相应的标架表示形式

$$4\pi E_{\mu\nu} = 2\{|\Phi_2|^2 l_{\mu}l_{\nu} + |\Phi_0|^2 n_{\mu}n_{\nu} + \bar{\Phi}_0\Phi_2 m_{\mu}m_{\nu}$$

$$
\begin{aligned}
&+\Phi_0\bar{\Phi}_2\bar{m}_\mu\bar{m}_\nu\}+4|\Phi_1|^2\{l_{(\mu}n_{\nu)}+m_{(\mu}\bar{m}_{\nu)}\}\\
&-4\Phi_1\Phi_2 l_{(\mu}m_{\nu)}-4\Phi_1\bar{\Phi}_2 l_{(\mu}\bar{m}_{\nu)}\\
&-4\bar{\Phi}_0\Phi_1 n_{(\mu}m_{\nu)}-4\Phi_0\bar{\Phi}_1 n_{(\mu}\bar{m}_{\nu)}.
\end{aligned}
\tag{3.11.36}
$$

如果能够解方程 (3.11.32) 求得 Φ_0, Φ_1 和 Φ_2, 则可以代入 (3.11.34) 和 (3.11.35), 得到 Maxwell 张量和电磁场能量–动量张量的协变分量 (坐标分量).

如果 Ricci 张量和 Maxwell 张量成正比, 即

$$
\Phi_{mn}=\kappa\Phi_m\Phi_n,\quad m,n=0,1,2. \tag{3.11.37}
$$

取 $\kappa=1$, Bianchi 恒等式成为

$$
\begin{aligned}
&(\delta-\tau+4\beta)\Psi_4-(\Delta+2\gamma+4\mu)\Psi_3+3\nu\Psi_2\\
=&\bar{\Phi}_1\Delta\Phi_2-\bar{\Phi}_2\bar{\delta}\Phi_2+2(\bar{\Phi}_1\Phi_1\nu-\bar{\Phi}_2\Phi_1\lambda-\bar{\Phi}_1\Phi_2\gamma+\bar{\Phi}_2\Phi_2\alpha),
\end{aligned}
\tag{3.11.38a}
$$

$$
\begin{aligned}
&(\delta-2\tau+2\beta)\Psi_3+\sigma\Psi_4-(\Delta+3\mu)\Psi_2+2\nu\Psi_1\\
=&\bar{\Phi}_1\delta\Phi_2-\bar{\Phi}_2\mathrm{D}\Phi_2+2(\bar{\Phi}_1\Phi_1\mu-\bar{\Phi}_2\Phi_1\pi-\bar{\Phi}_1\Phi_2\beta+\bar{\Phi}_2\Phi_2\varepsilon),
\end{aligned}
\tag{3.11.38b}
$$

$$
\begin{aligned}
&(\delta-3\tau)\Psi_2+2\sigma\psi_3-(\Delta-2\gamma+2\mu)\Psi_1+\nu\Psi_0\\
=&\bar{\Phi}_1\Delta\Phi_0-\bar{\Phi}_2\delta\Phi_0+2(\bar{\Phi}_1\Phi_0\gamma-\bar{\Phi}_2\Phi_0\alpha-\bar{\Phi}_1\Phi_1\tau+\bar{\Phi}_2\Phi_1\rho),
\end{aligned}
\tag{3.11.38c}
$$

$$
\begin{aligned}
&(\delta-4\tau-2\beta)\Psi_1+3\sigma\Psi_2-(\Delta-4\gamma+\mu)\Psi_0\\
=&\bar{\Phi}_1\delta\Phi_0-\bar{\Phi}_2\mathrm{D}\Phi_0+2(\bar{\Phi}_1\Phi_0\beta-\bar{\Phi}_2\Phi_0\varepsilon-\bar{\Phi}_1\Phi_1\sigma+\bar{\Phi}_2\Phi_1\kappa),
\end{aligned}
\tag{3.11.38d}
$$

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{D}+4\varepsilon-\rho)\Psi_4-(\bar{\delta}+4\pi+2\alpha)\Psi_3+3\lambda\Psi_2\\
=&\bar{\Phi}_0\Delta\Phi_2-\bar{\Phi}_1\bar{\delta}\Phi_2+2(\bar{\Phi}_0\Phi_\nu-\bar{\Phi}_1\Phi_1\lambda-\bar{\Phi}_0\Phi_2\gamma+\bar{\Phi}_1\Phi_2\alpha),
\end{aligned}
\tag{3.11.38e}
$$

3.12 共形 Ricci 平直理想流体的场方程

将理想流体的能量–动量张量

$$
T^{\mu\nu}=(\varepsilon+p)u^\mu u^\nu-g^{\mu\nu}p \tag{3.12.1}
$$

代入守恒方程

$$
T^{\mu\nu}_{;\nu}=0, \tag{3.12.2}
$$

可以得到

$$
u^\nu\varepsilon_{,\nu}+(\varepsilon+p)u^\nu_{;\nu}=0, \tag{3.12.3}
$$

$$(\varepsilon+p)u^\nu u^\mu_{;\nu}-(g^{\mu\nu}-u^\mu u^\nu)_{,\nu}=0. \tag{3.12.4}$$

设 $\widehat{g}_{\mu\nu}$ 表示真空度规, $g_{\mu\nu}$ 表示理想流体引力场的度规; 此时有 (取 $k=1$)

$$\widehat{R}_{\mu\nu}=0(\text{Ricci 平直}). \tag{3.12.5}$$

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R=(\varepsilon+p)u_\mu u_\nu-pg_{\mu\nu},$$

如果存在一个标量 ϕ, 使式

$$\widehat{g}_{\mu\nu}=\mathrm{e}^{2\phi}g_{\mu\nu} \tag{3.12.6}$$

成立, 则称流体 $(g_{\mu\nu},\varepsilon,p)$ 为共形 Ricci 平直理想流体. 共形变换 (3.12.6),Riemann 张量, Weyl 张量和 Ricci 张量满足下列方程:

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{2\phi}\widehat{R}_{\mu\nu\alpha\beta}=&R_{\mu\nu\alpha\beta}+g_{\mu\beta}(\phi_{;\nu\alpha}-\phi_{,\nu}\phi_{,\alpha}+g_{\nu\alpha}(\phi_{;\mu\beta}-\phi_{,\mu}\phi_{,\beta})-g_{\mu\alpha}(\phi_{;\nu\beta}-\phi_{,\nu}\phi_{,\beta})\\&-g_{\nu\beta}(\phi_{;\mu\alpha}-\phi_{,\mu}\phi_{,\alpha})+(g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha}-g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta})g^{\tau\sigma}\phi_{,\tau}\phi_{,\sigma},\end{aligned} \tag{3.12.7}$$

$$\begin{aligned}C^\lambda_{\mu\nu\tau}=&R^\lambda_{\mu\nu\tau}-\frac{1}{2}(\delta^\lambda_\tau R_{\mu\nu}-\delta^\lambda_\nu R_{\mu\tau}+g_{\mu\nu}R^\lambda_\tau-g_{\mu\tau}R^\lambda_\nu)\\&-\frac{1}{6}R(\delta^\lambda_\tau g_{\mu\nu}-\delta^\lambda_\nu g_{\mu\tau}),\end{aligned} \tag{3.12.8}$$

$$\widehat{R}_{\mu\nu}=R_{\mu\nu}+2(\phi_{;\mu\nu}-\phi_{,\mu}\phi_{,\nu})+g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}(\phi_{;\alpha\beta}-\phi_{,\alpha}\phi_{,\beta}). \tag{3.12.9}$$

用 $\widehat{g}^{\mu\mu'}\widehat{g}^{\nu\nu'}=\mathrm{e}^{4\phi}g^{\mu\mu'}g^{\nu\nu'}$ 乘 (3.12.7), 然后去掉脚标的撇号, 得到

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{2\phi}\widehat{R}^{\mu\nu}_{\alpha\beta}=&R^{\mu\nu}_{\alpha\beta}+\delta^\mu_\beta(\phi^{;\nu}_{;\alpha}-\phi^{,\nu}\phi_{,\alpha})+\delta^\nu_\alpha(\phi^{;\mu}_{;\beta}-\phi^{,\mu}\phi_{,\beta})-\delta^\mu_\alpha(\phi^{;\nu}_{;\beta}-\phi^{,\nu}\phi_{,\beta})\\&-\delta^\nu_\beta(\phi^{;\mu}_{;\alpha}-\phi^{,\mu}\phi_{,\alpha})+(\delta^\mu_\beta\delta^\nu_\alpha-\delta^\mu_\alpha\delta^\nu_\beta)\phi^{,\tau}\phi_{,\tau}\\=&R^{\mu\nu}_{\alpha\beta}+Y^\nu_\alpha\delta^\mu_\beta+Y^\mu_\beta\delta^\nu_\alpha-Y^\nu_\beta\delta^\mu_\alpha-Y^\mu_\alpha\delta^\nu_\beta.\end{aligned} \tag{3.12.10}$$

式中

$$Y^\mu_\alpha\equiv\phi^{;\mu}_{;\alpha}-\phi^{;\mu}\phi^{,\alpha}+\frac{1}{2}\delta^\mu_\alpha\phi^{,\tau}\phi_{,\tau}. \tag{3.12.11}$$

将此式代入 (3.12.9), 得到

$$\widehat{R}_{\mu\nu}=R_{\mu\nu}-2Y_{\mu\nu}-g_{\mu\nu}Y^\sigma_\alpha. \tag{3.12.12}$$

考虑到 (3.12.5), 上式成为

$$R_{\mu\nu}=2Y_{\mu\nu}+g_{\mu\nu}Y^\alpha_\alpha, \tag{3.12.13}$$

$$Y^\alpha_\alpha=\frac{1}{6}R. \tag{3.12.14}$$

将场方程 (3.12.6) 缩并, 并注意 $u^\mu u_\mu=1$, 得到

$$R=-\varepsilon+3p. \tag{3.12.15}$$

由 (3.12.6) 和 (3.12.13)~(3.12.15) 可得

$$2Y_{\mu\nu} = (\varepsilon + p)u_\mu u_\nu - \frac{1}{3}\varepsilon g_{\mu\nu}. \tag{3.12.16}$$

上式中 ϕ 存在, 要求下式成立:

$$2Y_{\mu[\nu;\tau]} = C^\lambda_{\mu\nu\tau}\phi_{,\lambda} \tag{3.12.17}$$

此式称为**可积极性条件**.

下面我们将上述诸方程以零标架形式给出.

适当选择零标架, 使其中四维速度表示为

$$u^1 = u^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad u^3 = u^4 = 0 \quad [\text{取} x^\mu = (x^1, x^2, x^3, x^4)]. \tag{3.12.18}$$

将 (3.12.11) 代入 (3.12.16), 得到

$$\phi_{;\mu\nu} = \phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\phi_{,\alpha}\phi^{,\alpha} + \frac{1}{2}(\varepsilon + p)u_\mu u_\nu - \frac{1}{6}\varepsilon g_{\mu\nu}. \tag{3.12.19}$$

上式的零标架形式为

$$\phi_{;mn} = \phi_{,m}\phi_{,n} + \phi_{,p}\gamma^p_{mn} - \eta_{mn}(\mathrm{D}\phi\Delta\phi - \delta\phi\bar{\delta}\phi) + \frac{1}{2}(\varepsilon + p)u_m u_n - \frac{1}{6}\eta_{mn}\varepsilon. \tag{3.12.20}$$

此式用旋系数给出, 得到下面一组独立方程:

$$\mathrm{D}^2\phi - (\mathrm{D}\phi)^2 - (\varepsilon + \bar{\varepsilon})\mathrm{D}\phi + \bar{\kappa}\delta\phi + \kappa\bar{\delta}\phi = \frac{1}{4}(\varepsilon + p), \tag{3.12.21a}$$

$$\Delta^2\phi - (\Delta\phi)^2 + (\gamma + \bar{\gamma})\Delta\phi - \nu\delta\phi - \bar{\nu}\bar{\delta}\phi = \frac{1}{4}(\varepsilon + p), \tag{3.12.21b}$$

$$\delta^2\phi - \bar{\delta}\mathrm{D}\phi + \sigma\Delta\phi + (\bar{\alpha} - \beta)\delta\phi - (\delta\phi)^2 = 0, \tag{3.12.21c}$$

$$\mathrm{D}\Delta\phi + (\varepsilon + \bar{\varepsilon})\Delta\phi - \pi\delta\phi - \bar{\pi}\bar{\delta}\phi - \delta\phi\bar{\delta}\phi = \frac{1}{12}(\varepsilon + 3p), \tag{3.12.21d}$$

$$\mathrm{D}\delta\phi - \bar{\pi}\mathrm{D}\phi + \kappa\Delta\phi + (\varepsilon - \bar{\varepsilon})\delta\phi - \mathrm{D}\phi\delta\phi = 0, \tag{3.12.21e}$$

$$\Delta\delta\phi - \bar{\nu}\mathrm{D}\phi + \tau\Delta\phi - (\gamma - \bar{\gamma})\delta\phi - \Delta\phi\delta\phi = 0, \tag{3.12.21f}$$

$$\delta\bar{\delta}\phi - \mu\mathrm{D}\phi + \bar{\rho}\Delta\phi + (\beta - \bar{\alpha})\bar{\delta}\phi - \mathrm{D}\phi\Delta\phi = \frac{1}{6}\varepsilon, \tag{3.12.21g}$$

$$(\Delta\mathrm{D} - \mathrm{D}\Delta)\phi = (\gamma + \bar{\gamma})\mathrm{D}\phi + (\varepsilon + \bar{\varepsilon})\Delta\phi - (\tau + \bar{\pi})\bar{\delta}\phi - (\bar{\tau} + \pi)\delta\phi, \tag{3.12.21h}$$

$$(\delta\mathrm{D} - \mathrm{D}\delta)\phi = (\bar{\alpha} + \beta - \pi)\mathrm{D}\phi + \kappa\Delta\phi - \sigma\bar{\delta}\phi - (\bar{\rho} + \varepsilon - \bar{\varepsilon})\delta\phi, \tag{3.12.21i}$$

$$(\delta\Delta - \Delta\delta)\phi = -\bar{\nu}\mathrm{D}\phi + (\tau - \bar{\alpha} - \beta)\Delta\phi + \bar{\lambda}\,\bar{\delta}\phi + (\mu - \gamma + \bar{\gamma})\delta\phi, \tag{3.12.21j}$$

$$(\bar{\delta}\delta - \delta\bar{\delta})\phi = (\bar{\mu} - \mu)\mathrm{D}\phi + (\bar{\rho} - \rho)\Delta\phi - (\bar{\alpha} - \beta)\bar{\delta}\phi + (\alpha - \bar{\beta})\delta\phi. \tag{3.12.21k}$$

由 (3.12.6) 和 (3.12.16)、(3.11.12), 得到

$$R_{11} = R_{22} = \frac{1}{2}(\varepsilon + p), \tag{3.12.22}$$

$$R_{12} = p, \quad R_{34} = \frac{1}{2}(\varepsilon - p),$$

$$\phi_{00} = \phi_{22} = -\frac{1}{4}(\varepsilon + p), \tag{3.12.23}$$

$$\phi_{11} = \frac{-1}{8}(\varepsilon + p).$$

(3.12.3) 和 (3.12.4) 的零标架形式为

$$u_n \varepsilon_{,m} \eta^{mn} + (\varepsilon + p) u_{m,n} \eta^{mn} - (\varepsilon + p) u_p \gamma^p_{mn} \eta^{mn} = 0, \tag{3.12.24}$$

$$(\varepsilon + p) u_k u_{p,q} \delta^p_m \eta^{kq} - (\varepsilon + p) u_k u_q \gamma^q_{pn} \delta^p_m \eta^{kn} - p_{;p} \delta^p_m + u_p u_k p_{;q} \delta^p_m \eta^{kq} = 0. \tag{3.12.25}$$

将上二式用旋系数表示, 我们得到

$$\mathrm{D}\varepsilon + \Delta\varepsilon = (\varepsilon + p)(\gamma + \bar{\gamma} - \varepsilon - \bar{\varepsilon} + \rho + \bar{\rho} - \mu - \bar{\mu}), \tag{3.12.26a}$$

$$\mathrm{D}p - \Delta p = -(\varepsilon + p)(\gamma + \bar{\gamma} + \varepsilon + \bar{\varepsilon}). \tag{3.12.26b}$$

$$\delta p = \frac{1}{2}(\varepsilon + p)(\kappa + \tau - \bar{\pi} - \bar{\nu}). \tag{3.12.26c}$$

下面我们将方程 (3.12.16) 以零标架形式给出. 将 (3.12.16) 代入可积性条件 (3.12.17), 得到

$$2C_{\mu\nu\alpha\beta} g^{\mu\tau} \phi, \tau = (\varepsilon + p)_{;\beta} u_\nu u_\alpha + (\varepsilon + p)(u_{\nu;\beta} u_\alpha + u_\nu u_{\alpha;\beta} - \frac{1}{3} g_{\nu\alpha} \varepsilon_{;\beta} - (\varepsilon + p)_{;\alpha} u_\nu u_\beta$$
$$+ \frac{1}{3} g_{\nu\beta} \varepsilon_{;\alpha} - (\varepsilon + p)(u_{\nu;\alpha} u_\beta + u_\nu u_{\beta;\alpha}). \tag{3.12.27}$$

上式在零标架中的形式为

$$2C_{qmnp} \phi_{,k} \eta^{kq} = (\varepsilon + p)_{,p} u_m u_n - (\varepsilon + p)_{,n} u_m u_p - \frac{1}{3}(\varepsilon_{,p} \eta_{mn} - \varepsilon_{,n} \eta_{mp})$$
$$+ (\varepsilon + p)(u_n u_{m,p} + u_m u_{n,p}) - (\varepsilon + p)(u_t u_{m;n} + u_n u_{p;m})$$
$$- (\varepsilon + p)(u_m u_q \gamma^p_{np} + u_n u_q \gamma^q_{mp} - u_p u_q \gamma^q_{mn} - u_m u_q \gamma^q_{pn}). \tag{3.12.28}$$

注意到 Weyl 张量的零标架形式, 可将上式写为

$$\bar{\Psi}_4 \mathrm{D}\phi - \bar{\Psi}_3 \delta\phi = \frac{1}{4}(\varepsilon + p)(\bar{\lambda} - \sigma), \tag{3.12.29a}$$

$$\Psi_0 \Delta\phi - \Psi_1 \delta\phi = \frac{1}{4}(\varepsilon + p)(\bar{\lambda} - \sigma), \tag{3.12.29b}$$

$$\bar{\Psi}_2 \mathrm{D}\phi - \Psi_1 \bar{\delta}\phi = \frac{1}{4}(\varepsilon + p)(\rho - \bar{\mu}) - \frac{1}{6}\mathrm{D}\varepsilon, \tag{3.12.29c}$$

$$\Psi_2\Delta\varphi - \bar{\Psi}_3\bar{\delta}\phi = \frac{1}{4}(\varepsilon+p)(\rho-\bar{\mu}) - \frac{1}{6}\Delta\varepsilon, \tag{3.12.29d}$$

$$\bar{\Psi}_3\mathrm{D}\phi + \Psi_1\Delta\phi - (\Psi_2+\bar{\Psi}_2)\delta\phi = -\frac{1}{6}\delta\varepsilon, \tag{3.12.29e}$$

$$\bar{\Psi}_3\mathrm{D}\phi - \Psi_1\Delta\phi + (\Psi_2-\bar{\Psi}_2)\delta\phi = \frac{1}{4}(\varepsilon+p)(\bar{\pi}-\kappa-\bar{\nu}+\tau). \tag{3.12.29f}$$

如果对零标架作变换

$$l^\mu \leftrightarrow n^\mu, \quad m^\mu \leftrightarrow \bar{m}^\mu, \tag{3.12.30}$$

则相应地有

$$\mathrm{D}\leftrightarrow\Delta, \quad \delta\leftrightarrow\bar{\delta}; \tag{3.12.31a}$$

$$\begin{aligned}&\varepsilon\leftrightarrow-\gamma, \quad \mu\leftrightarrow-\rho,\\ &\tau\leftrightarrow-\pi, \quad \alpha\leftrightarrow-\beta,\\ &\kappa\leftrightarrow-\nu, \quad \sigma\leftrightarrow-\lambda;\end{aligned} \tag{3.12.31b}$$

$$\begin{aligned}&\Psi_0\leftrightarrow\Psi_4, \quad \Psi_1\leftrightarrow\Psi_3,\\ &\Psi_2\leftrightarrow\Psi_2;\end{aligned} \tag{3.12.31c}$$

$$\begin{aligned}&\Phi_{00}\leftrightarrow\Phi_{22}, \quad \Phi_{01}\leftrightarrow\Phi_{21},\\ &\Phi_{02}\leftrightarrow\Phi_{20}, \quad \Phi_{11}\leftrightarrow\Phi_{11};\end{aligned} \tag{3.12.31d}$$

$$\Lambda\leftrightarrow\Lambda; \tag{3.12.31e}$$

$$\Phi_0\leftrightarrow\Phi_2, \quad \Phi_1\leftrightarrow\Phi_1. \tag{3.12.31f}$$

不难证明, 在上述变换下 Newman-Penrose 方程 (即 Einstein 方程的 Newman-Penrose 形式) 是不变的.

3.13 能量–动量赝张量

在狭义相对论中, 物质系统或电磁场的能量–动量守恒定律表示为 $T^{\mu\nu}_{,\nu}=0$. 将 $T^{\nu}_{\mu;\nu}=0$ 对三维空间积分便得到能量–动量守恒定律. 上式的零分量积分为

$$\frac{\partial}{\partial x^0}\int T^0_0\mathrm{d}^3x = -\int\frac{\partial T^i_0}{\partial x^i}\mathrm{d}^3x = -\int T^i_0\mathrm{d}S_i. \tag{3.13.1}$$

右端由高斯定理化为沿系统边界面的面积分. 上式表明, 系统能量的增量等于进入边界面的能量–动量流. 守恒定律的这一表述形式在引力场不存在时是有效的. 在有引力场时, $T^{\mu\nu}$ 的普通散度推广为协变散度, 守恒定律应推广为具有协变形式的 $T^{\mu\nu}_{;\nu}=0$. 由于 $T_{\mu\nu}=T_{\nu\mu}$, 上式即

$$T^{\nu}_{\mu;\nu} = (-g)^{-1/2}(T^{\nu}_{\mu}\sqrt{-g})_{,\nu} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta,\mu}T^{\alpha\beta} = 0. \tag{3.13.2}$$

由于上式中除了普通散度以外还有一项 $\left(-\frac{1}{2}g_{\alpha\beta;\mu}T^{\alpha\beta}\right)$, 所以这个推广后的守恒定律不能直接给出狭义相对论中的物理图像. 如果度规依赖于时间, 则对于 $\mu=0$, 上式第二项表示引力场和其他场之间的能量–动量交换. 为了将 (3.13.2) 写成普通散度的形式, 对于时空中一点 P, 我们采用短程线坐标系. 在短程线坐标系中, 度规张量 $g_{mu\nu}$ 的所有一阶导数都等于零. 所以 (3.13.2) 第二项等于零, 而且第一项中的 $\sqrt{-g}$ 可以提到微分号外边来. 于是此式化为

$$\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}}=0. \tag{3.13.3}$$

按照 Landau-Lifshitz 的表述形式, 上式中的量 $T^{\mu\nu}$ 可写为一个张量 $S^{\mu\nu\vee\tau}$ 的微商 ($S^{\mu\nu\vee\tau}$ 关于 $\nu\tau$ 是反对称的)

$$T^{\mu\nu}=\frac{\partial S^{\mu\nu\vee\alpha}}{\partial x^{\alpha}}. \tag{3.13.4}$$

由爱因斯坦方程可得

$$T^{\mu\nu}=\frac{1}{k}\left(R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right). \tag{3.13.5}$$

在点 P, 由于 $\Gamma^{\tau}_{\mu\nu}=0$, 所以有

$$R^{\mu\nu}=\frac{1}{2}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}g^{\sigma\tau}(g_{\alpha\sigma,\beta\tau}+g_{\beta\tau,\alpha\sigma}-g_{\alpha\beta;\sigma\tau}-g_{\sigma\tau,\alpha\beta}). \tag{3.13.6}$$

代入 (3.13.5) 得到

$$T^{\mu\nu}=\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\left\{\frac{1}{2k}\frac{1}{(-g)}\frac{\partial}{\partial x^{\tau}}\left[(-g)(g^{\mu\nu}g^{\tau\alpha}-g^{\mu\alpha}g^{\nu\tau}\right]\right\}. \tag{3.13.7}$$

将 (3.13.7) 与 (3.13.4) 比较, 可知 $S^{\mu\nu\vee\alpha}$ 可以选为上式右边的表达式 $\{\quad\}$. 在 P 点, 可将 $(-g)^{-1}$ 从微分号下提到外面来. 引入量

$$h^{\mu\nu\vee\alpha}=\frac{1}{2k}\frac{\partial}{\partial x^{\tau}}\left[(-g)(g^{\mu\nu}g^{\tau\alpha}-g^{\mu\alpha}g^{\nu\tau})\right], \tag{3.13.8}$$

(3.13.7) 可写为

$$(-g)T^{\mu\nu}=\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}h^{\mu\nu\vee\alpha}. \tag{3.13.9}$$

我们采用了一个特殊坐标系 (短程线坐标系) 得到了上式. 在任意坐标系中, 上式的左端和右端不再相等, 将两端之差以 $(-g)t^{\mu\nu}$ 表示, 上式变为

$$(-g)(T^{\mu\nu}+t^{\mu\nu})=\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}h^{\mu\nu\vee\alpha}. \tag{3.13.10}$$

因为上式中各项都是对称的, 故量 $t^{\mu\nu}$ 是对称的

$$t^{\mu\nu} = t^{\nu\mu}. \tag{3.13.11}$$

将 $T^{\mu\nu}$ 的具体形式 (用 $\Gamma^{\delta}_{\alpha\beta}$ 表示的展开式) 写出来, 再与 (3.13.8) 一起代入 (3.13.10), 便得到 $t^{\mu\nu}$ 的具体形式

$$\begin{aligned} t^{\mu\nu} =& \frac{1}{2k}\Big[(2\Gamma^{\alpha}_{\beta\tau}\Gamma^{\rho}_{\alpha\rho} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\rho}\Gamma^{\rho}_{\tau\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\alpha}\Gamma^{\rho}_{\tau\rho})(g^{\mu\beta}g^{\nu\tau} - g^{\mu\alpha}g^{\beta\tau}) \\ &+ g^{\mu\beta}g^{\tau\alpha}(\Gamma^{\nu}_{\beta\rho}\Gamma^{\rho}_{\tau\alpha} + \Gamma^{\nu}_{\tau\alpha}\Gamma^{\rho}_{\beta\rho} - \Gamma^{\nu}_{\alpha\rho}\Gamma^{\rho}_{\beta\tau} - \Gamma^{\nu}_{\beta\tau}\Gamma^{\rho}_{\alpha\rho}) \\ &+ g^{\nu\beta}g^{\tau\alpha}(\Gamma^{\mu}_{\beta\rho}\Gamma^{\rho}_{\tau\alpha} + \Gamma^{\mu}_{\tau\alpha}\Gamma^{\rho}_{\beta\rho} - \Gamma^{\mu}_{\alpha\rho}\Gamma^{\rho}_{\beta\tau} - \Gamma^{\mu}_{\beta\tau}\Gamma^{\rho}_{\alpha\rho}) \\ &+ g^{\beta\tau}g^{\alpha\rho}(\Gamma^{\mu}_{\beta\alpha}\Gamma^{\nu}_{\tau\rho} - \Gamma^{\mu}_{\beta\tau}\Gamma^{\nu}_{\alpha\rho})\Big]. \end{aligned} \tag{3.13.12}$$

由上式可知, $t^{\mu\nu}$ 是描述引力场性质的量; 又由 (3.13.10) 可知 $t^{\mu\nu}$ 不是张量. $t^{\mu\nu}$ 和物质场的能量–动量张量 $T^{\mu\nu}$ 一起, 满足守恒方程

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left[(-g)(T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu})\right] = 0, \tag{3.13.13}$$

所以 $t^{\mu\nu}$ 称为**引力场的能量–动量赝张量**.

由 (3.13.13) 可知, 量

$$P^{\mu} = \int (-g)(T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu})\mathrm{d}S_{\nu} \tag{3.13.14}$$

是守恒量. 当 $t^{\mu\nu} = 0$ 时上式退化为 $\int (-g)T^{\mu\nu}\mathrm{d}S_{\nu}$, 这是狭义相对论中的四维动量. 所以我们可以把 (3.13.14) 确定的 P^{μ} 看作是整个物理系统 (引力场和物质场) 的四维动量. 式中的积分可在任意三维超曲面上进行.

取上式中的积分曲面为 $x^0 = \text{const}$, 则有

$$P^{\mu} = \int (-g)(T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu})\mathrm{d}^3 x. \tag{3.13.15}$$

因此量 $(-g)(T^{00} + t^{00})$ 可解释为物理系统的能量密度, 量 $(-g)(T^{0i} + t^{0i})$ 解释为系统的动量密度或能流密度; 量 $(-g)(T^{ij} + t^{ij})$ 解释为动量流密度. 在没有物质场存在时, $T^{\mu\nu} = 0$, 所以**引力场的能量密度和动量密度**分别是 $(-g)t^{00}$ 和 $(-g)t^{0i}$.

类似地, 也可以得到角动量的守恒定律. 角动量表示为

$$J^{\mu\nu} = \int (x^{\mu}\mathrm{d}p^{\nu} - x^{\mu}\mathrm{d}p^{\prime\prime})$$

$$= \int (-g)[x^{\mu}(T^{\nu\alpha} + t^{\nu\alpha}) - x^{\nu}(t^{\mu\alpha} + t^{\mu\alpha})]\mathrm{d}S_{\alpha}. \tag{3.13.16}$$

显然, 物理系统的总角动量守恒定律在引力场存在时仍然成立.

关于引力场的能量表述, 除本节采用的 Landau-Lifshitz 方案以外, 还有许多其他方案, 但都没有解决下述疑难问题:

(1) 由于 $t^{\mu\nu}$ 不是广义协变张量, 所以总可以在引力场中一点处引入一局部惯性系, 使 $t^{\mu\nu}$ 全部等于零. 这表明引力场能量–动量赝张量 $t^{\mu\nu}$ 是不可定域化的.

(2) 引力场的能量密度 t^{00} 不是处处为正的.

第 4 章　引力场的分类

场的分类问题与描述具体场的严格解有密切联系. 通过场的分类可以对引力场的性质有更深入的理解.

4.1 Petrov 分类

所谓 Petrov 分类, 就是根据 Weyl 张量

$$\begin{aligned}C^{\rho\sigma}_{\mu\nu} =&R^{\rho\sigma}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(g^{\rho}_{\mu}R^{\sigma}_{\nu} - g^{\rho}_{\nu}R^{\sigma}_{\mu} + g^{\sigma}_{\nu}R^{\rho}_{\mu} - g^{\sigma}_{\mu}R^{\rho}_{\nu}) \\ &- \frac{1}{6}(g^{\rho}_{\nu}g^{\sigma}_{\mu} - g^{\sigma}_{\nu}g^{\rho}_{\mu})\end{aligned} \tag{4.1.1}$$

的代数性质对黎曼空–时 (引力场) 进行的分类.

要确定曲率张量的所有代数性质, 只讨论共形 Weyl 张量是不够的. 由引力场方程可知, 所要了解的曲率张量的性质由 Ricci 张量或能量–动量张量给出. 但是在真空场的情况下, Weyl 张量便与曲率张量完全一致. 因此, Petrov 分类实际上是根据曲率张量的代数性质对真空引力场的分类.

张量场 $F_{\mu\nu}$ 的本征方程表示为

$$F_{\mu\nu}S^{\nu} = \lambda S_{\mu}. \tag{4.1.2}$$

式中 S_{μ} 为本征矢, λ 为本征值. 如果张量场 $F_{mu\nu}$ 是反对称的, 则上式用 S^{μ} 缩并可以发现, 要么本征值 $\lambda = 0$, 要么本征矢 S_{μ} 为零矢量. 由 3.11 节中引入的零标架矢量 $(l^{\mu}, n^{\mu}, m^{\mu}, \bar{m}^{\mu})$ 可以构成所有的二阶反对称张量 (双矢). 其中, 零标架矢量的组合

$$\begin{aligned}&M_{\mu\nu} \equiv 2l_{[\mu}n_{\nu]} + 2\bar{m}_{[\mu}m_{\nu]}, \\ &V_{\mu\nu} \equiv 2l_{[\mu}\bar{m}_{\nu]}, \\ &U_{\mu\nu} \equiv 2n_{[\mu}m_{\nu]}\end{aligned} \tag{4.1.3}$$

称为**自对偶双矢**. 在对偶变换下, 上式中各双矢变为自身 (只差一个因子 i)

$$\begin{aligned}&\widetilde{M}_{\mu\alpha} \equiv \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}M^{\alpha\beta} = iM_{\mu\nu}, \\ &\widetilde{V}_{\mu\nu} = iV_{\mu\nu}, \quad \widetilde{U}_{\mu\nu} = iU_{\mu\nu}.\end{aligned} \tag{4.1.4}$$

式中符号 $\sim$ 表示对偶.

由零标架性质可以证明

$$\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}l^{\mu}n^{\nu}m^{\alpha}\bar{m}^{\beta}=i. \tag{4.1.5}$$

根据定义 (4.1.3) 和零矢量的性质, 可以得到自对偶双矢“标量积”的性质

$$\begin{aligned}&M_{\mu\nu}V^{\mu\nu}=M_{\mu\nu}U^{\mu\nu}=U_{\mu\nu}V^{\mu\nu}=U_{\mu\nu}U^{\mu\nu}=0,\\&M_{\mu\nu}M^{\mu\nu}=-4,\quad V_{\mu\nu}U^{\mu\nu}=2.\end{aligned} \tag{4.1.6}$$

反对称实场张量 $F_{\mu\nu}$ 不是自对偶的, 也不可能直接用自对偶双矢 (4.1.3) 展开. 但是我们可以用 $F_{\mu\nu}$ 构成一个复的场张量 $\varPhi_{\mu\nu}$

$$\varPhi_{\mu\nu}\equiv F_{\mu\nu}-\mathrm{i}\widetilde{F}_{\mu\nu}=F_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\mathrm{i}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\sigma\beta}_{\cdot\cdot}. \tag{4.1.7}$$

注意到 $F_{\mu\nu}=-F_{\nu\mu}$, 我们有

$$\widetilde{\varPhi}_{\mu\nu}=\widetilde{F}_{\mu\nu}+\mathrm{i}F_{\mu\nu}=\mathrm{i}\varPhi_{\mu\nu}. \tag{4.1.8}$$

这表明场张量 $\varPhi_{\mu\nu}$ 是自对偶的. 将 $\varPhi_{\mu\nu}$ 用 (4.1.3) 中的双矢展开

$$\varPhi_{\mu\nu}=\phi_0U_{\mu\nu}+\phi_1M_{\mu\nu}+\phi_2V_{\mu\nu}. \tag{4.1.9}$$

展开式系数 ϕ_i 可由原来的实场张量 $F_{\mu\nu}$ 表示出来

$$\begin{aligned}&\phi_0=\frac{1}{2}\varPhi_{\mu\nu}V^{\mu\nu}=F_{\mu\nu}V^{\mu\nu},\\&\phi_1=-\frac{1}{4}\varPhi_{\mu\nu}M^{\mu\nu}=-\frac{1}{2}F_{\mu\nu}M^{\mu\nu},\\&\phi_2=\frac{1}{2}\varPhi_{\mu\nu}U^{\mu\nu}=F_{\mu\nu}U^{\mu\nu}.\end{aligned} \tag{4.1.10}$$

对应于二阶反对称张量 $F_{\mu\nu}$ 的六个独立分量, 上式给出三个独立的复系数.

下面首先讨论电磁场的分类, 然后用形式上相同的方法讨论引力场的分类.

4.2　电磁场的分类

设 $F_{\mu\nu}$ 表示 Maxwell 张量, 则 (4.1.10) 具体表示为

$$\begin{aligned}&\phi_0=B_y-E_x+\mathrm{i}(E_y+B_x),\\&\phi_1=E_z-\mathrm{i}B_z,\\&\phi_2=E_x+B_y+\mathrm{i}(E_y-B_x).\end{aligned} \tag{4.2.1}$$

1. 第一种分类方案

把坐标系变至对称张量的主轴系时, 对称张量的形式变得特别简单. 反对称张量也类似. 适当选择零标架矢量 l^{μ} 的方向, 可使展开式 (4.1.9) 简化.

设 l^{μ} 转至 l'^{μ} 的变换表示为

$$\begin{aligned} l'^{\mu} &= l^{\mu} - E^2 n^{\mu} + E m^{\mu} + \bar{E}\bar{m}^{\mu}, \\ n'^{\mu} &= n^{\mu}, \quad m'^{\mu} = m^{\mu} - \bar{E} n^{\mu}. \end{aligned} \tag{4.2.2}$$

式中 E 为复参量, 自对偶双矢的变换为

$$\begin{aligned} M'_{\mu\nu} &= M_{\mu\nu} - 2EU_{\mu\nu}, \\ V'_{\mu\nu} &= V_{\mu\nu} - EM_{\mu\nu} + E^2 U_{\mu\nu}, \\ U'_{\mu\nu} &= U_{\mu\nu}. \end{aligned} \tag{4.2.3}$$

由上式可以得到展开式系数 ϕ_i 的变换关系

$$\begin{aligned} \phi_0 &= \phi'_0 - 2E\phi'_1 + E^2\phi'_2, \\ \phi_1 &= \phi'_1 - E\phi'_2, \quad \phi_2 = \phi'_2. \end{aligned} \tag{4.2.4}$$

适当选择参量 E, 即适当选择 l'^{μ} 的方向, 可使 ϕ'_0 或 ϕ'_1 等于零, 从而简化展开式 (4.1.9). 将带撇的量和不带撇的量对换, 然后令

$$\phi_0 - 2E\phi_1 + E^2\phi_2 = 0. \tag{4.2.5}$$

把方程 (4.2.5) 看作关于 E 的二次代数方程, 根据这一方程根的个数可以把电磁场分为两类. 满足条件

$$\phi_1^2 - \phi_2\phi_0 \neq 0 \tag{4.2.6}$$

的电磁场称为**非退化场**. 这类场存在两个不同的 l'^{μ} 方向使 $\phi'_0 = 0$.

满足条件

$$\phi_1^2 - \phi_2\phi_0 = 0 \tag{4.2.7}$$

的电磁场称为**退化场或零场**. 这类场只有一个 l'^{μ} 的方向使 $\phi_0 = 0$.

由 (4.1.6) 和 (4.1.9) 可知,

$$\phi_1^2 - \phi_2\phi_0 = -4\Phi_{\mu\nu}\Phi^{\mu\nu} = -2(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \mathrm{i}F_{\mu\nu}\widetilde{F}^{\mu\nu}). \tag{4.2.8}$$

表达式 $\phi_1^2 - \phi_2\phi_0$ 只与电磁场张量有关. 由此可以清楚地看到, 上面的分类与零标架的选择无关, 与双矢展开式也无关. 式 (4.2.8) 使上述分类方案的表述更加简单:

电磁场是退化 (或零场) 的充分且必要条件是

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = F_{\mu\nu}\widetilde{F}^{\mu\nu} = 0. \tag{4.2.9}$$

2. 第二种分类方案

我们可以用本征方程和本征矢的语言来表述电磁场的分类. 由 (4.1.9) 和 (4.1.3) 可知, $\phi_0 = 0$ 等效于

$$\Phi_{\mu\nu} l^\nu = (F_{\mu\nu} - \mathrm{i}\widetilde{F}_{\mu\nu}) l^\nu = \phi_1 l_\mu. \tag{4.2.10}$$

因此, 对于非退化场, 本征方程 (4.2.9) 或者

$$L_{[\mu} F_{\nu]\tau} l^\tau = l_{[\mu} \widetilde{F}_{\nu]\tau} l^\tau = 0 \tag{4.2.11}$$

有两个不同的零本征矢 l^μ.

退化场或零场 ($\phi_0 = \phi_1 = 0$) 则只有一个零本征矢. 退化场张量 (4.1.9) 具有简单的形式 $\Phi_{\mu\nu} = \phi_2 V_{\mu\nu}$, 即

$$F_{\mu\nu} = l_\mu p_\nu - l_\nu p_\mu, \quad p_\mu l^\mu = p_\mu n^\mu = 0. \tag{4.2.12}$$

3. 物理意义

零电磁场最简单的例子是 Minkowski 空间的平面波

$$\begin{aligned} A_\mu &= \mathrm{Re}[\, p_\mu \exp(\mathrm{i}\kappa_\sigma x^\sigma)], \\ F_{\mu\nu} &= \mathrm{Re}[\mathrm{i}(p_\mu k_\nu - p_\nu k_\mu)\exp(\mathrm{i}k_\sigma x^\sigma)]. \end{aligned} \tag{4.2.13}$$

式中

$$p_\mu k^\mu = k_\mu k^\mu = 0.$$

很容易证明上式满足零场的充分且必要条件 (4.2.9).

在远离孤立荷电系统的地方, 可将系统 (源) 发出的引力辐射看作平面波, 此时四维势用源参量表示为推迟势 ($c = 1$)

$$A_\mu(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{j_\mu(\boldsymbol{r}', t - |\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}|)}{|\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}|} \mathrm{d}^3 x'. \tag{4.2.14}$$

场张量按 r^{-1} 展开为

$$F_{\mu\nu} = F^{(1)}_{\mu\nu} r^{-1} + F^{(2)}_{\mu\nu} r^{-2} + \cdots, \tag{4.2.15}$$

由此可知 $F^{(1)}_{\mu\nu}$ 具有形式

$$F^{(1)}_{\mu\nu} = p_\mu k_\nu - p_\nu k_\mu. \tag{4.2.16}$$

式中

$$p_\mu = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int j_\mu(\boldsymbol{r}', t - |\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}|) \mathrm{d}^3 x',$$

$$k_\nu = -(t - |\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}|)_{,\nu} = \begin{pmatrix} \dfrac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}|}, \\ -1 \end{pmatrix} \approx (\widehat{\boldsymbol{r}}, -1),$$

$$k_\mu k^\mu = 0, \quad A^\mu_{,\mu} \approx p^\mu k_\mu = 0. \tag{4.2.17}$$

零场的能量–动量张量具有简单的形式

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} F^\sigma_\mu F_{\sigma\nu} = \frac{1}{4\pi} p_\sigma p^\sigma k_\mu k_\nu. \tag{4.2.18}$$

在局部洛伦兹系中, 能流密度 $S^i = T^{0i}$ 和能量密度 $w = T^{00}$ 之间的关系为 $|\boldsymbol{S}| = w$. 可见零电磁场是纯辐射场.

零电磁场的场张量 $\varPhi_{\mu\nu} = \phi_2 V_{\mu\nu}$, 场方程可化为

$$\begin{aligned}\varPhi^{\mu\nu}_{;\nu} &= [\phi_2(l^\mu \bar{m}^\nu - l^\mu \bar{m}\mu)]_{;\nu} \\ &= (\phi_2 l^\mu)_{;\nu} \bar{m}^\nu + \phi_2 l^\mu \bar{m}^\nu_{;\nu} - (\phi_2 l^\nu)_{;\nu} \bar{m}^\mu - \phi_2 l^\nu \bar{m}^{\mu\nu}_{;} \\ &= 0.\end{aligned} \tag{4.2.19}$$

用 l_μ 乘以上式, 缩并, 并注意到 $l^\mu l_{\mu;\nu} = 0$, $l_\mu \bar{m}^\mu_{;\nu} = -l_{\mu;\nu}\bar{m}^\mu$, 我们得到

$$l_{\mu;\nu} l^\nu \bar{m}^\mu = 0, \tag{4.2.20}$$

即

$$l_{\mu;\nu} l^\nu = \lambda l_\mu. \tag{4.2.21}$$

由此可得

$$l_{[\mu} l_{\tau];\nu} l^\nu = 0. \tag{4.2.22}$$

总能找到一个 λ 值, 使下式成立:

$$(\lambda l_{\mu;\nu} - \lambda_{,\nu}) l^\nu = 0, \tag{4.2.23}$$

或写成

$$(\lambda l)_{\mu;\nu} (\lambda l)^\nu = 0. \tag{4.2.24}$$

将上式与短程线方程

$$u_{\mu;\nu} u^\nu = 0, \quad u^\mu \equiv \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s}$$

比较, 可知 $u^\mu = \lambda l^\mu$. 这就是说, 退化电磁场的零本征矢量场 l^μ 是短程线矢量场.

将 (4.2.20) 两边乘以 $\bar{m}^\mu$ 缩并, 得到

$$l_{\mu;\nu} \bar{m}^\mu \bar{m}^\nu = 0. \tag{4.2.25}$$

由此可知**世界线汇的剪切度 $\boldsymbol{\sigma}$ 等于零**[见 (3.11.30) 和 (3.11.27)].

综上所述, 零场 (退化电磁场) 是平面波的推广; 它的零本征矢量场是无切的短程线矢量场.

4.3 引力场的分类

跟构成复电磁场张量 $\Phi_{\mu\nu}$ 类似, 可以用 Weyl 张量构成复引力场张量 $\Phi_{\mu\nu\alpha\beta}$

$$\Phi_{\mu\nu\alpha\beta} \equiv C_{\mu\nu\alpha\beta} - \mathrm{i}\widetilde{C}_{\mu\nu\alpha\beta} \equiv C_{\mu\nu\alpha\beta} - \frac{1}{2}\mathrm{i}\varepsilon_{\alpha\beta\tau\sigma}C^{\tau\sigma}_{\mu\nu}. \tag{4.3.1}$$

由此可得

$$\widetilde{\Phi}_{\mu\nu\alpha\beta} \equiv \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\tau\lambda}\Phi^{\tau\lambda}_{\mu\nu} = \mathrm{i}\,\Phi_{\mu\nu\alpha\beta}, \tag{4.3.2a}$$

即 $\Phi_{\mu\nu\alpha\beta}$ 关于后两个指标是自对偶的. 由 Weyl 张量的定义 (4.1.1) 得到 $C^{\mu\nu}_{\mu\lambda} = 0$. 由此可以证明

$$\widetilde{C}_{\mu\nu\alpha\beta} \equiv \frac{1}{4}\varepsilon_{\mu\nu\tau\sigma}\varepsilon_{\alpha\beta\lambda\rho}C^{\tau\sigma\lambda\rho} = -C_{\mu\nu\alpha\beta}, \tag{4.3.2b}$$

此式表明张量 $\Phi_{\mu\nu\alpha\beta}$ 对于前两个指标也是自对偶的. 于是与 (4.19) 类似, 可以将 $\Phi_{\mu\nu\alpha\beta}$ 用自对偶双矢 (4.1.3) 展开

$$\begin{aligned}\Phi_{\mu\nu\alpha\beta} =& \phi_1 V_{\mu\nu}V_{\alpha\beta} + \phi_2(V_{\mu\nu}M_{\alpha\beta} + V_{\alpha\beta}M_{\mu\nu}) \\ &+ \phi_3(V_{\mu\nu}U_{\alpha\beta} + V_{\alpha\beta}U_{\mu\nu} + M_{\mu\nu}M_{\alpha\beta}) \\ &+ \phi_4(U_{\mu\nu}M_{\alpha\beta} + U_{\alpha\beta}M_{\mu\nu}) + \phi_5 U_{\mu\nu}U_{\alpha\beta},\end{aligned} \tag{4.3.3}$$

此式含有 5 个复系数, 张量 Φ 有 10 个独立分量.

1. 引力场的第一种分类方案

采用零标架和自对偶双矢, 使展开式 (4.3.3) 简化, 重复由 (4.1.9)→(4.2.4) 的过程, 然后令 $\phi'_5 = 0$, 即

$$\phi'_5 = \phi_5 - 4\phi_4 E + 6\phi_3 E^2 - 4\phi_2 E^3 + \phi_1 E^4 = 0. \tag{4.3.4}$$

这一四次代数方程的四个根对应于本征矢 l^μ 的四个方向, 根据这四个根的重复情况, 可将引力场 (Rieman 时空) 分为 Petrov Ⅰ型 ～ O 型.

Ⅰ型: 4 个不同的根

Ⅱ型: 3 个不同的根, 其中 1 个为二重根

D 型: 2 个不同的根, 均为二重根

Ⅲ型: 2 个不同的根, 其中 1 个为三重根

N 型: 1 个四重根

O 型: Weyl 张量恒为零, 全部 $\phi'_A = 0$　　(4.3.5)

2. 引力场的第二种分类方案

采用 (4.3.1) 和 (4.1.4), 可直接用 Weyl 张量和零标架矢量的乘积来表示系数 ϕ_A:

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= \frac{1}{4}C_{\mu\nu\alpha\beta}U^{\mu\nu}U^{\alpha\beta} = 2C_{\mu\nu\alpha\beta}n^\mu n^\nu m^\alpha m^\beta, \\
\phi_2 &= -\frac{1}{4}C_{\mu\nu\alpha\beta}U^{\mu\nu}M^{\alpha\beta} = -C_{\mu\nu\alpha\beta}n^\mu m^\nu(l^\alpha n^\beta + \bar{m}^\alpha m^\beta), \\
\phi_3 &= \frac{1}{2}C_{\mu\nu\alpha\beta}U^{\mu\nu}V^{\alpha\beta} = 2C_{\mu\nu\alpha\beta}n^\mu m^\nu l^\alpha \bar{m}^\beta, \\
\phi_4 &= -\frac{1}{4}C_{\mu\nu\alpha\beta}V^{\mu\nu}M^{\alpha\beta} = -C_{\mu\nu\alpha\beta}l^\mu \bar{m}^\nu(l^\alpha n^\beta + \bar{m}^\alpha m^\beta), \\
\phi_5 &= \frac{1}{2}C_{\mu\nu\alpha\beta}V^{\mu\nu}V^{\alpha\beta} = 2C_{\mu\nu\alpha\beta}l^\mu l^\nu \bar{m}^\alpha \bar{m}^\beta.
\end{aligned} \tag{4.3.6}$$

对于零本征矢 $l^\mu, \phi_5 = 0$; 由此可知实对称张量

$$S_{\mu\nu} \equiv C_{\mu\alpha\beta\nu}l^\alpha l^\beta \tag{4.3.7}$$

不含有 $m^\alpha m^\nu$ 和 $\bar{m}^\alpha \bar{m}^\nu$ 的项, 再应用 Weyl 张量的对称性, 可得

$$S_{\mu\nu}l^\nu = 0, \quad S^\mu_\mu = C^\mu_{\nu\alpha\mu}l^\nu l^\alpha = -C_{\nu\alpha}l^\nu l^\alpha = 0. \tag{4.3.8}$$

由此可将 $S_{\mu\nu}$ 用零标架矢量表示出来

$$S_{\mu\nu} \equiv \alpha l_\mu l_\nu + \mathrm{Re}[\beta(l_\mu \bar{m}_\nu + l_\nu \bar{m}_\mu)]. \tag{4.3.9}$$

所以, Weyl 张量的本征矢 l^μ 具有如下性质:

$$L_{[\mu}C_{\nu]\alpha\beta[\tau}l_{\sigma]}l^\alpha l^\beta = 0 \leftrightarrows \phi_5 = 0, \tag{4.3.10}$$

这时引力场为 I 型.

如果两个本征矢重合 [$E = 0$ 是方程 (4.3.4) 的二重根], 则必有 $\phi_5 = \phi_4 = 0$. 此时由 (4.3.6) 可得

$$l_{[\mu}C_{\nu]\alpha\beta\tau}l^\alpha l^\beta = 0 \leftrightarrows \phi_5 = \phi_4 = 0, \tag{4.3.11}$$

这时引力场为 II 型. 继续讨论可得到 D 型 $\sim O$ 型系数 ϕ_A 为零的个数和 Wcyl 张量满足的条件. 按所得的结果, 分类如下:

	不同零本征矢个数	为零系数	$C_{\mu\nu\alpha\beta}$ 满足条件
I 型	4	ϕ_5	$L_{[\mu}C_{\nu]\alpha\beta[\tau}l_{\sigma]}l^\alpha l^\beta=0$
II 型	3	ϕ_5,ϕ_4	$l_{[\mu}C_{\nu]\alpha\beta\tau}l^\alpha l^\beta=0$
D 型	2	ϕ_5,ϕ_4	$l_{[\mu}C_{\nu]\alpha\beta\tau}l^\alpha=0$
III型	2	ϕ_5,ϕ_4,ϕ_3	$C_{\mu\nu\alpha\beta}l^\mu=0$
N 型	1	$\phi_5,\phi_4\phi_3\phi_2$	$C_{\mu\nu\alpha\beta}=0$
O 型	0	全部 ϕ_A	

(4.3.12)

Penrose 图 (图 2-6) 给出了退化的情况：每个箭头表示一个附加的退化.

经过零标架旋转 (l^μ 固定)

$$\begin{aligned}l'^\mu&=Al^\mu,\\ n'^\mu&=A^{-1}n^\mu-AB\bar{B}l^\mu+Bm^\mu+\bar{B}\bar{m}^\mu,\\ m'^\mu&=\mathrm{e}^{\mathrm{i}C}m^\mu-\mathrm{e}^{\mathrm{i}C}A\bar{B}l^\mu;\end{aligned}\tag{4.3.13}$$

式中 $A>0$, C 是实的, B 是复的, 适当选择 A,B,C, 还可以使 I 型的 $\phi_3=0$; 使 D 型的 $\phi_1=\phi_2=0$; 使II型的 $\phi_2=0$; 使III型的 $\phi_1=0$.

对于真空引力场, Weyl 张量和曲率张量相等, 所以上面的讨论对曲率张量也成立.

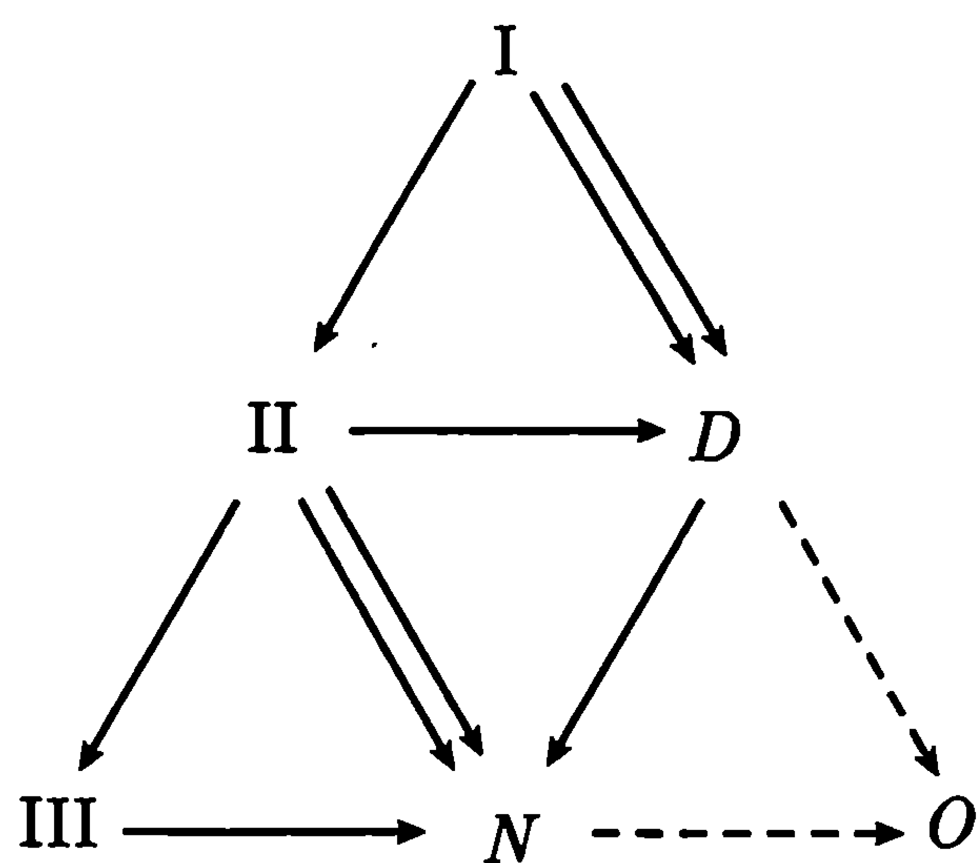


图 2-6

退化真空引力场最简单的例子是平面引力波, 与电磁场的情况相似. 由于 $R_{\mu\nu\alpha\beta}l^\beta.=0, l^\mu l_\mu=0$, 所以是 Petrov N 型的.

由毕安基恒等式, 可以导出退化场零本征矢 l^μ 的两个简单性质. 用上面对 Weyl 张量用过的符号, 毕安基恒等式可写为

$$\widetilde{R}^{\alpha\beta}_{\mu\nu;\beta}=0,\quad \varPhi^{\mu\nu\alpha\beta}(R)_{;\beta}=0.\tag{4.3.14}$$

先讨论II型和 D 型 ($\phi_5=\phi_4=0,\phi_3\neq0$) 的情况. 由于

$$V_{\mu\nu;\alpha}M^{\mu\nu}=4l_{\mu;\alpha}\bar{m}^\mu,\tag{4.3.15}$$

代入 (4.3.3) 和 (4.3.14), 得到

$$\begin{aligned}0=&\varPhi^{\mu\nu\alpha\beta}_{;\beta}V_{\mu\nu}=(\varPhi^{\mu\nu\alpha\beta}V_{\mu\nu})_{;\beta}-\varPhi^{\mu\nu\alpha\beta}V_{\mu\nu;\beta}\\ =&2(\phi_3V^{\alpha\beta})_{;\beta}-4\phi_2V^{\alpha\beta}l_{\mu;\beta}\bar{m}^\mu-\phi_3U^{\mu\nu}V^{\alpha\beta}V_{\mu\nu;\beta}-4\phi_3M^{\alpha\beta}l_{\mu;\beta}\bar{m}^\mu.\end{aligned}\tag{4.3.16}$$

用 l_α 乘以上式并缩并, 我们得到

$$V^{\alpha\beta}_{;\beta}l_\alpha+2l_{\alpha;\beta}\bar{m}^\alpha\bar{m}^\beta=3l_{\alpha;\beta}\bar{m}^\alpha l^\beta=0,\tag{4.3.17}$$

此即 (4.2.19) 式. 所以, **退化场的零本征矢量场l^μ 是短程线矢量场**. 用 $\bar{m}_\alpha$ 乘以 (4.3.16) 并缩并, 得到

$$V^{\alpha\beta}_{;\beta}\bar{m}_\alpha + 2l_{\alpha;\beta}\bar{m}^\alpha\bar{m}^\beta = 3l_{\alpha;\beta}\bar{m}^\alpha\bar{m}^\beta = 0, \tag{4.3.18}$$

此即 (4.2.25) 式. 此式表明**零本征矢量场l^μ** 是无切的 ($\sigma = 0$).

我们对于 $\phi_5 = \phi_4 = 0$ (II 型和 D 型) 退化真空引力场证明了定理: 退化真空引力场的零本征矢构成无切的短程线汇. 其他类型的退化场可用类似方法证明. 这一定理的逆定理 (Goldberg-Sachs 定理) 是: 如果有一个无切的短程线汇真空解 (引力场), 则这个解一定是退化的, 且线汇是本征线汇.

第三篇　一些特殊形式的引力场

广义相对论的发展在很大程度上取决于引力场方程的解和它们物理解释. 由于数学上的复杂性, 获得场方程的严格解是十分艰难的. 因此, 人们一方面运用各种数学技巧寻找新的严格解, 一方面寻找“生成技术”, 即寻找一些变换, 由一个已知解生成一个新解 (或解簇).

第 1 章　一些特殊形式引力场方程的解

1.1　任意变速参考系中的引力场

根据等效原理, 这一参考系中存在引力场, 其能–动张量 $T_{\mu\nu}=0$.

选取直角坐标系, 设参考系沿 x 轴方向具有加速度 $g(t)$, 参考系本身是刚性的. 不失一般性, 可将所求的度规写成下面的形式:

$$\mathrm{d}s^2 = w(x,t)\mathrm{d}x^{0^2} - \mathrm{d}x^{1^2} - \mathrm{d}x^{2^2} - \mathrm{d}x^{3^2}, \tag{1.1.1}$$

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z.$$

由此得到 $\Gamma^{\tau}_{\mu\nu}$ 的不为零分量

$$\begin{aligned}
\Gamma^0_{00} &= \frac{1}{2cw(x,t)}\frac{\partial w(x,t)}{\partial t,} \\
\Gamma^0_{01} = \Gamma^0_{10} &= \frac{1}{2w(x,t)}\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}, \\
\Gamma^1_{00} &= \frac{1}{2}\frac{\partial w(x,t)}{\partial x},
\end{aligned} \tag{1.1.2}$$

由于 $T_{\mu\nu}=0$, 场方程简化为 $R_{\mu\nu}=0$. 将上式代入得

$$\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{2w(x,t)}\left[\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\right]^2 = 0. \tag{1.1.3}$$

令 $w(x,t)=X(x)T(t)$ 代入上式得

$$\frac{\mathrm{d}^2 X(x)}{\mathrm{d}x^2}T(t) - \frac{T(t)}{2X(x)}\left[\frac{\mathrm{d}X(x)}{\mathrm{d}x}\right]^2 = 0.$$

由于 $w(x,t)\neq 0$, 故 $T(t)\neq 0$, 故有

$$\frac{\mathrm{d}^2 X(x)}{\mathrm{d}x^2} - \frac{1}{2X(x)}\left[\frac{\mathrm{d}X(x)}{\mathrm{d}x}\right]^2 = 0.$$

解之得

$$X(x) = (A_1 + B_1 x)^2.$$

式中 A_1 和 B_1 为积分常数. 代回 $w(x,t)=X(x)T(t)$ 得

$$w(x,t) = [A(t) + B(t)x]^2. \tag{1.1.4}$$

为了确定 $A(t)$ 和 $B(t)$, 我们取 $w(x,t)$ 的渐近式. 当参考系的加速度 $g(t)\to 0$ 时, 应有 $w(x,t)\to$ 常数, $B\to 0$. 因此在渐近情况下, 可将 $w(x,t)$ 展开, 略去 $B(t)$ 的高阶项

$$w(x,t)=A^2(t)+2A(t)B(t)x. \tag{1.1.5}$$

另一方面,

$$g_{00}=w(x,t)=1+\frac{2U}{c^2},$$

在加速度 $g(t)$ 很小时, 引力势 U 可按牛顿力学计算

$$U=g(t)x,$$

于是

$$w(x,t)=1+\frac{g(t)x}{c^2}. \tag{1.1.6}$$

比较 (1.1.5) 和 (1.1.6), 得到

$$A(t)=1,\quad B(t)=\frac{g(t)}{c^2}.$$

最后得到所求的场方程的解

$$\mathrm{d}s^2=[1+g(t)x/c^2]^2c^2\mathrm{d}t^2-\mathrm{d}x^2-\mathrm{d}y^2-\mathrm{d}z^2. \tag{1.1.7}$$

式中 $g(t)$ 是参考系的加速度, 可为时间 t 的任意函数.

当 $g(t)=g=$ 常数时, C. Moller 由一个纯数学的坐标变换的方法 (不解引力场方程) 得到了与 (1.1.7) 类似的度规, 但没有讨论 g 是时间函数的情形. Moller 所采用的坐标变换是

$$\begin{aligned}&X=\frac{c^2}{g}\left(\mathrm{ch}\frac{gt}{c}-1\right)+x\mathrm{ch}\frac{gt}{c},\\&Y=y,\quad Z=z,\\&T=\frac{c}{g}\mathrm{sh}\frac{gt}{c}+\frac{x}{c}\mathrm{sh}\frac{gt}{c}.\end{aligned} \tag{1.1.8}$$

式中 X,Y,Z,T 表示惯性系的坐标; x,y,z,t 表示匀加速系的坐标. 通过变换 (1.1.8), 由惯性系的度规

$$\mathrm{d}s^2=c^2\mathrm{d}T^2-\mathrm{d}X^2-\mathrm{d}Y^2-\mathrm{d}Z^2 \tag{1.1.9}$$

变换为

$$\mathrm{d}s^2=c^2(1+gx/c^2)^2\mathrm{d}t^2-\mathrm{d}x^2-\mathrm{d}y^2-\mathrm{d}z^2 \tag{1.1.10}$$

现在, 我们解引力场方程得到了度规 (1.1.7), 从而可以寻找一个变换, 使 (1.1.9) 变换为 (1.1.7), 这一变换可以叫做广义 Moller 变换. 设所寻求的变换为

$$X^\nu=X^\nu(x^\mu),\quad \mu,\nu=0,1$$

$$Y=y,\quad Z=z.$$

代入 (1.1.7) 和 (1.1.9) 得

$$
\begin{aligned}
& -\mathrm{d}x^2+c^2\left[1+\frac{g(t)x}{c^2}\right]^2\mathrm{d}t^2 \\
=& -\left[\frac{\partial X(x,t)}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial X(x,t)}{\partial t}\mathrm{d}t\right]^2 \\
& +c^2\left[\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial T(x,t)}{\partial t}\mathrm{d}t\right]^2,
\end{aligned}
$$

从而得到方程组

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial X(x,t)}{\partial x}\cdot\frac{\partial X(x,t)}{\partial t}=c^2\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\cdot\frac{\partial T(x,t)}{\partial t}, \\
& -\left[\frac{\partial X(x,t)}{\partial x}\right]^2+c^2\left[\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\right]^2=-1, \\
& -\left[\frac{\partial X(x,t)}{\partial x}\right]^2+c^2\left[\frac{\partial T(x,t)}{\partial t}\right]^2=c^2\left[1+\frac{g(t)x}{c^2}\right]^2.
\end{aligned}
\tag{1.1.11}
$$

解此方程组得

$$
\begin{aligned}
X(x,t) &= c\int_{t_0'}^{t}\mathrm{sh}\left[\int_{t_0}^{t}\frac{g(t)}{c}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}t+x\,\mathrm{ch}\int_{t_0}^{t}\frac{g(t)}{c}\mathrm{d}t, \\
T(x,t) &= \int_{t_0''}^{t}\mathrm{ch}\left[\int_{t_0}^{t}\frac{g(t)}{c}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}t+\frac{x}{c}\mathrm{sh}\int_{t_0}^{t}\frac{g(t)}{c}\mathrm{d}t, \\
Y &= y,\quad Z=z.
\end{aligned}
\tag{1.1.12}
$$

此即所寻求的变换. 当 $g(t)=g=$ 常数时, 只要适当移动一下坐标原点并调整一下坐标刻度, (1.1.12) 便退化为 Moller 变换 (1.1.8).

度规 (1.1.7) 具有相当广泛的意义. 它适用于坐标系作加速平移、振动以及更广泛形式的运动.

1.2 Schwarzschild 外部解

设引力质量位于坐标系原点, 且具有球对称性, 取球坐标, 线元可写为

$$
\mathrm{d}s^2=\mathrm{e}^{\nu}c^2\mathrm{d}t^2-\mathrm{e}^{\lambda}\mathrm{d}r^2-r^2(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2). \tag{1.2.1}
$$

对于质量外部, $T_{\mu\nu}=0$, 从而 Einstein 方程成为

$$
R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R=0.
$$

将上式乘以 $g^{\mu\nu}$ 缩并, 得 $R=0$. 真空 Einstein 方程为

$$R_{\mu\nu} = 0. \tag{1.2.2}$$

由 (1.2.1) 直接得到 $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ 的不为零分量

$$\begin{aligned}
&\Gamma^0_{00} = \frac{1}{2c}\frac{\partial\nu}{\partial t}, \quad \Gamma^0_{01} = \Gamma^0_{10} = \frac{1}{2}\frac{\partial\nu}{\partial r},\\
&\Gamma^1_{00} = \frac{1}{2c}\frac{\partial\nu}{\partial r}\mathrm{e}^{\nu-\lambda}, \quad \Gamma^1_{01} = \Gamma^1_{10} = \frac{1}{2c}\frac{\partial\lambda}{\partial t},\\
&\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2c}\frac{\partial\lambda}{\partial r}, \quad \Gamma^0_{11} = \frac{1}{2c}\frac{\partial\lambda}{\partial t}\mathrm{e}^{\lambda-\nu},\\
&\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = \frac{1}{r},\\
&\Gamma^1_{22} = -r\mathrm{e}^{-\lambda}, \quad \Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = \cot\theta,\\
&\Gamma^1_{33} = -r\sin^2\theta\mathrm{e}^{-\lambda}, \quad \Gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta.
\end{aligned} \tag{1.2.3}$$

可以将上面诸式代入 (1.2.2), 但我们给出 $G^\nu_\mu = R^\nu_\mu - \frac{1}{2}g^\nu_\mu R$ 的表示式, 以便于在其他球对称场合应用. G^ν_μ 的不为零分量为

$$\begin{aligned}
G^0_0 &= -\mathrm{e}^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial\lambda}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2},\\
G^1_0 &= -\frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{rc}\frac{\partial\lambda}{\partial t},\\
G^2_2 = G^3_3 &= -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\lambda}\left[\frac{\partial^2\nu}{\partial r^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\nu}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial\nu}{\partial r} - \frac{\partial\lambda}{\partial r}\right)\right.\\
&\quad \left. - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\nu}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\lambda}{\partial r}\right)\right] + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\nu}\left[\frac{\partial^2\lambda}{c^2\partial t^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\lambda}{c\partial t}\right)^2\right.\\
&\quad \left. + \frac{1}{2c}\frac{\partial\lambda}{\partial t}\frac{\partial\nu}{\partial t}\right],\\
G^1_1 &= -\mathrm{e}^{-\lambda}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\nu}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{r^2}.
\end{aligned} \tag{1.2.4}$$

分别令 (1.2.4) 诸式等于零, 得到下列独立的方程:

$$\frac{\partial\nu}{\partial r} + \frac{1}{r} - \frac{\mathrm{e}^\lambda}{r} = 0, \tag{1.2.5}$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial r} - \frac{1}{r} + \frac{\mathrm{e}^\lambda}{r} = 0, \tag{1.2.6}$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial t} = 0. \tag{1.2.7}$$

由上式有

$$\lambda = \lambda(r), \quad \frac{\partial}{\partial r}(\nu + \lambda) = 0. \tag{1.2.8}$$

根据 (1.2.8), 可直接得到 Birkhoff 定理 (1927). 实际上, 由上式得

$$\nu = -\lambda(r) + f(t),$$

故有 $\mathrm{e}^{\nu} = \mathrm{e}^{f(t)}\mathrm{e}^{-\lambda(r)}$. 代入 (1.2.1) 并令

$$\mathrm{e}^{f(t)}\mathrm{d}t^2 = \mathrm{d}\tilde{t}^2.$$

最后去掉 $\mathrm{d}\tilde{t}$ 上的波号, 便得

$$\nu = \nu(r) = -\lambda = -\lambda(r). \tag{1.2.9}$$

这就是说, **真空球对称引力场一定是静态的**. 此即 Birkhoff 定理.

将 (1.2.9) 代回 (1.2.5) 或 (1.2.6), 积分得

$$\mathrm{e}^{\nu} = \mathrm{e}^{-\lambda} = 1 + \frac{K}{r}. \tag{1.2.10}$$

为了确定式中的积分常数 K, 我们采用渐近平直的边界条件: 当 $r \to \infty$ 时, 平直空间的牛顿定律成立. 此时引力势应为 $U = -G\dfrac{M}{r}$. 由此可得

$$g_{00} = 1 + \frac{2U}{c^2} = 1 - \frac{2GM}{c^2 r},$$

由此得

$$K = -\frac{2GM}{c^2} = -2m, \tag{1.2.11}$$

其中 $m \equiv \dfrac{GM}{c^2}$. 于是得到球对称质量外部解 (Schwarzschild 外部解)

$$\mathrm{d}s^2 = (1 - 2m/r)c^2\mathrm{d}t^2 - \frac{\mathrm{d}r^2}{1 - 2m/r} - r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2). \tag{1.2.12}$$

此解由 K.Schwarzschild 于 1916 年给出.

Schwarzschild 解 (1.2.12) 是当宇宙因子 $\lambda = 0$ 时, 在球坐标系中真空场方程的严格解. 虽然原则上曲线坐标中的量是和测量无关的, 但球坐标中的 φ 和 θ 常和天文测量的量相同; r 和天文坐标的差别不超过八百万分之一. 度规中所含的常数 M 为中心物体的质量. 对于太阳, $m_{\odot} = GM_{\odot}/c^2 = 1.4766 \times 10^5\mathrm{cm}$; 对于地球, $m_e = GM_e/c^2 = 0.4438\mathrm{cm}$. 如果太阳和地球的引力场用 (1.2.12) 描述, 则在太阳表面有 $m/r = 2.122 \times 10^{-6}$, 在地球表面有 $m/r = 6.980 \times 10^{-10}$. 显然, 在通常情况条件下 $m \ll r$ 是满足的.

$\lambda \neq 0$ 的球对称真空场, de Sitter 于 1917 年给出了场方程的解

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{\lambda}{3}r^2\right)\mathrm{d}x^{02} - \left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{\lambda}{3}r^2\right)^{-1}\mathrm{d}t^2 - r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2). \tag{1.2.13}$$

1.3　Reissner-Nordström 解

1.2 节中, 我们认为中心质量不具有电荷. 如果中心质量源除具有质量之外还具有电荷 e, 由于电荷 e 激发的电磁场充满整个空间, 作为物质存在的一种形式, 它同样能够激发引力场, 即作为引力场源. 因此, 质量外部不再满足 $T_{\mu\nu}=0$, 而代之以

$$T^{\mu\nu}=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{4}g^{\mu\nu}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}-g^{\nu\rho}F^{\mu\lambda}F_{\lambda\rho}\right). \tag{1.3.1}$$

不难证明,$F_{21}=F_{31}=0$. 为此, 我们采用 Maxwell 方程

$$F^{\mu\nu}_{;\nu}=0,$$

即

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu}(\sqrt{-g}F^{\mu\nu})=0. \tag{1.3.2}$$

由 $\dfrac{\partial}{\partial x^\nu}(\sqrt{-g}F^{2\nu})=0$ 得

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu}(\sqrt{-g}g^{22}g^{11}F_{21})=\frac{\partial}{\partial r}\{F_{21}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\lambda-\nu)}\sin\theta\}=0,$$

即

$$F_{21}=C\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(\lambda-\nu)}. \tag{1.3.3}$$

式中 C 是积分常数. 根据空间的渐近平直性质, 当 $r\to\infty$ 时, 未知的度规 (1.2.1) 应趋近于 Minkowski 度规, 即 $\lambda\to 0,\nu\to 0$; 另一方面, 当 $r\to\infty$ 时应有 $F_{21}\to 0$. 由此得到 $C=0$. 这样,F_{21} 处处为零; 同理可证 F_{31} 处处为零.

由于球对称性, 四维势 A_μ 只含 r, 所以 $F_{\mu\nu}=\dfrac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu}-\dfrac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}$ 只有脚标含有 1 的分量不为零, 即 F_{21},F_{31} 和 F_{01} 不为零. 由于 F_{21} 和 F_{31} 已为零, 于是只要求出 F_{01}. 为此, 仍可利用式

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu}(\sqrt{-g}F^{0\nu})=0.$$

此式可写为

$$\frac{\partial}{\partial r}\left\{-F_{01}r^2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\lambda+\nu)}\sin\theta\right\}=0,$$

积分得

$$F_{01}=-F_{10}=\frac{Q}{r^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(\nu+\lambda)}. \tag{1.3.4}$$

式中 Q 为积分常数. 当 $r\to\infty$ 时, E_{10} 应表示点电荷的场强 $E_r=Q/r^2$, 于是上式中的 Q 即为场源的电荷.

将 (1.3.4) 代入 (1.3.1) 得到电磁场的能 – 动张量的不为零分量

$$T_0^0 = T_1^1 = -T_2^2 = -T_3^3 = \frac{Q^2}{8\pi r^4}. \tag{1.3.5}$$

由 (1.2.4) 和 (1.2.5) 得到场方程

$$\mathrm{e}^{-\lambda}\left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{r^2} = \frac{kQ^2}{8\pi r^4}, \tag{1.3.6}$$

$$\mathrm{e}^{-\lambda}\left(\frac{\nu''}{r} - \frac{\lambda'\nu'}{4} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu' - \lambda'}{2r}\right) = \frac{kQ^2}{8\pi r^4}, \tag{1.3.7}$$

$$-\mathrm{e}^{-\lambda}\left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{r^2} = \frac{k^2}{8\pi k^4}, \tag{1.3.8}$$

由 (1.3.6) 和 (1.3.8) 得到 $\lambda = -\nu$, 代回原二式得

$$\mathrm{e}^{\nu}(1 + r\nu') - 1 = -\frac{kQ^2}{8\pi r^2}.$$

因为 $g_{00} = \mathrm{e}^{\nu}$, 所以上式即

$$g_{00} + r\frac{\mathrm{d}g_{00}}{\mathrm{d}r} = 1 - \frac{kQ^2}{8\pi r^2},$$

积分得

$$g_{00} = 1 + \frac{kQ^2}{8\pi r^2} + \frac{C}{r}.$$

式中 C 为积分常数. 为了确定常数 C, 我们使这个解退化为已知的 Schwarzschild 外部解, 这只要令 $Q = 0$. 比较可知 $C = -\dfrac{2GM}{c^2} \equiv -2m$. 于是最后得到所求的度规

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2 = &\left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{e^2}{r^2}\right)c^2\mathrm{d}t^2 - \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{e^2}{r^2}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2 \\ &- r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2).\end{aligned} \tag{1.3.9}$$

式中 $e^2 \equiv \dfrac{kQ^2}{8\pi}$. 场源含磁荷 q 时, 可推广 $e^2 \to e^2 + q^2$[见 (1.14.11)]. 式 (1.3.9) 即著名的 Reissner-Nordström 度规. 由于含 m 和含 e 的两项之比

$$\frac{e^2}{r^2}\Big/\frac{2m}{r} \sim \frac{1}{r},$$

故知在 $r \to \infty$ 时与 m 项比较可将 e 项略去. 对于电子, 上述比值约为 $\dfrac{10^{-13}}{r}$. 这就是说, 只有在电子的经典半径附近, 两项才可比拟. 在较大的距离上, 含 e 的项的作用便是微小的.

这里应指出, 含 e 的项是电荷 Q 的电磁场 (作为物质源) 对引力场的贡献, 而不代表电磁相互作用.

1.4　Schwarzschild 内部解

设场源物质为理想流体, 静止于所选择的球坐标系中, 且均匀分布于半径为 r_1 的球内, 在球面处这均匀流体的压强为零. 在这些特殊条件下, 可以得到 Einstein 方程的一个严格解.

为了计算方便, 将场方程写成混合张量的形式

$$G_\mu^\nu - \frac{1}{2}g_\mu^\nu R = kT_\mu^\nu. \tag{1.4.1}$$

理想流体的能–动张量具有形式

$$T_\mu^\nu = g_{\mu\alpha}T^{\alpha\nu} = (\rho_0 + P_0)g_{\mu\alpha}u^\alpha u^\nu - g_\mu^\nu P_0. \tag{1.4.2}$$

仍取球对称度规为

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{e}^\nu \mathrm{d}t^2 - \mathrm{e}^\lambda \mathrm{d}r^2 - r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\varphi^2).$$

式中 $\nu = \nu(r), \lambda = \lambda(r)$. 由于场源物质是静止的, 故有

$$\begin{aligned} &u^1 = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s} = u^2 = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} = u^3 = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s} = 0, \\ &u^0 = \frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}s} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\nu}, \end{aligned} \tag{1.4.3}$$

代入 (1.4.2) 得到 T_μ^ν 的不为零分量

$$\begin{aligned} &T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = -P_0, \\ &T_0^0 = \rho_0 c^2. \end{aligned} \tag{1.4.4}$$

$R_{\mu\nu}$ 不为零的分量为

$$\begin{aligned} &R_{11} = -\frac{1}{2}\nu'' + \frac{1}{4}\nu'\lambda' - \frac{1}{4}\nu'^2 + \frac{\lambda'}{r}, \\ &R_{22} = -\mathrm{e}^{-\lambda}\left\{1 + \frac{1}{2}r(\nu' - \lambda')\right\} + 1, \\ &R_{33} = -\mathrm{e}^{-\lambda}\left\{1 + \frac{1}{2}r(\nu' - \lambda')\right\}\sin^2\theta + \sin^2\theta, \\ &R_{00} = \mathrm{e}^{\nu-\lambda}\left(\frac{1}{2}\nu'' - \frac{1}{4}\nu'\lambda' + \frac{1}{4}\nu'^2 + \frac{\nu'}{r}\right). \end{aligned} \tag{1.4.5}$$

由此得到标曲率 R 的表达式

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = e^{-\lambda}\left\{\nu'' - \frac{1}{2}\nu'\lambda' + \frac{1}{2}\nu'^2 - \frac{2}{r}(\lambda' - \nu') + \frac{2}{r^2}\right\} - \frac{2}{r^2}. \tag{1.4.6}$$

将 (1.4.4)~(1.4.6) 代入 (1.4.1) 得到

$$k\rho_0 c^2 = \mathrm{e}^{-\lambda}\left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{r^2}, \tag{1.4.7}$$

$$kP_0 = \mathrm{e}^{-\lambda}\left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2}\right) - \frac{1}{r^2}, \tag{1.4.8}$$

$$kP_0 = \mathrm{e}^{-\lambda}\left(\frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{1}{4}\nu'^2 + \frac{\nu' - \lambda'}{2r}\right). \tag{1.4.9}$$

其中 (1.4.9) 是由 $G_2^2 = kT_2^2$ 和 $G_3^3 = kT_3^3$ 组合而成的. 由 $\frac{2}{r} \times [(1.4.8) - (1.4.9)]$ 得到

$$\mathrm{e}^{-\lambda}\left(\frac{\nu''}{r} - \frac{\nu'}{r^2} - \frac{2}{r^3}\right) - \mathrm{e}^{-\lambda}\lambda'\left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2}\right) + \frac{2}{r^3} + \mathrm{e}^{-\lambda}\left(\frac{\lambda'}{r} + \frac{\nu'}{r}\right)\frac{\nu'}{2} = 0.$$

考虑到 (1.4.7)~(1.4.9), 上式可写为

$$\frac{\mathrm{d}P_0}{\mathrm{d}r} + (\rho_0 c^2 + P_0)\frac{\nu'}{2} = 0. \tag{1.4.10}$$

此式给出压强和引力势沿 r 方向导数之间的关系. 积分 (1.4.7) 得

$$\mathrm{e}^{-\lambda} = 1 - \frac{1}{3}k\rho_0 c^2 r^2 + \frac{A}{r}.$$

为了避免 $r = 0$ 处 (1.4.7) 出现无限大, 我们取积分常数 $A = 0$. 上式成为

$$\mathrm{e}^{-\lambda} = 1 - \frac{r^2}{R^2}. \tag{1.4.11}$$

式中

$$R^2 \equiv \frac{3}{k\rho_0 c^2}. \tag{1.4.12}$$

积分 (1.4.10) 得

$$\rho_0 c^2 + P_0 = C\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\nu}.$$

式中 C 为积分常数. 将 (1.4.7)~(1.4.9) 中的 ρ_0 和 P_0 代入上式, 得到

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\nu}\mathrm{e}^{-\lambda}\left(\frac{\lambda'}{r} + \frac{\nu'}{r}\right) = \mathrm{const}.$$

考虑到 (1.4.11), 有

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\nu}\left(\frac{2}{R^2} + \frac{\nu'}{r} - \frac{\nu' r}{R^2}\right) = \mathrm{const}.$$

积分上式得

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\nu} = A - B\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.4.13}$$

式中 A 和 B 为积分常数. 式 (1.4.13) 和 (1.4.11) 给出 Einstein 场方程的解

$$\mathrm{d}s^2=\left[A-B\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2c^2\mathrm{d}t^2-\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2-r^2(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2). \quad (1.4.14)$$

将 (1.4.11) 和 (1.4.13) 代入 (1.4.8) 得

$$kP_0=\frac{3B\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)^{\frac{1}{2}}-A}{R^2\left[A-B\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]}. \quad (1.4.15)$$

常数 A 和 B 可由流体球边界处的连接条件确定. 使 $r<r_1$ 的上述内部解与 $r>r_1$ 的 Schwarzschild 外部解在 $r=r_1$ 处相等, 并使 $r=r_1$ 的压强 $P_0=0$, 从而便可同时确定常数 A、B 以及流体球的质量 M. 上述条件表示为

$$1-\frac{2GM}{c^2r_1}=1-\frac{r_1^2}{R^2}=\left[A-B\left(1-\frac{r_1^2}{R^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2,$$

$$3B\left(1-\frac{r_1^2}{R^2}\right)^{\frac{1}{2}}-A=0.$$

解这三个代数方程得

$$\begin{aligned}A&=\frac{3}{2}\left(1-\frac{r_1^2}{R^2}\right)^{\frac{1}{2}},\\ B&=\frac{1}{2},\\ M&=\frac{c^2}{3GR^2}r_1^3=\frac{kc^4}{6G}r_1^3\rho_0=\frac{4\pi}{3}r_1^3\rho_0.\end{aligned} \quad (1.4.16)$$

还应指出, 式 (1.4.14) 表明, 此内部解的适用范围是 $r_1<R$. 这一条件在天体物理的实际应用中是经常得到满足的. 例如, 对于太阳有

$$\rho_0=1.4\mathrm{g}\cdot\mathrm{cm}^{-3},$$
$$r_1=6.95\times10^{10}\mathrm{cm}.$$

于是由 (1.4.12) 得 $R=3.5\times10^{13}\mathrm{cm}\gg r_1$.

式 (1.4.14) 称为 Schwarzschild 内部解.

1.5 Kasner 解的推广

假设场源具有柱对称性, 则其外部解可以严格给出, 不带电的情况由 Kasner 给出.

本节讨论荷电的情况. Einstein-Maxwell 方程表示为

$$F^{\mu\nu}_{;\nu}=0, \quad (1.5.1)$$

$$F_{\mu\nu;\alpha}+F_{\nu\alpha;\mu}+F_{\alpha\mu;\nu}=0, \tag{1.5.2}$$

$$G_{\mu\nu}=\frac{1}{4\pi}\left(-F_{\mu\sigma}F_{\nu}^{\sigma}+\frac{1}{4}F_{\sigma\tau}F^{\sigma\tau}g_{\mu\nu}\right). \tag{1.5.3a}$$

由于 $F^{\alpha\beta}=-F^{\beta\alpha}$, 后一式可简化为

$$R_{\mu\nu}=\frac{1}{4\pi}\left(-F_{\mu\sigma}F_{\nu}^{\sigma}+\frac{1}{4}F_{\sigma\tau}F^{\sigma\tau}g_{\mu\nu}\right). \tag{1.5.3b}$$

根据场的对称性, 选取柱坐标, 度规可写为

$$\mathrm{d}s^2=u^2(r)\mathrm{d}x^{0^2}-\mathrm{d}r^2-v^2(r)\mathrm{d}\varphi^2-w^2(r)\mathrm{d}z^2. \tag{1.5.4}$$

将上式代入 (1.5.1) 和 (1.5.2), 积分得

$$uvwF^{01}=C_1=\mathrm{const},\quad F_{01}=C_1\mu\nu^{-1}w^{-1}. \tag{1.5.5}$$

$F^{\alpha\beta}$ 和 $F_{\alpha\beta}$ 其余分量均为零, C_1 为积分常数.

由 (1.5.4) 得到 $\Gamma_{\mu\nu}^{\tau}$ 的不为零分量为

$$\begin{aligned}&\Gamma_{01}^{0}=\Gamma_{10}^{0}=\frac{u'}{u},\quad \Gamma_{00}^{1}=uu',\quad \Gamma_{21}^{2}=\Gamma_{12}^{2}=\frac{v'}{v},\\ &\Gamma_{22}^{1}=-vv',\quad \Gamma_{31}^{3}=\Gamma_{13}^{3}=\frac{w'}{w},\quad \Gamma_{33}^{1}=-ww'.\end{aligned} \tag{1.5.6}$$

$R_{\mu\nu}$ 的不为零分量为

$$\begin{aligned}R_{00}=&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(uu')+uu'\left(\frac{u'}{u}+\frac{v'}{v}+\frac{w'}{w}\right)-2u'^2,\\ R_{11}=&-\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{u'}{u}\right)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{v'}{v}\right)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{w'}{w}\right)\right]\\ &-\left[\left(\frac{u'}{u}\right)^2+\left(\frac{v'}{v}\right)^2+\left(\frac{w'}{w}\right)^2\right],\\ R_{22}=&-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(vv')-vv'\left(\frac{u'}{u}+\frac{v'}{v}+\frac{w'}{w}\right)+2v'^2,\\ R_{33}=&-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(ww')-ww'\left(\frac{u'}{u}+\frac{v'}{v}+\frac{w'}{w}\right)+2w'^2.\end{aligned} \tag{1.5.7}$$

将 (1.5.7) 和 (1.5.5) 代入 (1.5.3), 并令

$$\mathrm{d}r=uvw\mathrm{d}\lambda, \tag{1.5.8}$$

得到

$$\left(\frac{u_{,\lambda}}{u}\right)_{,\lambda}=C_1^2u^2, \tag{1.5.9}$$

$$\left(\frac{v_{,\lambda}}{v}\right)_{,\lambda}=-C_1^2u^2, \tag{1.5.10}$$

$$\left(\frac{w_{,\lambda}}{w}\right)_{,\lambda}=-C_1^2u^2, \tag{1.5.11}$$

$$\frac{u_{,\lambda}v_{,\lambda}}{uv}+\frac{v_{,\lambda}w_{,\lambda}}{vw}+\frac{w_{,\lambda}u_{,\lambda}}{wu}=-C_1^2u^2. \tag{1.5.12}$$

积分 (1.5.9) 得

$$u_{,\lambda}=u(C_2+C_1^2u^2)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.5.13}$$

式中 $C_2=\text{const}$ 为积分常数.

由 (1.5.5) 可知, $C_1=0$ 即电磁场不存在. 我们首先考虑 $C_1\neq 0, C_2=0$ 的情形. 此时 (1.5.13) 给出

$$u=C_1^{-1}(C_3-\lambda)^{-1}, \tag{1.5.14}$$

$C_3=\text{const}$. 由 (1.5.10)~(1.5.12) 以及 (1.5.4), (1.5.5) 可得

$$v=C_1(C_3-\lambda)\mathrm{e}^{C_4\lambda}, \tag{1.5.15}$$

$$w=C_1(C_3-\lambda), \tag{1.5.16}$$

$C_4=\text{const}$. 于是得到度规

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2=&C_1^{-2}(C_3-\lambda)^{-2}\mathrm{d}t^2-\mathrm{d}r^2-C_1^2(C_3-\lambda)^2\mathrm{e}^{2C_4\lambda}\mathrm{d}\varphi^2\\&-C_1^2(C_3-\lambda)^2\mathrm{d}z^2,\end{aligned} \tag{1.5.17a}$$

$$F^{01}=-(C_3-\lambda)^{-1}\mathrm{e}^{-C_4\lambda}, \tag{1.5.18a}$$

$$F_{01}=C_1^{-2}(C_3-\lambda)^{-3}\mathrm{e}^{-C_4\lambda}. \tag{1.5.19a}$$

为了写成通常柱坐标的形式, 再作一次坐标变换. 令

$$C_4^{-1}\mathrm{e}^{C_4\lambda}=\rho,\quad C_4^2\varphi=\psi, \tag{1.5.20}$$

此时有

$$\mathrm{d}r=C_1(C_3-\lambda)\mathrm{e}^{C_4\lambda}\mathrm{d}\lambda=C_1(C_3-\lambda)\mathrm{d}\rho. \tag{1.5.21}$$

将 (1.5.20) 和 (1.5.21) 代入 (1.5.17)~(1.5.19), 得到

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2=&C_1^{-2}(C_3-C_4^{-1}\ln C_4\rho)^{-2}\mathrm{d}t^2-C_1^2(C_3\\&-C_4^{-1}\ln C_4\rho)^2\{\mathrm{d}\rho^2+\rho^2\mathrm{d}\psi^2+\mathrm{d}z^2\},\end{aligned} \tag{1.5.17b}$$

$$F^{01}=-C_4^{-1}(C_3-C_4^{-1}\ln C_4\rho)^{-1}\rho^{-1}, \tag{1.5.18b}$$

$$F_{01}=C_1^{-2}C_4^{-1}(C_3-C_4^{-1}\ln C_4\rho)^{-3}\rho^{-1}. \tag{1.5.19b}$$

如果质量源不带电, 在 (1.5.13) 中令 $C_1=0, C_2=a^2$, 我们有特解

$$u=\mathrm{e}^{a\lambda}, \quad v=\mathrm{e}^{b\lambda}, \quad w=\mathrm{e}^{c\lambda}, \tag{1.5.22}$$

$$a+b+c=a^2+b^2+c^2=1. \tag{1.5.23}$$

此时由 (1.5.8) 知

$$\mathrm{d}r^2=\mathrm{e}^{2(a+b+c)\lambda}\mathrm{d}\lambda^2=\mathrm{d}\rho^2,$$

于是 (1.5.4) 可写为

$$\mathrm{d}s^2=\rho^{2^a}\mathrm{d}t^2-\mathrm{d}\rho^2-\rho^{2b}\mathrm{d}\varphi^2-\rho^{2c}\mathrm{d}z^2, \tag{1.5.24}$$

这就是 Kasner 真空度规. 如果令 $C_1=0, C_2=0$, 则得到 Minkowski 度规.

1.6 电荷和磁矩的外部解

人们认为许多天体都具有电荷. 对于中子星, 人们认为, 其强大的射电辐射来自中子星表面以外强大的磁偶极磁场形成的磁层内的相干曲率辐射 (RS 模型), 因而认为中子星具有强大的磁矩, 其数值约为

$$P\sim 10^{30}\text{Gauss单位}. \tag{1.6.1}$$

因此, 研究电荷 (磁荷) 和磁矩的引力场对于揭示中子星的引力性质是有意义 (Peng, 1985).

我们讨论静态时空中的静态磁场. 静态时空可表示为

$$g_{\mu\nu}=g_{\mu\nu}(x^i). \tag{1.6.2}$$

如果四维时空点沿类时方向移动 ξ^μ 时, 矢量 A^μ 不变, 则电磁场 $F_{\mu\nu}=A_{\nu;\mu}-A_{\mu;\nu}$ 也是静态的. 此条件即 A^μ 的 Lie 导数为零

$$\xi^\mu A^\nu_{;\mu}-A^\mu\xi^\nu_{;\mu}=0. \tag{1.6.3}$$

式中 ξ^μ 为类时 Killing 矢量, 它满足 Killing 方程

$$\xi_{\mu;\nu}+\xi_{\nu;\mu}=0. \tag{1.6.4}$$

电磁场只包含纯磁场的条件可表示为

$$F_{\mu\nu}=2(\xi^\mu\xi_\mu)-\frac{1}{2}\xi_\mu B_\nu=2g_{00}^{-\frac{1}{2}}(\xi_\mu B_\nu-\xi_\nu B_\mu), \tag{1.6.5}$$

$$\xi^0 = 1, \xi^i = 0.$$

式中 B_μ 为磁矢量. 可以取 B 为纯空间矢量 $(\xi^\mu B_\mu = 0, \xi^\mu \xi_\mu \neq 0)$

$$B_\mu = (\xi^\mu \xi_\mu)^{-\frac{1}{2}} F_{\mu\nu} \xi^\nu. \tag{1.6.6}$$

由于

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}\xi^\nu =& (A_{\nu;\mu} - A_{\mu;\nu})\xi^\nu = (A_\nu \xi^\nu)_{,\mu} \\ &- (A_\nu \xi^\nu_{;\mu} + A_{\mu;\nu}\xi^\nu) = A_{0,\mu} - (A_\nu \xi^\nu_{;\mu} + A_{\mu;\nu}\xi^\nu). \end{aligned} \tag{1.6.7}$$

式中 $A_0 = \xi^\mu A_\mu$. 考虑到 (1.6.4), 可将 (1.6.7) 的后一项化为 (1.6.3), 于是 (1.6.6) 可写为

$$B_\mu = g_{00}^{-\frac{1}{2}} A_{0,\mu}. \tag{1.6.8}$$

又由 (1.6.5) 得

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu}_{;\nu} =& \xi^\mu (g_{00}^{-\frac{1}{2}} B^\nu)_{;\nu} + (g_{00}^{-\frac{1}{2}} B^\nu \xi^\mu_{;\nu} - \xi_\nu g_{00}^{-\frac{1}{2}} B^\mu_{;\nu}) \\ &- g_{00}^{-\frac{1}{2}} B^\mu \xi^\nu_{;\nu}. \end{aligned}$$

上式最后一项由 Killing 方程知其为零. 括号内的式子即 $(-g_{00}^{-\frac{1}{2}} B^\nu)$ 的 Lie 导数, 因场是静态的, 此 Lie 导数为零. 因此上式即

$$F^{\mu\nu}_{;\nu} = \xi^\mu (g_{00}^{-\frac{1}{2}} B^\nu)_{;\nu} \tag{1.6.9}$$

或

$$F^{\mu\nu}_{;\nu} = \xi^\mu g_{00}^{-\frac{1}{2}} B^i_{1i}, \tag{1.6.10}$$

由 (1.6.10) 知真空 Maxwell 方程即

$$B^i_{1i} = (g_{00}^{-\frac{1}{2}} g^{ij} A_{0,j})_{1i} = 0. \tag{1.6.11}$$

我们求在 Reissner-Nordström 度规

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 =& \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{e^2}{r^2}\right) \mathrm{d}x^{0^2} - \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{e^2}{r^2}\right)^{-1} \mathrm{d}r^2 \\ &+ r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\varphi^2) \end{aligned} \tag{1.6.12}$$

的背景下的静态磁场.

将 (1.6.12) 代入 (1.611), 得到 $A_0(r, \theta)$ 满足的方程

$$\left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{e^2}{r^2}\right)(r^2 A_{0,r})_{,r} + \frac{1}{\sin\theta}(\sin\theta A_{0,\theta})^{,\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta} A_{0,\varphi\varphi} = 0. \tag{1.6.13}$$

易见此方程的解为

$$A_0(r,\theta) = R(r)p_l^n(\cos\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}. \tag{1.6.14}$$

式中 $R(r)$ 满足方程

$$\left(1-\frac{2m}{r}+\frac{e^2}{r^2}\right)(2rR_r+r^2R_{,rr})-l(l+1)R=0. \tag{1.6.15a}$$

经尝试, 知

$$n=0,\quad l=1,\quad R_1(r)=r\left(r-2m+\frac{e^2}{r}\right) \tag{1.6.15b}$$

是方程 (1.6.15) 的一个特解. 令

$$R(r)=R_1(r)\cdot x(r), \tag{1.6.16}$$

代入 (1.6.15) 得

$$\left(r-2m+\frac{e^2}{r}\right)x_{,rr}=-2\left[1-\frac{e^2}{r^2}+\frac{2}{r}\left(r-2m+\frac{e^2}{r}\right)\right]x_{,r} \tag{1.6.17}$$

积分 (1.6.17) 得

$$\ln|x_{,r}|=-2\ln|r^2-2mr+e^2|+C. \tag{1.6.18}$$

积分 (1.6.18), 考虑到边界条件, 得到

$$x=C_1\left[\frac{r-m}{2(e^2-m^2)(r^2-2mr+e^2)}+\frac{1}{4(e^2-m^2)\sqrt{m^2-e^2}}\ln\frac{r-m-\sqrt{m^2-e^2}}{r-m+\sqrt{m^2-e^2}}\right] \tag{1.6.19}$$

令

$$a\equiv\frac{(1-e^2m^{-2})^{\frac{1}{2}}}{1-mr^{-1}-[1-(1-e^2m^{-2})^{\frac{1}{2}}]}, \tag{1.6.20}$$

(1.6.19) 成为

$$x=-C_1\left[\frac{r-m}{2m^2r(1-e^2m^{-2})(1-2mr^{-1}+e^2m^{-2})}+\frac{1}{4m^3(1-e^2m^{-2})^{3/2}}\ln\left(1-\frac{2m\alpha}{r}\right)\right]. \tag{1.6.21}$$

将 (1.6.21) 代入 (1.6.16), (1.6.15a) 和 (1.6.14) 得

$$A_0(r,\theta)=-C_1\left[\frac{r-m}{2m^2(1-e^2m^{-2})}r\right.$$

$$+\frac{r^2-2mr+e^2}{4m^3(1-e^2m^{-2})^{3/2}}\ln\left(1-\frac{2m\alpha}{r}\right)\Bigg]\times\cos\theta. \tag{1.6.22}$$

将 (1.6.22) 按 $\dfrac{2m\alpha}{r}$ 展开, 略去高阶项得

$$A_0(r,\theta)=-\frac{2C_1m^2}{3r^2}\left(1+\frac{2\alpha m}{r}\right)\cos\theta. \tag{1.6.23}$$

(1.6.23) 是一个磁偶极子在 Reissner-Nordström 弯曲时空中的静磁场的势. 实际上, 令 $e=0$, 得 $\alpha=1$, (1.6.23) 即成为 Schwarzschild 空间中的情况, 当 $r\gg m$ 时, (1.6.23) 便成为人们熟知的平直空间中的一个磁偶极子的势

$$A_0(r,\theta)\to\frac{P}{r^2}\cos\theta. \tag{1.6.24}$$

设场源质量位于坐标原点, 磁矩沿 $\theta=0$ 方向, 场显然应是辐射对称的, 四维势 A_μ 只有一个不为零的分量 A_φ. 按照 (1.6.23), 我们可以将 A_φ 表示为

$$A_{\varphi(P)}=\frac{P}{r^2}\left(1+\frac{2\alpha m}{r}\right)\cos\theta. \tag{1.6.25}$$

以上我们把 Reissner-Nordström 度规作为时空背景, 解真空 Maxwell 方程, 得到了静态磁矩的磁场. 现在, 我们用逐次逼近的方法, 在一级近似下求 Einstein-Maxwell 方程的解. 将 (1.6.25) 代入能–动张量

$$T_{\mu\nu(p)}=F_{\mu\sigma(p)}F^{\sigma}_{\nu(p)}-\frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta(p)}F^{\alpha\beta}_{(p)}. \tag{1.6.26}$$

(1.6.26) 和以 e,m 为源的能–动张量

$$T_{\mu\nu(\mathrm{e})}=\frac{e^2}{2r^4}\begin{bmatrix}a&0&0&0\\0&-b&0&0\\0&0&-r^2&0\\0&0&0&-r^2\sin^2\theta\end{bmatrix} \tag{1.6.27}$$

一起, 放在 Einstein-Maxwell 方程组的右端. (1.6.27) 中的 a 和 b 分别为

$$a=1-\frac{2m}{r}+\frac{e^2}{r^2},\quad b=\left(1-\frac{2m}{r}+\frac{e^2}{r^2}\right)^{-1} \tag{1.6.28}$$

所要求的度规含有一阶小量的修正项

$$\mathrm{d}s^2=\left(1-\frac{2m}{r}+\frac{e^2}{r^2}+u\right)\mathrm{d}x^{0^2}-\left(1-\frac{2m}{r}+\frac{e^2}{r^2}-v\right)^{-1}\mathrm{d}r^2$$

$$-r^2(1+w)(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2). \tag{1.6.29}$$

将 (1.6.26)~(1.6.29) 构成的 Einstein 方程组按 u, v, w 展开, 保留一次项, 得到

$$-\frac{2m}{r^3}+\frac{3e^2}{r^4}+\frac{1}{2}u_{,rr}+\frac{1}{r}\left(\frac{2m}{r^2}-\frac{2e^2}{r^3}+u_{,r}\right)+\frac{1}{2r^2}(u_{,\theta\theta}+\cot\theta\cdot u_{,\theta})$$

$$=\frac{e}{r^4}-\frac{2me^2}{r^5}+\frac{e^4}{r^6}+\frac{a^2p^2}{2r^6}(3\cos^2\theta+1), \tag{1.6.30}$$

$$-\frac{2m}{r^3}+\frac{3e^2}{r^4}+\frac{1}{2}u_{,rr}+w_{,rr}+\frac{1}{r}\left(\frac{2m}{r^2}-\frac{2e^2}{r^3}-v_{,r}+2w_{,r}\right)$$

$$+\frac{1}{r^2}\left(u_{,\theta\theta}+\frac{1}{2}\cot\theta\cdot u_{,\theta}\right)$$

$$=\frac{e}{r^4}\left(1-\frac{2m}{r}+\frac{e^2}{r^2}\right)^{-1}-\frac{a^2p^2}{2r^6}(3\cos^2\theta-1), \tag{1.6.31}$$

$$\frac{1}{2},w_{.rr}+\frac{1}{2r}\left(\frac{4m}{r^2}-\frac{4e^2}{r^3}+u_{,r}-v_{,r}+4w_{,r}\right)$$

$$+\frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{2}w_{,\theta\theta}+w-\frac{2m}{r}+\frac{e^2}{r^2}-v+\frac{1}{2}\cot\theta(u_{,\theta}+v_{,\theta}+w_{,\theta})\right]$$

$$=-\frac{e^2}{r^4}-\frac{\alpha^2p^2}{2r^6}(5\cos^2\theta+1), \tag{1.6.32}$$

$$\frac{1}{2}w_{,rr}+\frac{1}{2r}\left(\frac{4m}{r^2}-\frac{4e^2}{r^3}+r_{,r}-v_{,r}+4w_{,r}\right)$$

$$+\frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{2}u_{,\theta\theta}+\frac{1}{2}v_{,\theta\theta}+\frac{1}{2}w_{.\theta\theta}+w-\frac{2m}{r}+\frac{e^2}{r^2}-v-\frac{1}{2}\cot\theta\cdot w_{,\theta}\right)$$

$$=-\frac{e^2}{r^4}+\frac{\alpha^2p^2}{2r^6}(5\cos^2\theta-1), \tag{1.6.33}$$

$$\frac{3e^2}{r^4}\sin\theta-\frac{3m}{r^3}\sin\theta-\frac{\sin\theta}{2r^2}(2+u+3v-4w)-\frac{\sin\theta}{2r}\times(u_{,r}-v_{,r})$$

$$+\frac{\cos\theta}{r^2}(u_{,\theta}+v_{,\theta}-2w_{,\theta})=0. \tag{1.6.34}$$

略去 $\frac{me^2}{r^5}$ 和 $\frac{e^4}{r^6}$ 等高阶项, (1.6.30)~(1.6.33) 化为

$$u_{,rr}+\frac{2}{r}u_{,r}+\frac{1}{r^2}u_{,\theta\theta}+\frac{\cot\theta}{r^2}u_{,\theta}-\frac{\alpha^2p^2}{r^6}\times(3\cos^2\theta+1)=0, \tag{1.6.35}$$

$$u_{,rr}+2w_{,rr}-\frac{2}{r}(v_{,r}-2w_{,r})+\frac{1}{r^2}(4w_{,r}+u_{,r}-v_{,r})$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{2r^2}[(w_{,\theta\theta}+\cot\theta(u_{,\theta}+v_{,\theta}+w_{,\theta})-v-w]\\
&+\frac{\alpha^2p^2}{2r^6}(5\cos^2\theta+1)=0,
\end{aligned}
\tag{1.6.36}
$$

$$
\begin{aligned}
&w_{,rr}+\frac{1}{2r}(u_{,r}-v_{,r}+4w_{,r})+\frac{1}{2r^2}(u_{,\theta\theta}+v_{,\theta\theta}\\
&+w_{,\theta\theta}-v+w-\cot\theta\cdot w_{,\theta}-\frac{\alpha^2p^2}{2r^6}(5\cos^2\theta-1)=0,
\end{aligned}
\tag{1.6.37}
$$

$$
\begin{aligned}
&w_{,rr}+\frac{1}{2r}(u_{,r}-v_{,r}+4w_{,r})+\frac{1}{2r^2}[w_{,\theta\theta}\\
&+\cot\theta(u_{,\theta}+v_{,\theta}+w_{,\theta})-v-w]+\frac{\alpha^2p^2}{2r^6}(5\cos^2\theta+1)=0.
\end{aligned}
\tag{1.6.38}
$$

解 (1.6.35)~(1.6.37) 的过程虽然麻烦但并不困难. 如 (1.6.35) 分离变量, 得到两个常微分方程, 其解很容易得到

$$u=\frac{\alpha^2p^2\cos^2\theta}{r^4}. \tag{1.6.39}$$

将 (1.6.39) 代入其余方程, 将 v 和 w 展成傅里叶级数, 比较各项系数, 得到

$$v=\frac{\alpha^2p^2}{2r^4}(2\cos^2\theta-1), \tag{1.6.40}$$

$$w=\frac{\alpha^2p^2\cos^2\theta}{2r^4}. \tag{1.6.41}$$

将 (1.6.39)~(1.6.41) 代入 (1.6.29), 得到所要求的度规 (一级近似)

$$
\begin{aligned}
g_{00}&=1-\frac{2m}{r}+\frac{e^2}{r^2}+\frac{\alpha^2p^2\cos^2\theta}{r^4},\\
g_{11}&=-\left\{1-\frac{2m}{r}+\frac{e^2}{r^2}-\frac{\alpha^2p^2}{2r^4}(2\cos^2\theta-1)\right\}^{-1},\\
g_{22}&=-r^2\left(1-\frac{\alpha^2p^2\cos^2\theta}{2r^4}\right),\\
g_{33}&=-r^2\left(1-\frac{\alpha^2p^2\cos^2\theta}{2r^4}\right)\sin^2\theta.
\end{aligned}
\tag{1.6.42}
$$

度规 (1.6.42) 描述具有电荷 e 和磁矩 p 的中心质量 (如中子星) 的引力场. 它对于研究中子星的引力场和磁场中的各种引力效应将是有用的. 含磁荷时可将 e 换为 e^2+q^2.

1.7 Weyl-Levi-Civita 解

当引力场具有旋转对称性时, 真空 Einstein 方程的严格解由 Weyl 和 Levi-Civita 给出.

在引力场 $g_{\mu\nu}$ 中, 如果存在一个表征旋转对称性的 Killing 矢量, 则这一引力场称为旋转对称引力场, 如果这一旋转是绕 Ox^3 轴的, 则 Killing 矢量具有形式

$$\xi^\mu = (0, \alpha x^2, -\alpha x^1, 0). \tag{1.7.1}$$

式中 α 是表征旋转的参量.

考虑到旋转对称性, 线元的最普遍形式应为

$$\mathrm{d}s^2 = a\mathrm{d}x^{0^2} + b\mathrm{d}x^{1^2} + 2c\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2 + d\mathrm{d}x^{2^2} + e\mathrm{d}\varphi^2. \tag{1.7.2}$$

式中 $x^0 = ct$, 是类时坐标; x^1 和 x^2 是空间坐标; $x^3 = \varphi$ 是角坐标; a, b, c 和 d 是 x^1 和 x^2 的函数.

我们知道, 在二维空间中, Weyl 共形张量等于零. 现在, 用这一性质可将线元 (1.7.2) 简化. 考虑由线元

$$b(x^1, x^2)\mathrm{d}x^{1^2} + 2c(x^1, x^2)\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2 + d(x^1, x^2)\mathrm{d}x^{2^2} \tag{1.7.3}$$

表征的二维曲面, 这一、二维曲面是共形平直的, 即存在一个新的坐标系

$$x'^1, x'^2, \qquad x'^1 = x'^1(x^1, x^2), \quad x'^2 = x'^2(x^1, x^2), \tag{1.7.4}$$

在新坐标系中线元 (1.7.3) 具有形式

$$\mathrm{e}^\mu[\mathrm{d}x^{1^2} + \mathrm{d}x^{2^2}]. \tag{1.7.5}$$

式中 μ 是新坐标的函数, 在上式中, 为了简化, 我们省去了新坐标的撇号.

由于坐标变换 (1.7.4) 不影响 (1.7.2) 中的第一项和最后一项, 于是旋转对称的静态线元可简化为

$$\mathrm{d}s^2 = a(\mathrm{d}x^0)^2 + \mathrm{e}^\mu[(\mathrm{d}x^1)^2 + (\mathrm{d}x^2)^2] + e\mathrm{d}\varphi^2. \tag{1.7.6}$$

为了方便, 将函数 a, μ 和 e 写成

$$a = \mathrm{e}^{2\psi}, \quad \mathrm{e}^\mu = -\mathrm{e}^{2(\gamma-\psi)}, \quad \mathrm{e} = -\rho^2\mathrm{e}^{-2\psi}. \tag{1.7.7}$$

式中 ψ, γ 和 ρ 是坐标 x^1 和 x^2 的函数, 因此我们有

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{2\psi} & & & 0 \\ & -\mathrm{e}^{2(\gamma-\psi)} & & \\ & & -\mathrm{e}^{2(\gamma-\psi)} & \\ 0 & & & -\rho^2\mathrm{e}^{-2\psi} \end{bmatrix}, \tag{1.7.8}$$

$$
g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} e^{-2\psi} & & & 0 \\ & -e^{2(\psi-\gamma)} & & \\ & & -e^{2(\psi-\gamma)} & \\ 0 & & & -\rho^{-2}e^{2\psi} \end{bmatrix}, \tag{1.7.9}
$$

由此得

$$
\sqrt{-g} = \rho e^{2(\gamma-\psi)}. \tag{1.7.10}
$$

在上面各式中，所有函数都不依赖于时间坐标 x^0 和纬向角坐标 φ.

由 (1.7.8) 和 (1.7.9), 可以得到 Christoffel 符号

$$
\begin{aligned}
&\Gamma^0_{01} = \psi_{,1}, \quad \Gamma^1_{11} = -\Gamma^1_{22} = \Gamma^2_{12} = \gamma_{,1} - \psi_{,1}, \\
&\Gamma^0_{02} = \psi_{,2}, \quad \Gamma^1_{12} = -\Gamma^2_{11} = \Gamma^2_{22} = \gamma_{,2} - \psi_{,2}, \\
&\Gamma^1_{00} = e^{2(2\psi-r)}\psi_{,1}, \quad \Gamma^2_{00} = e^{2(2\psi-\gamma)}\psi_{,2}, \\
&\Gamma^3_{13} = \rho^{-1}\rho_{,1} - \psi_{,1}, \quad \Gamma^1_{33} = e^{-2\gamma}(\rho^2\psi_{,1} - \rho\rho_{,1}), \\
&\Gamma^3_{23} = \rho^{-1}\rho_{,2} - \psi_{,2}, \quad \Gamma^2_{33} = e^{-2\gamma}(\rho^2\psi_{,2} - \rho\rho_{,2}),
\end{aligned}
$$

其余

$$
\Gamma^\tau_{\mu\nu} = 0. \tag{1.7.11}
$$

由 (1.7.11) 可得到 $R_{\mu\nu}$, 从而建立 Einstein 场方程 $R_{\mu\nu} = k\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right)$.

$$
\begin{aligned}
R_{00} \equiv& e^{-2(2\psi-\gamma)}(\psi_{,AA} + \rho^{-1}\psi_{,A}\rho_{,A}) \\
=& k\left(T_{00} - \frac{1}{2}e^{2\psi}T\right),
\end{aligned} \tag{1.7.12}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{11} \equiv& \psi_{,AA} - \gamma_{,AA} - 2\psi_{,1}\psi_{,1} - \rho^{-1}\rho_{,11} + \rho^{-1}\psi_{,A}\rho_{,A} + \rho^{-1}(\gamma_{,1}\rho_{,1} - \gamma_{,2}\rho_{,2}) \\
=& k\left(T_{22} + \frac{1}{2}e^{2(\gamma-\psi)}T\right),
\end{aligned} \tag{1.7.13}
$$

$$
R_{12} \equiv \rho^{-1}(\gamma_{,1}\rho_{,2} + \gamma_{,2}\rho_{,1}) - 2\psi_{,1}\psi_{,2} - \rho^{-1}\rho_{,12} = kT_{12}, \tag{1.7.14}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{22} \equiv& \psi_{,AA} - \gamma_{,AA} - 2\psi_{,2}\psi_{,2} - \rho^{-1}\rho_{,22} + \rho^{-1}\psi_{,A}\rho_{,A} - \rho^{-1}(\gamma_{,1}\rho_{,1} - \gamma_{,2}\rho_{,2}) \\
=& k\left(T_{22} + \frac{1}{2}e^{2(\gamma-\psi)}T\right),
\end{aligned} \tag{1.7.15}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{33} \equiv& e^{-2\gamma}\rho^2[\psi_{,AA} + \rho^{-1}(\psi_{,A\rho,A} - \rho_{,AA})] \\
=& k\left(T_{33} + \frac{1}{2}\rho^2 e^{-2\psi}T\right),
\end{aligned} \tag{1.7.16}
$$

其余

$$
R_{\mu\nu} = 0. \tag{1.7.17}
$$

上面诸式中 A=1,2;T 为标量能 - 动张量:

$$T = \mathrm{e}^{-2\psi}T_{00} - \mathrm{e}^{2(\psi-\gamma)}(T_{11}+T_{22}) - \rho^{-2}\mathrm{e}^{2\psi}T_{33}. \tag{1.7.18}$$

对于真空场,$T_{\mu\nu}=0$, 场方程简化为

$$\psi_{,AA} + \rho^{-1}\psi_{,A}\rho_{,A} = 0, \tag{1.7.19}$$

$$\psi_{,AA} - \gamma_{,AA} - 2\psi_{,1}\psi_{,1} - \rho^{-1}\rho_{,11} + \rho^{-1}\psi_{,A}\rho_{,A} + \rho^{-1}(\gamma_{,1}\rho_{,1} - \gamma_{,2}\rho_{,2}) = 0, \tag{1.7.20}$$

$$\rho^{-1}(\gamma_{,1}\rho_{,2} + \gamma_{,2}\rho_{,1}) - 2\psi_{,1}\psi_{,2} - \rho^{-1}\rho_{,12} = 0, \tag{1.7.21}$$

$$\psi_{,AA} - \gamma_{,AA} - 2\psi_{,2}\psi_{,2} - \rho^{-1}\rho_{,22} + \rho^{-1}\psi_{,A}\rho_{,A} - \rho^{-1}(\gamma_{,1}\rho_{,1} - \gamma_{,2}\rho_{,2}) = 0, \tag{1.7.22}$$

$$\psi_{,AA} + \rho^{-1}(\psi_{,A}\rho_{,A} - \rho_{,A}) = 0. \tag{1.7.23}$$

由方程 (1.7.19) 和 (1.7.23) 得

$$\nabla^2\rho(x^2,x^2) = \rho_{,AA} = 0. \tag{1.7.24}$$

这是二维 Laplace 方程, 即 ρ 为两个坐标 x^1 和 x^2 的调和函数.

为了简化引力场方程 (1.7.19)~(1.7.23), 我们引入柱坐标系

$$x^1 = \rho, \quad x^2 = z. \tag{1.7.25}$$

式中 ρ 是 Laplace 方程 (1.7.24) 的任一解. 在一般情况下, ρ 不是标准平直空间的柱坐标.

采用上述坐标系, $x^0 = ct, x^1 = \rho, x^2 = z, x^3 = \varphi$, 第一个方程 (1.7.19) 和最后一个方程 (1.7.23) 相同. 真空引力场方程组归结为

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\rho} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = 0, \tag{1.7.26}$$

$$\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\partial\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\rho} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right) - \left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial\rho^2} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial\gamma}{\partial\rho} + \frac{\partial^2\gamma}{\partial z^2}\right) - 2\left(\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right)^2 = 0, \tag{1.7.27}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial\gamma}{\partial z} - 2\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\frac{\partial\psi}{\partial z} = 0, \tag{1.7.28}$$

$$\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\rho} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right) - \left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\gamma}{\partial\rho} + \frac{\partial^2\gamma}{\partial z^2}\right) - 2\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2 = 0. \tag{1.7.29}$$

由此我们可以得到四个等效的方程

$$\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\rho} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right) = 0, \tag{1.7.30}$$

$$\frac{\partial\gamma}{\partial\rho}=\rho\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right)^2-\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2\right], \tag{1.7.31}$$

$$\frac{\partial\gamma}{\partial z}=2\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\frac{\partial\psi}{\partial z}, \tag{1.7.32}$$

$$\frac{\partial^2\gamma}{\partial\rho^2}+\frac{\partial^2\gamma}{\partial z^2}=-\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2\right]. \tag{1.7.33}$$

此即具有旋转对称性的静态真空引力场方程.

方程 (1.7.30) 是通常平直空间 Laplace 方程的柱坐标形式, 函数 ψ 具有旋转对称性. 容易得到方程 (1.7.30) 的一个特解, 然后将此解代入其余两个方程 (1.7.31) 和 (1.7.32) , 便可解出 γ. 将 (1.7.31) 和 (1.7.32) 分别对 ρ 和 z 求导, 然后相加便得到第四个方程, 所以第四个方程不是独立的.

我们把 Weyl-Levi-Civita 度规在柱坐标中的形式 (1.7.8) 写为

$$\mathrm{d}s^2=\mathrm{e}^{2\psi}c^2\mathrm{d}t^2-\mathrm{e}^{2(\gamma-\psi)}(\mathrm{d}\rho^2+\mathrm{d}z^2)-\rho^2\mathrm{e}^{-2\psi}\mathrm{d}\varphi^2. \tag{1.7.34}$$

对于一些具体的情况, 用上述方法便可得到上式的具体形式.

1.8　质量四极矩的外部解

作为静态旋转对称场的例子. 我们给出质量四极矩的场方程的严格解. 为此, 选择椭球坐标 (x,y) 较方便

$$x=\frac{1}{2m}(r_1+r_2),\quad y=\frac{1}{2m}(r_1-r_2). \tag{1.8.1}$$

式中 r_1 和 r_2 满足

$$\begin{aligned}r_1^2&=\rho^2+(z+m)^2,\\ r_2^2&=\rho^2+(z-m)^2.\end{aligned} \tag{1.8.2}$$

此处 ρ 和 z 是通常的柱坐标; m 是一个参量. 新坐标的取值范围是

$$x\geqslant 1,$$
$$-1\leqslant y\leqslant +1.$$

在新坐标系中, 方程组 (1.7.30)~(1.7.32) 可写为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[(x^2-1)\frac{\partial\psi}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[(1-y^2)\frac{\partial\psi}{\partial y}\right]=0, \tag{1.8.3}$$

$$\frac{\partial\gamma}{\partial x}=\frac{1-y^2}{x^2-y^2}\left[x(x^2-1)\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2-x(1-y)^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2\right.$$

$$- 2y(x^2-1)\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y}\bigg], \tag{1.8.4}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\gamma}{\partial y} =& \frac{\lambda^2-1}{x^2-y^2}\bigg[y(x^2-1)\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 - y(1-y)^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 \\ &+ 2x(1-y^2)\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\bigg].\end{aligned} \tag{1.8.5}$$

方程组 (1.8.3)~(1.8.5) 可用分离变量法解之. 令

$$\psi(x,y) = \Lambda(x)M(y). \tag{1.8.6}$$

将上式代入 (1.8.3), 我们得到下面两个方程:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left[(x^2-1)\frac{\mathrm{d}\Lambda}{\mathrm{d}x}\right] - C\Lambda = 0, \tag{1.8.7}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left[(1-y^2)\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}y}\right] + CM = 0. \tag{1.8.8}$$

式中 C 为不依赖于 x 和 y 的常量.

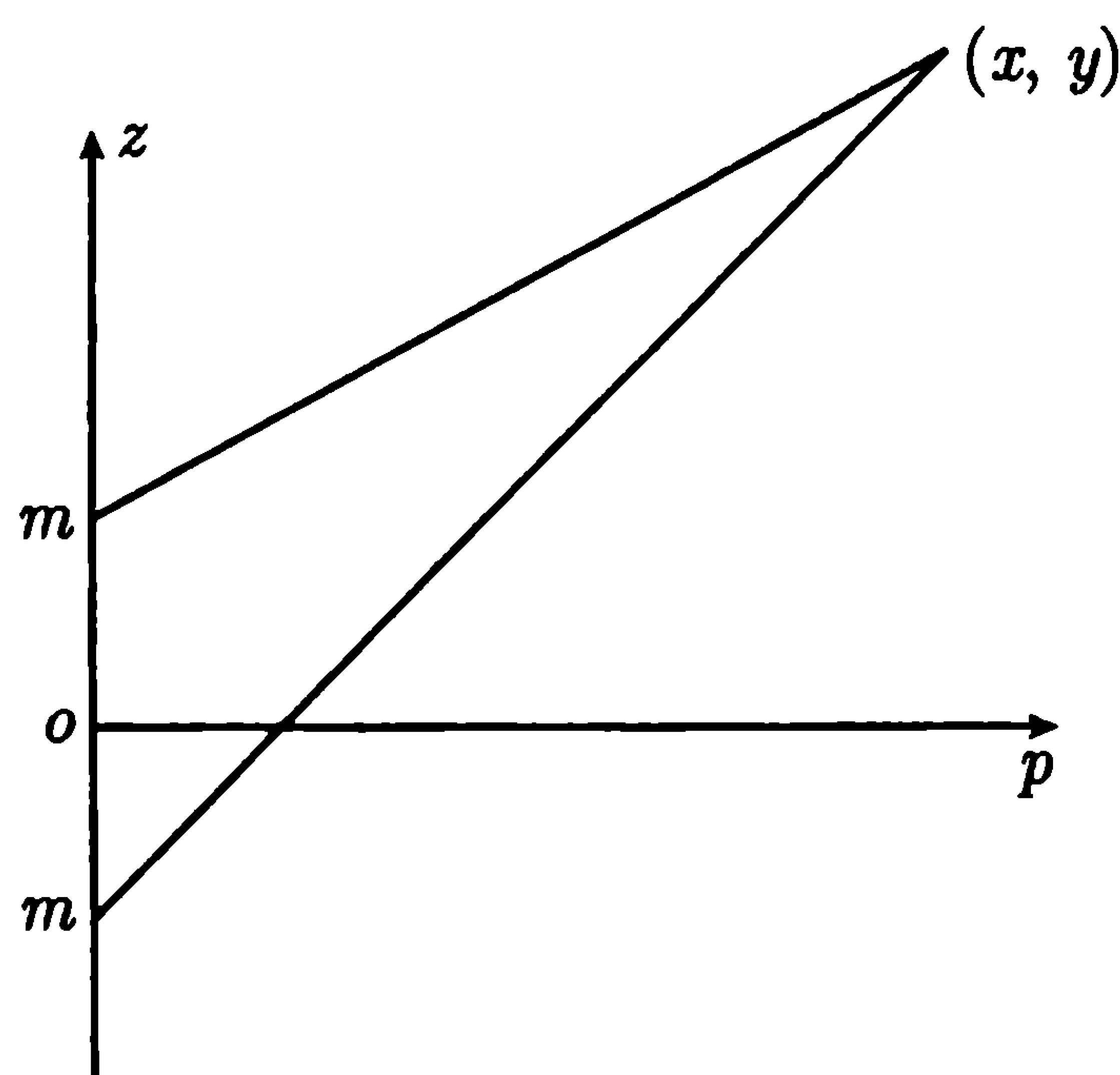


图 3-1

为了得到一个正常解, 我们取 $C = l(l+1), l = 0, 1, 2, \cdots$, 此时 (1.8.3) 的解可写为

$$\psi(x,y) = \sum_{l=0}^{\infty} g_l\psi_l(x,y), \tag{1.8.9}$$

式中

$$\psi_l(x,y) \doteq P_l(y)Q_l(x), \tag{1.8.10}$$

其中 $P_l(y)$ 是 Legendre 多项式, $Q_l(x)$ 是第二类 Legendre 函数. 例如, 选择 $l = 0$ 时有

$$\psi_0(x,y) = \frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x+1}. \tag{1.8.11}$$

这里由于 $l=0$ 故 $a=0$, 于是 (1.8.7) 和 (1.8.8) 中的 Λ, M 表示为

$$\Lambda(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x+1},\quad M(y)=1. \tag{1.8.12}$$

将 (1.8.11) 代入 (1.8.4) 和 (1.8.5), 得到 $\gamma_0(x,y)$ 的表示式

$$\gamma_0=\frac{1}{2}\ln\frac{x^2-1}{x^2-y^2}. \tag{1.8.13}$$

ψ_0 和 γ_0 给出 Schwarzschild 度规 [只要由椭球坐标 (x,y) 回到球坐标 $(r,\theta):x=\dfrac{r}{m}-1, y=\cos\theta$.]

适当选择普遍解 (1.8.9) 中的系数, 便可得到 (1.8.3) 的其他解. 例如, 使

$$\psi=\psi_0+g_l\psi_l. \tag{1.8.14}$$

式中 $l\neq 0, g_l$ 为一任意常数. 此处不对 l 取和. 这个解可认为是 Schwarzschid 解的推广. 场源除具有质量之外, 还具有 l 阶质量多极矩.

$l=1$ 对应于质量偶极矩的场，在物理上这个解无意义, 因为没有负质量存在. $l=2$ 的解描述四极矩的引力场. 令 $\sigma=g_2$, 我们可将这个解写为

$$\begin{aligned}\psi=&\frac{1}{2}\left\{\left[1+\frac{1}{4}\sigma(3x^2-1)(3y^2-1)\right]\ln\frac{x-1}{x+1}\right.\\&\left.+\frac{3}{2}\sigma x(3y^2-1)\right\}.\end{aligned} \tag{1.8.15}$$

这时函数 γ 的表示式为

$$\begin{aligned}\gamma=&\frac{9}{64}\sigma^2\left[(9x^4-10x^2+1)\ln^2\frac{x-1}{x+1}+(36x^2-28x)\right.\\&\left.\times\ln\frac{x-1}{x+1}+36x^2-16\right]y^4+\left\{\frac{9}{32}\sigma^2(-5x^4+6x^2-1)\right.\\&\times\ln\frac{x-1}{x+1}+\left[\frac{3}{2}\sigma x+\frac{9}{32}\sigma^2\left(-20x^3+\frac{52}{3}x\right)\right]\\&\left.\times\ln\frac{x-1}{x+1}+3\sigma+\frac{9}{32}\sigma^2\left(-20x^2+\frac{32}{3}\right)\right\}y^2+\left(\frac{1}{2}\sigma^2\right.\\&\left.+\sigma+\frac{1}{2}\right)\ln\frac{x^2-1}{x^2-y^2}+\frac{9}{64}\sigma^2(x^4-2x^2+1)\ln^2\frac{x-1}{x+1}\\&+\left[\frac{1}{16}\sigma^2(9x^2-15x)-\frac{3}{2}\sigma x\right]\times\ln\frac{x-1}{x+1}+\frac{9}{16}\sigma^2\\&\times\left(x^2-\frac{3}{4}\right)+3\sigma.\end{aligned} \tag{1.8.16}$$

γ 中的积分常数是根据无限远处边界条件确定的 (当 $x \to \infty$ 时 $\gamma \to 0$).

为了说明上面的解在远离引力场源时的行为, 我们先将 Weyl-Levi-Civita 线元按椭球坐标 x 和 y 写出 [注意到 (1.8.1) 和 (1.8.2)]

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2 =& \mathrm{e}^{2\psi}c^2\mathrm{d}t^2 - m^2\mathrm{e}^{2(\gamma-\psi)}(x^2-y^2)\left(\frac{\mathrm{d}x^2}{x^2-1}+\frac{\mathrm{d}y^2}{1-y^2}\right) \\ & - m^2\mathrm{e}^{-2\psi}(x^2-1)(1-y^2)\mathrm{d}\varphi^2.\end{aligned} \tag{1.8.17}$$

借助于关系式

$$x = \frac{r}{m} - 1, \quad y = \cos\theta, \tag{1.8.18}$$

可将 (1.8.17) 写为球坐标形式

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2 =& \mathrm{e}^{2\psi}c^2\mathrm{d}t^2 - \mathrm{e}^{2(\gamma-\psi)}\left[\left(1+\frac{m^2\sin^2\theta}{r^2-2mr}\right)\right]\mathrm{d}r^2 \\ & +(r^2-2mr+m^2\sin^2\theta)\mathrm{d}\theta^2\Big] - \mathrm{e}^{-2\psi}(r^2-2mr)\times\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2.\end{aligned} \tag{1.8.19}$$

令 $x^0 = ct, x^1 = r, x^2 = \theta, x^3 = \varphi$, 并按 $\dfrac{1}{r}$ 展开, 得到

$$\begin{aligned}g_{00} =& 1 + 2\Bigg\{-\frac{m}{r}+\frac{Q}{r^3}P_2(\cos\theta)-\frac{9Qm}{r^4}P_2(\cos\theta) \\ & +\frac{4}{19}\frac{Qm^2}{r^5}P_2(\cos\theta)+\frac{1}{r^6}\Big[-\frac{25}{7}Qm^3P_2(\cos\theta) \\ & +\frac{1}{2}Q^2(P_2(\cos\theta))^2\Big]+\cdots\Bigg\}.\end{aligned} \tag{1.8.20}$$

式中 $Q = 2m^3\sigma/15$ 是质量四极矩. 度规张量的其他量可按类似方法展开

$$\begin{aligned}g_{11} =& -1-\frac{2m}{r}\left(\frac{m}{r}\right)^2\left[4+\frac{9}{5}\sigma^2-2(\sigma+\sigma^2)\sin^2\theta\right] \\ & -\left(\frac{m}{r}\right)^3\left[8-\frac{16}{3}\sigma+\frac{36}{5}\sigma^2-\left(\frac{38}{5}\sigma+4\sigma^2\right)\times\sin^2\theta\right]+\cdots\end{aligned} \tag{1.8.21}$$

对于质量为 m、四极矩为 Q 的质量源, 在球坐标系中保留至 $\left(\dfrac{m}{r}\right)^4$ 项, (1.8.17)~(1.8.19) 表示为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2 =& \left(1-\frac{2m}{r}\right)\left\{1+\frac{4m^3\sigma}{15r^3}\left(1+\frac{3m}{r}\right)P_2(\cos\theta)\right\}\mathrm{d}x^{0^2} \\ & -\left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1}\Big[1-\frac{4m^3\sigma}{15r^3}P_2(\cos\theta)-\frac{m^4\sigma}{5r^4} \\ & \times(5\cos^4\theta-1)\Big]\mathrm{d}r^2 - r^2\Big[1-\frac{4m^3\sigma}{15r^3}P_2(\cos\theta)\end{aligned}$$

$$-\frac{m^4\sigma}{5r^4}(5\cos^2\theta-1)\Big]\mathrm{d}\theta^2-\frac{1}{r^2}\Big[1+\frac{4m^3\sigma}{15r^3}\left(1+\frac{3m}{r}\right)$$

$$\times P(\cos\theta)\Big]^{-1}\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2. \tag{1.8.22}$$

根据近年来的测量结果, 对于太阳, $\sigma\sim10^7$; 对于地球, $\sigma\sim1.5\times10^6$.

1.9 Vaidya 解

Vaidya 度规描述具有球对称性的辐射引力场. 我们可以解相应的 Einstein 场方程, 导出这一度规.

对于球对称辐射的非旋转球体 (场源), 能–动张量可写为

$$T_{\mu\nu}=qk_\mu k_\nu, \tag{1.9.1}$$

式中 k_μ 是向外辐射的零矢量, q 是局部观察者测得的辐射能量密度 (观察者具有四维速度 v^μ), 即

$$q=T_{\mu\nu}v^\mu v^\nu. \tag{1.9.2}$$

采用 Schwarzschild 坐标, 具有上述性质的度规的最普遍形式是 (取 $c=G=1$)

$$\mathrm{d}s^2=\left[\frac{\dot{m}}{f(m)}\right]^2\left(1-\frac{2m}{r}\right)\mathrm{d}t^2-\left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1}\times\mathrm{d}r^2-r^2\mathrm{d}\Omega^2. \tag{1.9.3}$$

式中 $m=m(r,t)$,

$$f(m)=m'\left(1-\frac{2m}{r}\right), \tag{1.9.4}$$

$$\dot{m}\equiv\frac{\partial m}{\partial t},\quad m'\equiv\frac{\partial m}{\partial r}.$$

直接计算可得到 $R_{\mu\nu}$ 的表示式

$$R_{\mu\nu}=\frac{2m'}{r^2}\left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1}\left(\frac{\dot{m}}{m'}\delta_\mu^0+\delta_\mu^1\right)\left(\frac{\dot{m}}{m'}\delta_\nu^0+\delta_\nu^1\right). \tag{1.9.5}$$

下面我们将度规 (1.9.3) 在推迟坐标系中给出. 在推迟坐标系 (u,r,θ,φ) 中, Vaidya 线元 (1.9.3) 具有形式

$$\mathrm{d}s^2=\left[1-\frac{2m(u)}{r}\right]\mathrm{d}u^2+2\mathrm{d}u\mathrm{d}r-r^2\mathrm{d}\Omega^2. \tag{1.9.6}$$

式中 u 是 Schwarzschild 几何中的推迟时间坐标，它与 Schwarzschild 时间坐标之间的关系是

$$u = t - r - 2m\ln(r - 2m). \tag{1.9.7}$$

这一变换要求 $\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}u} = 0$.

在上述坐标系中, $g^{\mu\nu}$ 的不为零分量可由 (1.9.6) 求得

$$\begin{aligned} g^{01} &= 1, \\ g^{11} &= -\left(1 - \frac{2m}{r}\right), \\ g^{22} &= -\frac{1}{r^2}, \\ g^{33} &= -\frac{1}{r^2 \sin^2\theta}. \end{aligned} \tag{1.9.8}$$

从而有

$$\begin{aligned} &\Gamma^0_{00} = -\frac{m}{r^2}, \\ &\Gamma^0_{22} = r, \\ &\Gamma^0_{33} = r\sin^2\theta, \\ &\Gamma^1_{00} = -\frac{\dot{m}}{r} + \frac{m}{r^3}(r - 2m), \\ &\Gamma^1_{01} = \Gamma^1_{10} = \frac{m}{r^2}, \\ &\Gamma^1_{22} = 2m - r, \\ &\Gamma^1_{33} = (2m - r)\sin^2\theta, \\ &\Gamma^2_{21} = \Gamma^2_{12} = \frac{1}{r}, \\ &\Gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta, \\ &\Gamma^3_{31} = \Gamma^3_{13} = \frac{1}{r}, \\ &\Gamma^3_{32} = \Gamma^3_{23} = \cot\theta, \\ &\Gamma^\tau_{\mu\nu}\text{其余分量为零}. \end{aligned} \tag{1.9.9}$$

$R_{\mu\nu}$ 的表示式为

$$R_{\mu\nu} = -\frac{2}{r^2}\dot{m}\delta^0_\mu\delta^0_\nu. \tag{1.9.10}$$

标曲率 $R = 0$, 于是能量–动量张量为

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{k}\frac{1}{r^2}\dot{m}\delta^0_\mu\delta^0_\nu. \tag{1.9.11}$$

(1.9.11) 表示辐射场的能–动张量, 具有几何光学形式. 比较 (1.9.11) 和 (1.9.1), 我们得到

$$q = -\frac{2}{k}\frac{\dot{m}(u)}{r^2}. \tag{1.9.12}$$

上诸式中 $\dot{m} \equiv \dfrac{\mathrm{d}m(u)}{\mathrm{d}u}$, 即辐射的能量密度.

为了将 Vaidya 度规以零标架形式给出, 首先将度规 (1.9.6) 写为

$$\mathrm{d}s^2 = l_\mu n_\nu \mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu + n_\mu l_\nu \mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu - m_\mu \overline{m}_\nu \mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu - \overline{m}_\mu m_\nu \mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu, \tag{1.9.13}$$

(1.9.6) 还可改写为 (对称化形式)

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2 =&\mathrm{d}u\left\{\frac{1}{2}\left[1-\frac{2m(u)}{r}\right]\mathrm{d}u+\mathrm{d}r\right\}\\&+\left\{\frac{1}{2}\left[1-\frac{2m(u)}{r}\right]\mathrm{d}u+\mathrm{d}r\right\}\mathrm{d}u-\left[\frac{r}{\sqrt{2}}(\mathrm{d}\theta-i\sin\theta\mathrm{d}\varphi)\right]\\&\times\left[\frac{r}{\sqrt{2}}(\mathrm{d}\theta-i\sin\theta\mathrm{d}\varphi)\right]-\left[\frac{r}{\sqrt{2}}(\mathrm{d}\theta-i\sin\theta\mathrm{d}\varphi)\right]\\&\times\left[\frac{r}{\sqrt{2}}(\mathrm{d}\theta+i\sin\theta\mathrm{d}\varphi)\right].\end{aligned} \tag{1.9.14}$$

比较 (1.9.13) 和 (1.9.14), 得到零标架矢量的协变分量

$$\begin{aligned}l_\mu &= \delta^0_\mu,\\ n_\mu &= \frac{1}{2}\left(1-\frac{2m(r)}{r}\right)\delta^0_\mu+\delta^1_\mu,\\ m_\mu &= -\frac{r}{\sqrt{2}}(\delta^2_\mu+i\sin\theta\delta^3_\mu).\end{aligned} \tag{1.9.15}$$

m_μ 表示式加一个负号是为了和 Kinnersiey 线 (见 2.1 节) 一致.

为了给出标架矢量的逆变分量或方向导数, 我们写出

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial s^2} =&(l^\mu\partial_\mu)(u^\nu\partial_\nu)+(n^\mu\partial_\mu)(l^\nu\partial_\nu)\\&-(m^\mu\partial_\mu)\times(\overline{m}^\nu\partial_\nu)-(\overline{m}^\mu\partial_\mu)(m^\nu\partial_\nu),\end{aligned} \tag{1.9.16}$$

或者等效地有

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2} = \mathrm{D}\Delta+\Delta\mathrm{D}-\delta\overline{\delta}-\overline{\delta}\delta. \tag{1.9.17}$$

上式又可写为

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2} = \frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial}{\partial r}-\left[1-\frac{2m(u)}{r}\right]\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^2-\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^2-\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)^2. \tag{1.9.18}$$

将 (1.9.18) 重新整理和对称化, 然后与 (1.9.16) 或 (1.9.17) 比较, 得到

$$\mathrm{D}=\frac{\partial}{\partial r},$$

$$\Delta = \frac{\partial}{\partial u} - \frac{1}{2}\left[1 - \frac{2m(u)}{r}\right]\frac{\partial}{\partial r},$$
$$\delta = \frac{1}{\sqrt{2}r}\left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \mathrm{i}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right). \tag{1.9.19}$$

根据零矢量和它们的方向导数可以计算旋系数. 由 (1.9.9) 和 (1.9.15) 得

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}l^\mu =&0, \quad \Delta l^\mu = 0, \quad \delta l^\mu = 0,\\
\mathrm{D}n^\mu =&\frac{1}{r}\left[1 - \frac{2m(u)}{r}\right]n^\mu - \frac{1}{r}\left[1 - \frac{2m(u)}{r}\right] \times \delta^\mu_0\\
&+ \frac{\mathrm{d}m(u)}{\mathrm{d}u}\frac{1}{r}\delta^\mu_1 + \frac{1}{2}r\left[1 - \frac{m(u)}{r}\right] \times \left[1 - \frac{2m(u)}{r}\right]\delta^\mu_1,\\
\delta n^\mu =&0,\\
\mathrm{D}m^\mu =& -\frac{1}{r}m^\mu,\\
\Delta m^\mu =& -\frac{1}{2r}\left[1 - \frac{2m(u)}{r}\right]m^\mu,\\
\delta m^\mu =& -\frac{\mathrm{i}\cos\theta}{2r^2\sin^2\theta}\delta^\mu_3,\\
\bar{\delta} m^\mu =&\delta m^\mu.
\end{aligned} \tag{1.9.20}$$

将上述结果代入 (1.9.9), 得到非零旋系数

$$\begin{aligned}
\rho &= -\frac{1}{r},\\
\alpha &= -\frac{\cot\theta}{2\sqrt{2}r},\\
\beta &= -\alpha,\\
\mu &= -\frac{1}{2r} + \frac{m(u)}{r^2},\\
\gamma &= \frac{m(u)}{2r^2}.
\end{aligned} \tag{1.9.21}$$

还可以得到 Rici 张量零迹部分的非零分量

$$\Phi_{22} = -\frac{\dot{m}(u)}{r^2}. \tag{1.9.22}$$

Weyl 张量的非零分量只有一个

$$\Psi^2 = -\frac{m(u)}{r^3}. \tag{1.9.23}$$

由 (1.9.2.2) 可以计算 Rici 张量的分量. 因为 $R = 0$, 从而有 $R_{\mu\nu} = R_{mn}Z^m_\mu Z^n_\nu = 2\Phi_{22}l_\mu l_\nu$, 它是能 – 动张量的 k 倍

$$kT_{\mu\nu} = -\frac{2\dot{m}(u)}{r^2}l_\mu l_\nu \tag{1.9.24}$$

辐射场的能 - 动张量具有几何光学形式.

我们可以看到, Vaidya 辐射场不满足无源 Maxwell 方程, 这是预料之内的事情, 因为辐射场有单极结构.

实际上在标架形式中, 无源 Einstein-Maxwell 方程由下述代数关系给出:

$$\Phi_{mn} = \phi_m \overline{\phi}_n. \tag{1.9.25}$$

由于 Φ_{mn} 只有一个非零分量, 我们令

$$\phi_2 = \sqrt{-\dot{m}}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k}}{r}, \quad \phi_0 = \phi = 0. \tag{1.9.26}$$

将 (1.9.26) 代入 $j^\mu = 0$ 的 Maxwell 方程直接得到矛盾的结果: 一方面 k 只是 u 和 ϕ 的函数, 另一方面 $\dfrac{\partial k}{\partial \phi} = \cos\theta$. 这就是说 Vaidya 度规不满足无源 Maxwell 方程.

我们还可以计算辐射能量通量. 对于静止于无限远的观察者, 结果是 $s = -\dot{m}$, 即等于辐射物体质量减少率.

1.10 电 (磁) 荷、磁矩和质量四极矩的外部解

为了揭示一些天体的引力性质，寻求同时具有电荷 (磁荷)、磁矩和质量四极矩的质量源的引力场是有意义的.

我们在 1.5 节中得到一个具有电荷和磁矩的中心质量引力场, 没有考虑质量四极矩的存在, 也没有考虑电荷 (磁荷) 和磁矩的相互作用对引力场的贡献. 在考虑到这些作用之后, 本节采用微扰论的方法, 获得场方程的解.

在所讨论的情况下, 所寻求的度规中应该含有质量四极矩 J 和磁矩 p 的相互作用项. 与质量 M 的贡献相比, 四极矩 J 和磁矩 p 已经是小量. 因此可忽略 J 和 p 的相互作用的贡献.

静态辐射对称线元在柱坐标系 (ρ, z, ϕ) 中的普遍形式可写为

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{e}^{2\psi}c^2\mathrm{d}t^2 - \mathrm{e}^{2(\gamma-\psi)}(\mathrm{d}\rho^2 + \mathrm{d}z^2) - \rho^2\mathrm{e}^{-2\psi}\mathrm{d}\phi^2, \tag{1.10.1}$$

其中 ψ 和 γ 只是 ρ, z 的函数.

质量外部的 Einstein-Maxwell 方程具有形式

$$R_{\alpha\beta} = 2k\left(-F_{\alpha\mu}F^\mu_\beta + \frac{1}{4}g_{\alpha\beta}F_{\sigma\tau}F^{\sigma\tau}\right), \tag{1.10.2}$$

$$F^{\mu\nu}_{;\nu} = 0. \tag{1.10.3}$$

式中 $F_{\sigma\tau} = A_{\tau;\sigma} - A_{\sigma;\tau}$, A_μ 是电磁场四维势, $k \equiv \dfrac{G}{c^4}$.

电磁场只含纯磁场的条件为

$$F_{\mu\nu} = 2g^{-\frac{1}{2}}(\xi_\mu B_\nu - \xi_\nu B_\mu), \tag{1.10.4}$$

式中 ξ_μ 为类时 Killing 矢量. 由上式可得

$$F_{i\nu}^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\xi^\mu(g_{00}^{-1}g^{\nu\alpha}A_{,\alpha})_{;\alpha} \tag{1.10.5}$$

式中 $A = \xi^\mu A_\mu$,

将 (1.10.1) 和 (1.10.5) 代入 (1.10.3), 得到 A 满足的方程

$$\nabla^2 A - 2\nabla\psi \cdot \nabla A = 0. \tag{1.10.6}$$

式中 ∇ 和 ∇^2 是平直空间柱坐标系中的梯度算符和拉普拉斯算符.

由于场具有辐射对称性, 所以 A_μ 只有一个非零分量 $A_\varphi \equiv A$. 于是可将 Einstein 方程 (1.10.2) 写成如下形式:

$$\nabla^2\psi = k\mathrm{e}^{-2\psi}|\nabla A|^2, \tag{1.10.7a}$$

$$\nabla^2(\psi - \gamma) + \frac{2}{p}\gamma_{,\rho} - 2\psi_{,\rho}^2 = k\mathrm{e}^{-2\psi}(A_{,z}^2 - A_{,\rho}^2), \tag{1.10.7b}$$

$$\nabla^2(\psi - \gamma) - 2\psi_{,z}^2 = k\mathrm{e}^{-2\psi}(A_{,\rho}^2 - A_{,z}^2), \tag{1.10.7c}$$

$$\gamma_{,z} - 2\rho\psi_{,\rho}\psi_{,z} = -2k\rho\mathrm{e}^{-2\psi}A_{,\rho}A_{,z} \tag{1.10.7d}$$

(1.10.7b),(1.10.7c) 和 (1.10.7d) 消去二阶微分项得

$$\gamma_{,\rho} = \rho\psi_{,\rho}^2 - \rho\psi_{,z}^2 - k\rho\mathrm{e}^{-2\psi}(A_{,\rho}^2 - A_{,z}^2), \tag{1.10.8a}$$

$$\gamma_{,z} = 2\rho\psi_{,\rho}\psi_{,z} - 2k\rho\mathrm{e}^{-2\psi}A_{,\rho} \cdot A_{,z}, \tag{1.10.8b}$$

作变换

$$\rho^2 = (r^2 - 2mr + kQ^2)(1 - \mu^2), \tag{1.10.9a}$$

$$z = (r - m)\mu, \quad -1 \leqslant \mu \leqslant \cos\theta \leqslant 1. \tag{1.10.9b}$$

式中 $k = \dfrac{G}{c^4}$, Q 为星体电荷 (磁荷). 在此变换下, 方程 (1.10.6)、(1.10.7a)、(1.10.8a) 和 (1.10.8b) 分别成为

$$\begin{aligned}&[(r^2 - 2mr + kQ^2)A_{,r}]_{,r} + [(1 - \mu^2)A_{,\mu}]_{,\mu}\\ =&2(r^2 - 2mr + kQ^2)A_{,r}\psi_{,r} + 2(1 - \mu^2)A_{,\mu}\psi_{,\mu}.\end{aligned} \tag{1.10.10a}$$

$$[(r^2 - 2mr + kQ^2)\psi_{,\nu}]_r + [(1 - \mu^2)\psi_{,\mu}]_\mu$$

$$=k\mathrm{e}^{-2\psi}[(r^2-2mr+kQ^2)A_{,r}^2+(1-\mu^2)A_{,\mu}^2]. \tag{1.10.10b}$$

$$\begin{aligned}\gamma_{,r}=&\frac{1-\mu^2}{(r-m)^2+(kQ^2-m^2)\mu^2}\Big\{(r-m)(r^2-2mr+kQ^2)\\&\times[\psi_{,r}^2-k\mathrm{e}^{-2\psi}A_{,r}^2]-(r-m)(1-\mu^2)\\&\times[\psi_{,\mu}^2-k\mathrm{e}^{-2\psi}A_{,\mu}^2]-2\mu(r^2-2mr+kQ^2)[\psi_{,r}\psi_{,\mu}\\&-k\mathrm{e}^{-2\psi}A_{,r}A_{,\mu}]\Big\}.\end{aligned} \tag{1.10.10c}$$

$$\begin{aligned}\gamma_{,\mu}=&\frac{r^2-2mr+kQ^2}{(r-m)^2+(kQ^2-m^2)\mu^2}\Big\{\mu(r^2-2mr+kQ^2)[\psi_{,r}^2-k\mathrm{e}^{-2\psi}A_{,r}^2]\\&-\mu(1-\mu^2)[\psi_{,\mu}^2-k\mathrm{e}^{-2\psi}A_{,\mu}^2]\\&+2(r-m)(1-\mu^2)[\psi_{,r}\psi_{,\mu}-k\mathrm{e}^{-2\psi}A_{,r}A_{,\mu}]\Big\}.\end{aligned} \tag{1.10.10d}$$

变换之后的线元表示为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2=&\mathrm{e}^{2\psi}c^2\mathrm{d}t^2-\mathrm{e}^{2(\nu-\psi)}[(r-m)^2+(kQ^2-m^2)\mu^2]\\&\times\left(\frac{\mathrm{d}r^2}{r^2-2mr+kQ^2}+\frac{\mathrm{d}\mu^2}{1-\mu^2}\right)\cdot(r^2-2mr+kQ^2)\\&\times(1-\mu^2)\mathrm{e}^{-2\psi}\mathrm{d}\phi^2.\end{aligned} \tag{1.10.11}$$

下面我们解方程 (1.10.10). 注意到方程中含有引力常数 k, 因此应有 $\psi=\psi(r,\mu,k), A=A(r,\mu,k).k=\dfrac{G}{c^4}$ 很小, 我们将 ψ 和 A 展开成 k 的幂级数

$$\psi(r,\mu,k)=\psi^{(0)}(r,\mu)+k\psi^{(1)}(r,\mu)+k^2\psi^{(2)}(r,\mu)+\cdots \tag{1.10.12a}$$

$$A(r,\mu,k)=A^{(0)}(r,\mu)+kA^{(1)}(r,\mu)+k^2A^{(2)}(r,\mu)+\cdots \tag{1.10.12b}$$

将 (1.10.12) 代入 (1.10.10) 并比较各项的量级, 得到

$$[(r^2-2mr)\psi_{,r}^{(0)}]_{,r}+[(1-\mu^2)\psi_{,\mu}^{(0)}]_{,\mu}=0. \tag{1.10.13a}$$

$$\begin{aligned}&[(r^2-2mr)A_{,r}^{(0)}]_{,r}+[(1-\mu^2)A_{,\mu}^{(0)}]_{,\mu}\\=&2(r^2-2mr)A_{,r}^{(0)}\psi_{,r}^{(0)}+2(1-\mu^2)A_{,\mu}^{(0)}\psi_{,\mu}^{(0)}.\end{aligned} \tag{1.10.13b}$$

$$\begin{aligned}&[(r^2-2mr)\psi_{,r}^{(1)}]_{,r}+[(1-\mu^2)\psi_{,\mu}^{(1)}]_{,\mu}\\=&-Q^2\psi_{,rr}+\mathrm{e}^{-2\psi(0)}[(r^2-2mr)A_{,r}^{(0)^2}+(1-\mu^2)A_{,\mu}^{(0)^2}].\end{aligned} \tag{1.10.13c}$$

$$\begin{aligned}&[(r^2-2mr)A_{,r}^{(1)}],r+[(1-\mu^2)A_{,\mu}^{(1)}]_{,\mu}\\=&-Q^2A_{,rr}^{(0)}+2Q^2A_{,r}^{(0)}\psi_{,r}^{(0)}+2(r^2-2mr)[A_{,r}^{(0)}\psi_{,r}^{(1)}+A_{,r}^{(1)}\psi_{,r}^{(0)}]\\&+(1-\mu^2)[A_{,\mu}^{(0)}\psi_{,\mu}^{(1)}+A_{,\mu}^{(1)}\psi_{,\mu}^{(0)}].\end{aligned} \tag{1.10.13d}$$

$$
\begin{aligned}
&[(r^2-2mr)A^{(i)}_{,r}]_{,r}+[(1-\mu^2)A^{(i)}_{,\mu}]_{,\mu}\\
=&-Q^2A^{(i-1)}_{,rr}+2(r^2-2mr)A^{(i)}_{,r}\psi^{(0)}_{,r}\\
&+2(1-\mu^2)A^{(i)}_{,\mu}\psi^{0}_{,\mu}+2\sum_{j-0}^{i-1}\left\{(r^2-2mr)A^{(j)}_{,r}\psi^{(i-j)}_{;r}\right.\\
&\left.+Q^2A^{(j)}_{,r}\psi^{(i-j-1)}_{,r}+(1-\mu^2)A^{(j)}_{,\mu}\psi^{(i-j)}\mu\right\},\quad i=1,2,\cdots
\end{aligned}
\tag{1.10.13e}
$$

方程 (1.10.13a) 可用分离变量法求解. 对于中心质量和质量四极矩产生的引力场, 可求得

$$
\begin{aligned}
\psi^{(0)}=&\frac{1}{2}\ln\left(1-\frac{2m}{r}\right)+\frac{1}{4}J(3\mu^2-1)\left[\frac{45}{2m^4}(r-m)\right.\\
&\left.+\frac{15}{4m^5}(3r^2-6mr+2m^2)\ln\left(1-\frac{2m}{r}\right)\right].
\end{aligned}
\tag{1.10.14}
$$

式中 J 为质量四极矩.

下面解方程 (1.10.13b). 由 (1.10.14) 可知 $\psi^{(0)}=\psi^{(0)}(r,\mu,J)$. 于是应有 $A^{(0)}=A^{(0)}(r,\mu,J)$. 由于 J 很小, 我们将 $A^{(0)}$ 展开为 J 的幂级数

$$
A^{(0)}(r,\mu,J)=A^{(0)}_{(0)}(r,\mu)+JA^{(0)}_{(1)}+o(J^2).
\tag{1.10.15}
$$

略去 (1.10.15) 中 J^2 以上高阶项, 代入 (1.10.13b), 并比较 J 的同次项系数, 得到 $A^{(0)}_{(0)}$ 满足的方程

$$
\left[(r^2-2mr)A^{(0)}_{(0),r}\right]_{,r}+\left[(1-\mu^2)A^{(0)}_{(0),\mu}\right]_{,\mu}-2mA^{(0)}_{(0),r}=0.
\tag{1.10.16}
$$

(1.10.16) 是在 Schwarzschild 背景度规下的 Maxwell 方程, 用分离变量法易得其解

$$
A^{(0)}_{(0)}=\sum_{l=0}^{\infty}R_l(r)p_l(\mu).
\tag{1.10.17}
$$

式中 $P_l(\mu)$ 是 l 阶勒让德多项式, $R_l(r)$ 满足方程

$$
[(r^2-2mr)R_{,r}]_{,r}-2mR_{,r}-l(l+1)R=0.
\tag{1.10.18}
$$

显然

$$
R_0=\frac{a}{r},
\tag{1.10.19}
$$

$$
R_1=b\left[2\left(\frac{m}{r}-1\right)+\left(2+\frac{r}{m}\right)\ln\left(1-\frac{2m}{r}\right)\right].
\tag{1.10.20}
$$

式中 a 和 b 为积分常数.

将 (1.10.19) 和 (1.10.20) 代入 (1.10.17), 取 $r\to\infty$ 时的极限, 并和经典情况下电荷 (磁荷) 和磁矩的势比较, 可确定积分常数 a 和 b

$$a=Q,\quad b=-\frac{3p}{4m^2}. \tag{1.10.21}$$

式中 Q 和 p 分别为中心质量具有的电荷 (磁荷) 和磁矩. 于是我们得到 Schwarzschild 背景度规下的电荷 (磁荷) 和磁矩的势

$$A^{(0)}_{(0)}=\frac{Q}{r}-\frac{3p\mu}{4m^2}\left[2\left(\frac{m}{r}-1\right)+\left(2-\frac{r}{m}\right)\ln\left(1-\frac{2m}{r}\right)\right]. \tag{1.10.22}$$

将 (1.10.14)、(1.10.15) 和 (1.10.22) 代入 (1.10.13b), 得到 $A^{(0)}_{(1)}$ 满足的方程

$$\begin{aligned}&[(r^2-2mr)A^{(0)}_{(1),r}]_{,r}+[(1-\mu^2)A^{(0)}_{(1)},\mu]_{,\mu}-2mA^{(0)}_{(1),r}\\&=g_0(r)+g_1(r)\mu+g_2(r)\mu^2+g_3(r)\mu^3.\end{aligned} \tag{1.10.23}$$

式中

$$\begin{aligned}g_0(r)\equiv&\frac{Q}{r^2}\left[\frac{45}{4m^5}(r-m)(r^2-2mr)\ln\left(1-\frac{2m}{r}\right)\right.\\&\left.+\frac{15}{2m^4}\times(3r^2-6mr+m^2)\right].\end{aligned} \tag{1.10.24}$$

$$\begin{aligned}g_1(r)\equiv&-\frac{45p}{8m^8}\left[\frac{3}{2}(r-2m)(-2r^2+5mr-2m^2)\times\left[\ln\left(1-\frac{2m}{r}\right)\right]^2\right.\\&+\left(-12r^2+42mr-44m^2+\frac{12m^3}{r}\right)\times m\ln\left(1-\frac{2m}{r}\right)\\&\left.+30m^2\left(-6r+15m-\frac{14m^2}{r}+\frac{m^3}{r^2}\right)\right].\end{aligned} \tag{1.10.25}$$

$$\begin{aligned}g_2(r)\equiv&-\frac{3Q}{r^2}\left[\frac{45}{4m^5}(r-m)(r^2-2mr)\ln\left(1-\frac{2m}{r}\right)\right.\\&\left.+\frac{15}{2m^4}\times(3r^2-6mr+m^2)\right].\end{aligned} \tag{1.10.26}$$

$$\begin{aligned}g_3(r)\equiv&\frac{135p}{4m^7}\left[\left(3r^2-3mr-7m^2+\frac{4m^3}{r}\right)\ln\left(1-\frac{2m}{r}\right)\right.\\&+\frac{1}{2}(r-2m)(3r-2m)\left[\ln\left(1-\frac{2m}{r}\right)\right]^2\\&\left.+m^2\left(3-\frac{8m}{r}+\frac{m^2}{r^2}\right)\right]\end{aligned} \tag{1.10.27}$$

显然, 方程 (1.10.23) 的解可写为

$$A^{(0)}_{(0)}=f_0(r)+f_1(r)\mu+f_2(r)\mu^2+f_3(r)\mu^3. \tag{1.10.28}$$

将此式代入 (1.10.23), 得到 $f_i(r)$ 满足的方程

$$[(r^2-2mr)f_{3,r}]_{,r}-2mf_{3,r}-12f_3=g_3(r), \tag{1.10.29a}$$

$$[(r^2-2mr)f_{2,r}]_{,r}-2mf_{2,r}-6f_2=g_2(r), \tag{1.10.29b}$$

$$[(r^2-2mr)f_{1,r}]_{,r}-2mf_{1,r}-2f_1=g_1(r)-6f_3(r), \tag{1.10.29c}$$

$$[(r^2-2mr)f_{0,r}]_{,r}-2mf_{0,r}=g_0(r)-2f_2(r). \tag{1.10.29d}$$

积分 (1.10.29), 略去 $\left(\frac{m}{r}\right)^6$ 以上高阶项, 得到

$$\begin{aligned}A_{(1)}^{(0)}=&\frac{Q}{r^4}\left(\frac{1}{2}+\frac{9m}{7r}\right)-\frac{Q}{r^4}\left(\frac{3}{2}+\frac{27m}{7r}\right)\cos^2\theta\\&+\frac{p\cos\theta}{r^5}\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\cos^2\theta\right).\end{aligned} \tag{1.10.30}$$

$A_{(1)}^{(0)}$ 是质量四极矩对 Schwarzschild 背景下磁荷和磁矩的势的修正.

下面解方程 (1.10.13c). 将 $\psi^{(0)}$ 和 $A^{(0)}$ 的表达式代入, 并忽略 J 和 p 的相互作用项, 我们得到

$$\begin{aligned}&[(r^2-2m)\psi^{(1)}_{,r}]_{,r}+[(1-\mu^2)\psi^{(1)}_{,\mu}]_{,\mu}\\=&v_0(r)-Q^2\psi^{(0)}_{,rr}+v_1(r)\mu+\mu^2v_2(r).\end{aligned} \tag{1.10.31}$$

式中

$$v_0(r)\equiv\frac{9p^2}{16m^4}\left[2\left(\frac{m}{r}-1\right)+\left(2-\frac{r}{m}\right)\ln\left(1-\frac{2m}{r}\right)\right]^2+\frac{Q}{r^2}+\frac{9JQ^2}{2r^5}. \tag{1.10.32}$$

$$v_1(r)\equiv-\frac{3pQ}{2m^2}\left[\frac{2}{r}+\frac{2m}{r^2}+\frac{1}{m}\ln\left(1-\frac{2m}{r}\right)\right], \tag{1.10.33}$$

$$\begin{aligned}v_2(r)\equiv&\frac{9p^2}{16m^4}\left[2+\frac{2m}{r}+\frac{r}{m}\ln\left(1-\frac{2m}{r}\right)\right]^2\\&-\frac{9p^2}{16m^4}\cdot\frac{1}{1-\frac{2m}{r}}\times\left[2\left(\frac{m}{r}-1\right)+\left(2-\frac{r}{m}\right)\ln\left(1-\frac{2m}{r}\right)\right]^2-\frac{27JQ^2}{2r^5}.\end{aligned} \tag{1.10.34}$$

将 (1.10.31) 的解写为下面的形式:

$$\psi^{(1)}=h_0(r)+h_1(r)\mu+h_2(r)\mu^2, \tag{1.10.35}$$

代入 (1.10.31), 得到 $h_i(r)$ 满足的方程, 解之得

$$h_0(r)=\frac{Q^2}{2r(r-2m)}-\int\frac{2h_2\mathrm{d}r}{r(r-2m)}\mathrm{d}r+w_1(r)+w_2(r). \tag{1.10.36a}$$

式中

$$w_1(r) \equiv \frac{9p^2}{16m^4}\left\{\frac{1}{6m^2}(r-m)(r-2m)\left[\ln\left(1-\frac{2m}{r}\right)\right]^2 + \frac{2r}{3m}\ln\left(1-\frac{2m}{r}\right) - 2\int\frac{\left[\ln\left(1-\frac{2m}{r}\right)\right]^2}{r}\mathrm{d}r + \frac{4}{3}\ln\left(1-\frac{2m}{r}\right)\int\frac{\ln\left(1-\frac{2m}{r}\right)}{r}\mathrm{d}r\right\}, \tag{1.10.37a}$$

$$w_2(r) \equiv \frac{3JQ^2}{32m^5}\left\{15\left[\ln\left(1-\frac{2m}{r}\right)\right]^2 + \frac{397}{8}\ln\left(1-\frac{2m}{r}\right) - \frac{3m^4}{r^4} - \frac{m^3}{r^3} - \frac{3m^2}{4r^2} - \frac{43m}{4r} - \frac{10m}{r-2m} + 60\int\frac{\ln\left(1-\frac{2m}{r}\right)}{r}\mathrm{d}r\right\}. \tag{1.10.38a}$$

$$h_1(r) = -\frac{3pQ}{2m^2}\left\{\frac{4}{m} - \frac{1}{r} + \left(\frac{2r}{m^2} - \frac{5}{2m}\right)\ln\left(1-\frac{2m}{r}\right)\right\}; \tag{1.10.36b}$$

$$h_2(\gamma) = \left(r^2 - 2mr + \frac{2}{3}m^2\right)H_2(r). \tag{1.10.36c}$$

式中

$$H_2(r) = \int\frac{[G_1(r)+G_2(r)]\mathrm{d}r}{r(r-2m)\left(r^2-2mr+\frac{2}{3}m^2\right)^2},$$

$$G_1(r) = \frac{9p^2}{16m^4}\left\{\left(\frac{r^4}{2m} - \frac{4}{3}r^3 + \frac{2m}{3}r^2\right)\left[\ln\left(1-\frac{2m}{r}\right)\right]^2 + 2mr^2 - \frac{8m^4}{3r} + \left(2r^3 - \frac{22}{3}mr^2 + \frac{16}{3}m^2r + \frac{4}{3}m^3\right)\ln\left(1-\frac{2m}{r}\right)\right\}. \tag{1.10.37b}$$

$$G_2(r) = \frac{45JQ^2}{4m^5}\left[-\frac{1}{2}r(r-m)(r-2m)\ln\left(1-\frac{2m}{r}\right) + 2m^2r - mr^2 - \frac{m^3\left(r^2-2mr+\frac{2}{3}m^2\right)}{r(r-2m)} + \frac{3m^5}{5r^2} - \frac{4m^6}{5r^3} + \frac{m^7}{5r^4}\right]. \tag{1.10.38b}$$

至此, 我们已经求得度规 $\psi^{(0)}$ 的一级修正项 $k\psi$. 由前面诸式可见, $\psi^{(1)}$ 具有形式

$$\psi^{(1)} = \psi_Q^{(1)} + \psi_p^{(1)} + \psi_{JQ}^{(1)} + \psi_{pQ}^{(1)}. \tag{1.10.39}$$

类似地, 我们有

$$\psi^{(n)} = \psi_Q^{(n)} + \psi_p^{(n)} + \psi_{JQ}^{(n)} + \psi_{pQ}^{(n)}. \tag{1.10.40}$$

由此可知

$$\psi = \psi_m + \psi_Q + \psi_p + \psi_J + \psi_{pQ} + \psi_{JQ}. \tag{1.10.41}$$

(1.10.41) 中的 $(\psi_m + \psi_J)$ 为

$$\psi_m + \psi_J = \psi(0). \tag{1.10.42}$$

其严格表达式已由 (1.10.14) 给出. (1.10.41) 中的 ψ_Q 为

$$\psi_Q = \sum_{n=1}^{\infty} k^n \psi_Q^{(n)}. \tag{1.10.43}$$

是磁荷 Q 对 ψ 的贡献. (1.10.41) 中的 ψ_p 为

$$\psi_p = \sum_{n=1}^{\infty} k^n \psi_p^{(n)}. \tag{1.10.44}$$

是磁矩 p 对 ψ 的贡献. ψ_{pQ} 和 ψ_{JQ} 分别表示 p、Q 相互作用及 J、Q 相互作用对引力场的贡献.

下面我们给出 ψ_Q 的严格表达式. 用 $A_Q^{(n)}$ 表示磁荷的势的 n 级修正中不含 J 和 P 的部分, 则由 (1.10.13e) 可得

$$A_Q^{(n)} = 0, \quad n \geqslant 1. \tag{1.10.45}$$

又由 (1.10.10b) 得到 $\psi_Q^{(n)}$ 满足的方程

$$[(r^2 - 2m)\psi_{Q,r}^{(n)}], \quad r = -Q^2 \psi_{Q,rr}^{(n-1)}. \tag{1.10.46}$$

对 (1.10.46) 积分, 得到

$$\psi_Q^{(n)} = -Q^2 \int \frac{\psi_{Q,r}^{(n-1)}}{r^2 - 2mr} \mathrm{d}r = \frac{(-1)^{n-1} Q^{2n}}{2n(r^2 - 2mr)}. \tag{1.10.47}$$

将 (1.10.47) 代入 (1.10.43) 得

$$\psi_Q = \sum_{n=1}^{\infty} k^n \psi_Q^{(n)} = \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{kQ^2}{r^2 - 2mr} \right). \tag{1.10.48}$$

至此, g_{00} 已经以明显形式给出

$$g_{00} = \mathrm{e}^{2\psi} = \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{kQ^2}{r^2} \right) \mathrm{e}^{2(\psi_J + \psi_p + \psi_{pQ} + \psi_{JQ})}. \tag{1.10.49}$$

下面计算 g_{11} 中的未知函数 γ. 将 (1.10.30)、(1.10.22) 和 (1.10.12b), 以及 ψ 的表达式代入 (1.10.10c) 积分, 可得 γ 的表达式. 首先将 (1.10.10c) 对 r 积分, 得到

$$\begin{aligned}\gamma = & \int \frac{(1-\mu^2)\mathrm{d}r}{(r-m)^2+(kQ^2-m^2)\mu^2}\Big\{(r-m)(r^2-2mr+kQ^2) \\ & [\psi_{,r}^2 - k\mathrm{e}^{-2\psi}A_{,r}^2] - (r-m)(1-\mu^2) \\ & \times [\psi_{,\mu}^2 - k\mathrm{e}^{-2\psi}A_{,\mu}^2] - 2\mu(r^2-2mr+kQ^2) \\ & \times [\psi_{,r}\psi_{,\mu} - k\mathrm{e}^{-2\psi}A_{,r}A_{,\mu}]\Big\}. \end{aligned} \tag{1.10.50}$$

将 ψ 和 A 的表达式代入积分, 便得到 γ. 在忽略 J、p 相互作用对引力场的贡献之后, 由 (1.10.50) 可知 γ 具有下面的形式:

$$\gamma = \overline{\gamma} + \gamma_J + \gamma_{pQ} + \gamma_p + \gamma_{JQ}. \tag{1.10.51}$$

下面我们对 (1.10.50) 右端各项分别进行讨论和计算. 右端第一项

$$\overline{\gamma} = \gamma_m + \gamma_Q \tag{1.10.52}$$

是当仅有中心质量 m 和磁荷 Q 时的 γ 值. 由 (1.10.50) 得到

$$\overline{\gamma} = \frac{1}{2}\ln(r^2-2mr+kQ^2) - \frac{1}{2}\ln[(r-m)^2+(kQ^2-m^2)\mu^2]. \tag{1.10.53}$$

其中用到了下面的表达式:

$$\psi_m + \psi_Q = \frac{1}{2}\ln\left(1-\frac{2m}{r}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{kQ^2}{r^2-2mr}\right). \tag{1.10.54}$$

$$A_Q = \frac{Q}{r}. \tag{1.10.55}$$

(1.10.51) 右端第二项 γ_J 表示质量四极矩单独对 γ 的贡献. 将 ψ_J 代入 (1.10.50), 积分得

$$\begin{aligned}\gamma_J = & F_0(r) + F_1(r)\mu^2 + F_2(r)\mu^4 \\ & + \frac{45J}{4m^3}\ln\frac{r^2-2mr}{r^2-2mr+m^2(1-\mu^2)}. \end{aligned} \tag{1.10.56}$$

式中

$$\begin{aligned}F_0(r) = & \left(\frac{45}{16}\right)^2\frac{J^2}{m^6}\left[\frac{1}{m^4}(r-m)^4 - \frac{2}{m^2}(r-m)^2+1\right] \\ & \times\left[\ln\left(1-\frac{2m}{r}\right)\right]^2 + \left\{\frac{15^2J^2}{64m^6}\left[\frac{9}{m^2}(r-m)^2\right.\right.\end{aligned}$$

$$
\left.-\frac{15}{m}(r-m)\right]-\frac{45J}{4m^4}(r-m)\Bigg\}\times\ln\left(1-\frac{2m}{r}\right)
$$

$$
+\left(\frac{45}{16}\right)^2\frac{4J^2}{m^6}\left[\frac{1}{m^2}(r-m)^2-\frac{3}{4}\right]+\frac{45J}{2m^5}. \tag{1.10.57}
$$

$$
\begin{aligned}
F_1(r)=&\left(\frac{45}{16}\right)^2\frac{2J^2}{m^6}\left[-\frac{5}{m^4}(r-m)^4+\frac{6}{m^2}(r-m)^2-1\right]\\
&\times\left[\ln\left(1-\frac{2m}{r}\right)\right]^2+\left\{\left(\frac{45}{16}\right)^2\frac{2J^2}{m^6}\left[-\frac{20}{m^3}(r-m)^2\right.\right.\\
&\left.\left.+\frac{52}{3m}(r-m)\right]+\frac{45J}{4m^4}(r-m)\right\}\ln\left(1-\frac{2m}{r}\right)\\
&+\left(\frac{45}{16}\right)^2\frac{2J^2}{m^6}\left[-\frac{20}{m^2}(r-m)^2+\frac{32}{3}\right]+\frac{45J}{2m^3}.
\end{aligned} \tag{1.10.58}
$$

$$
\begin{aligned}
F_2(r)=&\left(\frac{45}{16}\right)^2\frac{J^2}{m^6}\left\{\left[\frac{9}{m^4}(r-m)^2-\frac{10}{m^2}(r-m)^2+1\right]\right.\\
&\times\left[\ln\left(1-\frac{2m}{r}\right)+\frac{36}{m^2}(r-m)^2-\frac{28}{m}(r-m)\right]\\
&\left.\times\ln\left(1-\frac{2m}{r}\right)+\frac{36}{m^2}(r-m)^2-16\right\}.
\end{aligned} \tag{1.10.59}
$$

此结果与质量四极矩的引力场度规完全一致.

将 (1.10.50) 展开为 $\dfrac{m}{r}$ 的级数以后再积分, 便可得到 (1.10.51) 右端的后三项

$$
\begin{aligned}
\gamma_{pQ}=&\frac{kPQ(1-\mu^2)}{r^3}\left[\frac{1}{3}+\frac{4}{3}\mu+\frac{61}{12}\mu\cdot\frac{m}{r}+\left(\frac{158}{15}\mu\right.\right.\\
&\left.\left.+\frac{1}{5}\mu^2+\frac{4}{5}\mu^3+\frac{31}{25}\right)\frac{m^2}{r^2}\right]+o\left(\frac{m^6}{r^6}\right).
\end{aligned} \tag{1.10.60}
$$

$$
\gamma_p=\frac{kP^2(1-\mu^2)}{r^4}\left[\frac{9}{2}\mu^2-\frac{1}{4}+\left(\frac{4}{5}+2\mu-\frac{2}{5}\mu^2\right)\frac{m}{r}\right]+o\left(\frac{m^6}{r^6}\right). \tag{1.10.61}
$$

$$
\gamma_{JQ}=\frac{kJQ^2(1-\mu^2)}{r^5}\left(\frac{2}{5}-\frac{3}{5}\mu+\frac{12}{5}\mu^2\right)+o\left(\frac{m^6}{r^6}\right). \tag{1.10.62}
$$

最后, 将 μ 改写为 $\cos\theta$, 得到所寻求的度规

$$
g_{00}=\left(1-\frac{2m}{r}+\frac{kQ^2}{r^2}\right)\exp(2\psi_J+2\psi_p+2\psi_{JQ}+2\psi_{pQ}). \tag{1.10.63}
$$

$$
g_{11}=-\left(1-\frac{2m}{r}+\frac{kQ^2}{r^2}\right)^{-1}\exp(-2\psi_J+2\gamma_J-2\gamma_p-2\psi_p+2\gamma_{JQ}-2\psi_{JQ}+2\gamma_{pQ}-2\psi_{pQ}). \tag{1.10.64}
$$

$$g_{22} = -r^2 \exp(2\gamma_J - 2\psi_J + 2\gamma_p - 2\psi_p + 2\gamma_{JQ} - 2\psi_{JQ} + 2\gamma_{pQ} - 2\psi_{pQ}). \quad (1.10.65)$$

$$g_{33} = -r^2 \sin^2\theta \exp(-2\psi_J - 2\psi_p - 2\psi_{JQ} - 2\psi_{pQ}). \quad (1.10.66)$$

式中: $\gamma_J, \gamma_{pQ}, \gamma_p$ 和 γ_{JQ} 的明显表达式已由 (1.10.56)~(1.10.62) 给出; ψ_J 由 (1.10.14) 给出

$$\psi_J = \frac{1}{4}J(3\cos^2\theta - 1)\left\{\frac{45}{2m^4}(r-m) + \frac{15}{4m^5}(3r^2 - 6mr + 2m^2) \times \ln\left(1 - \frac{2m}{r}\right)\right\}; \quad (1.10.67)$$

ψ_{pQ} 由 (1.10.36b) 和 (1.10.36c) 给出

$$\psi_{pQ} = \frac{-3pQ\cos\theta}{2m^2}\left\{\frac{4}{m} - \frac{1}{r} + \left(\frac{2r}{m^2} - \frac{5}{m}\right)\ln\left(1 - \frac{2m}{r}\right)\right\}; \quad (1.10.68)$$

ψ_p 和 ψ_{JQ} 由 (1.10.36a) 和 (1.10.36c) 给出, 其级数形式为

$$\psi_p = \frac{kp^2}{r^4}\left[\frac{1}{2}\cos^2\theta + \frac{m}{r}\left(\frac{1}{35} + \frac{12}{7}\cos^2\theta\right)\right] + o\left(\frac{1}{r^6}\right), \quad (1.10.69)$$

$$\psi_{JQ} = \frac{3kJQ^2}{r^5}\left(\frac{3}{14}\cos^2\theta - \frac{1}{14}\right) + o\left(\frac{1}{r^6}\right). \quad (1.10.70)$$

当 $J=0, p=0$ 时, 度规 (1.10.63)~(1.10.66) 退化为 Reissner-Nardstrm 度规. 当 $Q=0, p=0$ 时, 度规 (1.10.63)~(1.10.66) 退化为质量四极矩的引力场度规.

1.11　Tolman 解

1. *无压流体* (Tolman *度规的场源*)

描述这类物质的能–动张量可写为

$$T^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu + P^{\mu\nu}. \quad (1.11.1)$$

式中 ρ 是质量密度, u^α 是单个粒子的四维速度, $u^\alpha = \mathrm{d}x^\alpha/\mathrm{d}s, P^{\mu\tau}$ 是应张力量 (取 $c=1$). 对于理想流体, 其压强各向同性, 则应力张量 $P^{\mu\nu}$ 可表示为

$$P^{\mu\nu} = p(u^\mu u^\nu - g^{\mu\nu}). \quad (1.11.2)$$

式中 p 是压强. 如果压强等于零, 则 $T^{\mu\nu}$ 简化为更简单的形式

$$T^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu. \quad (1.11.3)$$

将上式代入守恒律 $T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$, 容易得到

$$u^\nu u^\mu_{;\nu} = 0. \tag{1.11.4}$$

$$(\rho u^\mu)_{;\mu} = 0. \tag{1.11.5}$$

方程 (1.11.4) 表明, 流体中每一质点沿短程线运动, 方程 (1.11.5) 表示静质量守恒.

2. 随动坐标系

如果流体内所有粒子的轨迹可以用类时的、不相交的曲线族来描述, 对于局部观察者, 可以选取这些轨迹为新的类时坐标. 这样的坐标系称为随动坐标系. 变换到随动坐标系时, 类时坐标 t 和径向坐标 r 分别变为 t' 和 r', 角坐标 θ 和 φ 可以保持不变. 因此, 场的球对称性质保持不变. 消除交叉项之后, 随动坐标系中普遍的球对称度规可表示为

$$\mathrm{d}s^2 = u\mathrm{d}t^2 - v\mathrm{d}r^2 - w\mathrm{d}\Omega^2. \tag{1.11.6}$$

式中 $\mathrm{d}\Omega^2 = \mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2, u = u(r,t), v = v(r,t), w = w(r,t)$.

为了简便, 上式中 t' 和 r' 的撇号已去掉.

粒子的轨迹由短程线方程 (1.11.14) 描述, 在随动坐标系中, 沿这些短程线坐标 r, θ, φ 均不变. 因此四维速度是

$$u^\mu = (u^0, 0, 0, 0). \tag{1.11.7}$$

式中 $u^0 = \mathrm{d}t/\mathrm{d}s$. 于是短程线方程可写为

$$\frac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}s} + \Gamma^\mu_{00} {u^0}^2 = 0. \tag{1.11.8}$$

由此得 $\Gamma^i_{00} = 0 (i = 1, 2, 3), \partial_i g_{00} = 0$. 即 $g_{00} = g_{00}(t)$, 只是类时坐标的函数.

令

$$\mathrm{d}t' = u^{1/2}\mathrm{d}t, \tag{1.11.9}$$

其他坐标不变, 则 (1.11.6) 可写为

$$[g_{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -\mathrm{e}^\mu & & \\ & & -R^2 & \\ 0 & & & -R^2\sin^2\theta \end{pmatrix}, \tag{1.11.10}$$

$g^{\mu\nu}$ 具有形式

$$[g_{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -\mathrm{e}^{-\mu} & & \\ & & -R^{-2} & \\ 0 & & & -R^{-2}\sin^{-2}\theta \end{pmatrix}, \tag{1.11.11}$$

为了简便, 在上式中最后又去掉 t' 的撇号, 并代入 $\mathrm{e}^{\mu}=v, R^2=w.\mu$ 和 R 只含 t 和 r.

按照这里选择的坐标系, 短程线方程 (1.11.8) 的零分量成为恒等式. 沿短程线 $\mathrm{d}r=\mathrm{d}\theta=\mathrm{d}\varphi=0$, 我们有 $\mathrm{d}x^0=\mathrm{d}s$, 从而有

$$u_\mu=u^\mu=(1,0,0,0). \tag{1.11.12}$$

由 (1.11.10) 和 (1.11.11) 可得 $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ 的不为零分量

$$\begin{aligned}
&\Gamma^1_{01}=\frac{1}{2}\dot{\mu}, \quad \Gamma^2_{02}=\Gamma^3_{03}=R^{-1}\dot{R},\\
&\Gamma^0_{11}=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mu}\dot{\mu}, \quad \Gamma^1_{11}=\frac{1}{2}\mu',\\
&\Gamma^2_{12}=\Gamma^3_{13}=R^{-1}R'\\
&\Gamma^0_{22}=R\dot{R}, \quad \Gamma^1_{22}=-\mathrm{e}^{-\mu}RR',\\
&\Gamma^3_{23}=\cot\theta, \quad \Gamma^0_{33}=R\dot{R}\sin^2\theta,\\
&\Gamma^1_{33}=-\mathrm{e}^{-\mu}RR'\sin^2\theta, \quad \Gamma^2_{33}=-\sin\theta\cos\theta,
\end{aligned} \tag{1.11.13}$$

式中 $\dot{\mu}\equiv\dfrac{\partial\mu}{\partial t},\mu'\equiv\dfrac{\partial\mu}{\partial r}$.

由 (1.11.13) 可得 $R_{\mu\nu}$ 的不为零分量

$$\begin{aligned}
&R_{00}=-\frac{1}{2}\ddot{\mu}-\frac{2}{R}\ddot{R}-\frac{1}{4}\dot{\mu}^2,\\
&R_{01}=\frac{1}{R}R'\dot{\mu}-\frac{2}{R}\dot{R}',\\
&R_{11}=\mathrm{e}^{\mu}\left(\frac{1}{2}\ddot{\mu}+\frac{1}{4}\dot{\mu}^2+\frac{1}{R}\dot{\mu}\dot{R}\right)+\frac{1}{R}(\mu'R'-2R''),\\
&R_{22}=R\ddot{R}+\frac{1}{2}R\dot{R}\dot{\mu}+\dot{R}^2+1-\mathrm{e}^{-\mu}\left(RR''-\frac{1}{2}RR'\mu'+R^{'2}\right),\\
&R_{33}=\sin^2\theta R_{22}.
\end{aligned} \tag{1.11.14}$$

标曲率为

$$R=2\mathrm{e}^{-\mu}\left[\frac{2}{R}R''+\left(\frac{R'}{R}\right)^2-\frac{1}{R}R'\mu'\right]-\frac{2}{R}\dot{R}\dot{\mu}\times2\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2-\frac{2}{R^2}-\frac{4}{R}\ddot{R}-\ddot{\mu}-\frac{1}{r}\dot{\mu}^2. \tag{1.11.15}$$

由 (1.11.12) 可知, $T_{\mu\nu}$ 只有一个分量不为零, 即 $T_{00}=\rho$, 而且 $T=\rho$. 将这些结果和 (1.11.14), (1.11.15) 代入场方程

$$\begin{aligned}
&R_{\mu\nu}=8\pi\left(T_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right),\\
&T_{\mu\nu}=\rho u_\mu u_\nu,
\end{aligned} \tag{1.11.16}$$

得到 μ 和 R 满足的方程

$$-\ddot{\mu}-\frac{4}{R}\ddot{R}-\frac{1}{2}\dot{\mu}^2=4\pi\rho, \tag{1.11.17}$$

$$2\dot{R}'-R'\dot{\mu}=0, \tag{1.11.18}$$

$$\ddot{\mu}+\frac{1}{2}\dot{\mu}^2+\frac{2}{R}\dot{R}\dot{\mu}+\mathrm{e}^{-\mu}\left(\frac{2}{R}R'\mu'-\frac{4}{R}R''\right)=4\pi\rho, \tag{1.11.19}$$

$$\frac{2}{R}\ddot{R}+2\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2+\frac{1}{R}\dot{R}\dot{\mu}+\frac{2}{R^2}+\mathrm{e}^{-\mu}\left[\frac{1}{R}R'\mu'-2\left(\frac{R'}{R}\right)^2-\frac{2}{R}R''\right]=4\pi\rho. \tag{1.11.20}$$

由 (1.11.17)~(1.11.20) 消去含 $\ddot{\mu}$ 的项, 得到三个方程

$$\mathrm{e}^{\mu}(2R\ddot{R}+\dot{R}^2+1)-R'^2=0, \tag{1.11.21}$$

$$2\dot{R}'-R'\dot{\mu}=0, \tag{1.11.22}$$

$$\mathrm{e}^{-\mu}\left[\frac{1}{R}R'\mu'-\left(\frac{R'}{R}\right)^2-\frac{2}{R}R''\right]+\frac{1}{R}\dot{R}\dot{\mu}+\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2+\frac{1}{R^2}=4\pi\rho. \tag{1.11.23}$$

度规 (1.11.10) 表明, $r=\text{const}$ 的球面的面积是 $4\pi R^2$, 而且 R 应满足条件 $R'\equiv\dfrac{\partial R}{\partial r}>0$. 方程 (1.11.22) 满足这一条件的解为

$$\mathrm{e}^{\mu}=R'^2/[1+f(r)],\quad f(r)>-1. \tag{1.11.24}$$

将 (1.11.24) 代入 (1.11.10), 得到度规的表达式

$$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}t^2-\frac{R'^2}{1+f(r)}\mathrm{d}r^2-R^2(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2), \tag{1.11.25}$$

此即 Tolman 度规.

将 (1.11.24) 代入 (1.11.21) 和 (1.11.23), 得到

$$\begin{aligned}&2R\ddot{R}+\dot{R}^2-f=0,\\&\frac{1}{RR'}(2\dot{R}\dot{R}'-f')+\frac{1}{R^2}(\dot{R}^2-f)=4\pi\rho.\end{aligned} \tag{1.11.26}$$

积分 (1.11.25), 得到

$$\dot{R}^2+f(r)=\frac{F(r)}{R}. \tag{1.11.27}$$

式中 $F(r)$ 为 r 的任意函数. 将 (1.11.27) 代入 (1.11.26) 得

$$\frac{F'}{R^2R'}=4\pi\rho. \tag{1.11.28}$$

我们讨论 $f(r)=0$ 的特殊情况. 此时 (1.11.27) 简化为

$$\dot{R}^2=\frac{F(r)}{R}. \tag{1.11.29}$$

积分此方程得

$$R(t,r)=\left[R^{3/2}(r)\pm\frac{3}{2}F^{1/2}(r)t\right]^{2/3} \tag{1.11.30}$$

式中

$$R(r)=R(0,r). \tag{1.11.31}$$

(1.11.30) 对 r 微分并利用 (1.11.28), 还可得到

$$R(t,r)=(4\pi\rho)^{-2/3}\left[\frac{R^{1/2}(r)R'(r)}{F'(r)}\pm\frac{t}{2F^{1/2}(r)}\right]^{-2/3} \tag{1.11.32}$$

另外, 由 (1.11.28) 还可得到

$$\frac{\partial}{\partial t}(R^2R'\rho)=0. \tag{1.11.33}$$

1.12 Wilson 解

静止带电流体球的内部解, 已有人给出. 1965 年, Efinger 给出一个严格解, 此解在原点 $r=0$ 处有一奇点. 1967 年, Kyle 和 Martin 给出一个解. 1969 年, Wilson 又给出一个解. Kyle 和 Martin 的解都消除了原点 $r=0$ 的奇异性. 当然, 这些解在 $r\neq 0$ 处仍可以有奇点, 于是他们对流体球加以一定的限制, 以避开这些奇点. 下面我们求静止带电流体球内部场方程的解, 附加一些条件, 得到一个球内没有奇点的解. 所得到的度规是: 球对称的, 而且遍及整个球, 压强、质量、密度等都是有限的. 因此, 所得到的解满足球内的物理条件.

将球对称度规 ($c=G=1$)

$$\mathrm{d}s^2=\mathrm{e}^{\nu}\mathrm{d}t^2-\mathrm{e}^{\lambda}\mathrm{d}r^2-r^2(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2) \tag{1.12.1}$$

代入场方程

$$R^{\nu}_{\mu}-\frac{1}{2}\delta^{\nu}_{\mu}R=8\pi(M^{\nu}_{\mu}+E^{\nu}_{\mu}), \tag{1.12.2}$$

$$F^{\mu\nu}_{;\nu}=4\pi\sigma u^{\mu}, \tag{1.12.3}$$

$$F_{\mu\nu;\alpha}+F_{\nu\alpha;\mu}+F_{\alpha\mu;\nu}=0. \tag{1.12.4}$$

式中

$$\begin{aligned}M^{\nu}_{\mu}&=(\rho+p)u^{\nu}u_{\mu}-g^{\nu}_{\mu}p,\\ E^{\nu}_{\mu}&=\frac{1}{4}\pi\left(-F^{\nu\alpha}F_{\mu\alpha}+\frac{1}{4}\delta^{\nu}_{\mu}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\right).\end{aligned} \tag{1.12.5}$$

其中 ρ 和 σ 分别为质量密度和电荷密度.

静止情况下, $u^i=0, u^0=g_{00}^{-1/2}$. 假设场完全是静电场, 即 $F_{ik}=0, F_{0k}=\phi_{,R}\equiv\phi_k$, 这里 ϕ 是静电势.

场方程化为

$$\mathrm{e}^{-\lambda}\left(\frac{v'}{r}+\frac{1}{r^2}\right)-\frac{1}{r^2}=8\pi p-E, \tag{1.12.6}$$

$$\mathrm{e}^{-\lambda}\left(\frac{v''}{2}-\frac{\lambda'v'}{4}+\frac{v'2}{4}+\frac{v''-\lambda'}{2r}\right)=8\pi p+E, \tag{1.12.7}$$

$$\mathrm{e}^{-\lambda}\left(\frac{\lambda'}{r}-\frac{1}{r^2}\right)+\frac{1}{r^2}=8\pi\rho+E. \tag{1.12.8}$$

式中

$$E=-F^{01}F_{01}, \tag{1.12.9}$$

$$4\pi\sigma=\left(\frac{\mathrm{d}F^{01}}{\mathrm{d}r}+\frac{2}{r}F^{01}+\frac{\lambda'+v'}{2}F^{01}\right)\mathrm{e}^{\frac{\nu}{2}}. \tag{1.12.10}$$

方程 (1.12.6)~(1.12.8) 可改写为

$$8\pi p=\frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{2}\left(\frac{3}{2}\frac{v'}{r}+\frac{v''}{2}-\frac{\lambda'v'}{4}+\frac{v'^2}{4}-\frac{\lambda'}{2r}+\frac{1}{r^2}\right)-\frac{1}{2r^2}, \tag{1.12.11}$$

$$E=\frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{2}\left(\frac{v''}{2}-\frac{\lambda'v'}{4}+\frac{v'^2}{4}-\frac{v'}{2r}-\frac{\lambda'}{2r}-\frac{1}{r^2}\right)+\frac{1}{2r^2}, \tag{1.12.12}$$

$$8\pi\rho=e^{-\lambda}\left(\frac{5}{4}\frac{\lambda'}{r}-\frac{v''}{4}+\frac{\lambda'v'}{8}-\frac{v'^2}{8}+\frac{v'}{4r}-\frac{1}{2r^2}\right)+\frac{1}{2r^2}. \tag{1.12.13}$$

这里, 我们有四个方程: (1.12.6)~(1.12.8) 和 (1.12.10), 有六个未知量: ρ, E, p, λ, v 和 σ. 因此, 有两个变量可以自由选择. 我们取 λ 和 v 为这两个自由选择的变量. 为了使 $r\to 0$ 时不出现奇异性, 由方程 (1.12.11)~(1.12.13) 可知, 只要令

$$\lambda=Ar^2, \tag{1.12.14}$$

$$v=Br^2+C. \tag{1.12.15}$$

式中 A, B 和 C 是任意常数.

将 (1.12.14) 及 (1.12.15) 代入 (1.12.6)~(1.12.8) 和 (1.12.10), 我们得到

$$16\pi p=\mathrm{e}^{-Ar^2}\left[4B-2A+B(B-A)r^2+\frac{1}{r^2}\right]-\frac{1}{r^2}, \tag{1.12.16}$$

$$2E=\mathrm{e}^{-Ar^2}\left[B(B-A)r^2-\frac{1}{2}A^2r^2-\frac{1}{r^2}\right]+\frac{1}{r^2}, \tag{1.12.17}$$

$$16\pi\rho = \mathrm{e}^{-Ar^2}\left[6A - B(B-A)r^2 - \frac{1}{r^2}\right] + \frac{1}{r^2}. \tag{1.12.18}$$

$$4\pi\sigma = \left[\frac{\mathrm{d}F^{01}}{\mathrm{d}r} + \frac{2}{r}F^{01} + (A+B)rF^{01}\right]\mathrm{e}^{(Br^2+c)/2}. \tag{1.12.19}$$

式中

$$F^{01} = \left[\mathrm{e}^{-2Ar^2-Br^2-c}\left(\frac{1}{2}B^2r^2 - \frac{AB}{2}r^2 - \frac{A}{2} - \frac{1}{2r^2}\right) + \frac{\mathrm{e}^{-Ar^2-Br^2-c}}{2r^2}\right]^{1/2} \tag{1.12.20}$$

在 $r=0$ 处, 由方程 (1.12.16)~(1.12.20) 我们有

$$16\pi p_0 = 4B - 2A, \tag{1.12.21}$$

$$E_0 = 0, \tag{1.12.22}$$

$$16\pi\rho_0 = 6A, \tag{1.12.23}$$

$$4\pi\sigma_0 = \frac{3}{2}[B^2 + (A-B)^2]^{1/2}. \tag{1.12.24}$$

为了使 p_0 和 ρ_0 都是正的, 必须有

$$2B \geqslant A, \tag{1.12.25}$$

$$A \geqslant 0. \tag{1.12.26}$$

进而, 对于 $\rho_0 \geqslant 3p_0$,

$$A \geqslant B. \tag{1.12.27}$$

条件 (1.12.25) 和 (1.12.27) 合写为

$$2B \geqslant A \geqslant B. \tag{1.12.28}$$

下面我们给出边界 $(r=r_1)$ 处所满足的条件

(1) $p_1 = 0$. 由方程 (1.12.16) 得到

$$\mathrm{e}^{-Ar_1^2}\left(4B - ABr_1^2 + B^2r_1^2 - 2A + \frac{1}{r_1^2}\right) - \frac{1}{{r^2}_1} = 0. \tag{1.12.29}$$

由于这一方程具有唯一解 r_1, 而且 $r=0$ 处压强 $p_0>0$, 所以在整个球内 $(r<r_1)$ 都有 $p>0$.

(2) $r=r_1$ 处有 $E_1 = \dfrac{Q^2}{r_1^4}$. 式中 Q 是球的总电荷. 由方程 (1.12.17) 和 (1.12.29) 可得

$$\mathrm{e}^{-Ar_1^2}\left(2Br_1 + \frac{1}{r_1}\right) = \frac{1}{r_1} - \frac{Q^2}{r_1^3}. \tag{1.12.30}$$

$Q^2 > 0$, 由 (1.12.17) 和 (1.12.29) 给出下面的条件:

$$r_1^2 < \frac{2B - A}{B(A - B)}. \tag{1.12.31}$$

条件 (1.12.28) 表明上式的右端是正的.

我们还可以看到, 整个球的 E 是正的. 由方程 (1.12.17) 可得

$$2E = \mathrm{e}^{-Ar^2}\left\{\frac{1}{2}[B^2 + (A - B)^2]r^2 + \frac{A^3r^4}{3!} + \frac{A^4r^6}{4!} + \cdots\right\}. \tag{1.12.32}$$

显然上式右端是正的.

(3)$\rho_1 \geqslant 0$. 由方程 (1.12.18) 和 (1.12.29) 得到

$$A + B \geqslant 0. \tag{1.12.33}$$

条件 (1.12.33) 表明, 在 $r = r_1$ 处 ρ_1 不可能等于零. 因为若 $\rho_1 = 0$, 则由 (1.12.25) 和 (1.12.26) 确定的正数 A 和 B 都等于零. 这导致整个球内 $\rho = E = p = \sigma = 0$, 即球本身不存在.

我们很容易看到, 整个球内 ρ 都是正的. 由方程 (1.12.18) 可得

$$16\pi\rho = \mathrm{e}^{-Ar^2}\left[6A + B(A - B)r^2 + \frac{A^2r^2}{2!} + \frac{A^3r^4}{3!} + \cdots\right]. \tag{1.12.34}$$

显然上式的右端是正的.

(4)$\lambda_1 + \nu_1 = 0$. 应用方程 (1.12.14) 和 (1.12.15), 得到

$$Ar_1^2 + Br_1^2 + C = 0. \tag{1.12.35}$$

方程 (1.12.35) 表明 C 是负的, 因为 A, B 和 r_1^2 都是正的.

(5)$\mathrm{e}^{-\lambda_1} = 1 - \dfrac{2m}{r_1} + \dfrac{4\pi Q^2}{r_1^2}$, 式中 M 是球的质量. 应用方程 (1.12.14) 得到

$$\mathrm{e}^{-Ar_1^2} = 1 - \frac{2M}{r_1} + \frac{4\pi Q^2}{r_1^2}. \tag{1.12.36}$$

本节得到的解在中心和边界处都是正常的, 满足物理条件.

1.13 Einstein-Rosen 解

这一度规描述柱面引力波, 它在宇宙学中有重要应用. 前面 Wey-Levi-Civita 度规描述静止的轴对称的引力场. 将其中 (1.7.34) 的坐标 z 和 t 对换, 得到线元 $(c = 1)$

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{e}^{2\gamma - 2\psi}(\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}\rho^2) - \mathrm{e}^{-2\psi}\rho^2\mathrm{d}\varphi^2 - \mathrm{e}^{2\psi}\mathrm{d}z^2. \tag{1.13.1}$$

由 (1.13.1) 可将 Einstein 场方程写为

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\rho}-\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=0, \tag{1.13.2a}$$

$$\frac{\partial\gamma}{\partial\rho}=\rho\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2\right], \tag{1.13.2b}$$

$$\frac{\partial\gamma}{\partial t}=2\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\frac{\partial\psi}{\partial t}. \tag{1.13.2c}$$

首先, 我们讨论波动方程 (1.13.2a) 的周期解. 其一般形式为

$$\psi=AJ_0(\omega\rho)\cos(\omega t+\alpha)+BN_0(\omega\rho)\cos(\omega t+\beta). \tag{1.13.3}$$

式中 $J_0(\omega\rho)$ 和 $N_0(\omega\rho)$ 分别是第一类和第二类 Bessel 函数, A,B,ω,α,ρ 为常数. 作为一个特殊情况, 我们讨论特解

$$\psi=AJ_0(\omega\rho)\cos\omega t. \tag{1.13.4}$$

这是一驻波解. 将此解代入 (1.13.2b) 和 (1.13.2c), 得到

$$\frac{\partial\gamma}{\partial\rho}=A^2\omega^2\rho\left\{[J_0'(\omega\rho)]^2\cos^2\omega t+[J_0(\omega\rho)]^2\sin^2\omega\tau\right\}, \tag{1.13.5}$$

$$\frac{\partial\gamma}{\partial t}=-A^2\omega^2\rho J_0(\omega\rho)J_0'(\omega\rho)\sin^2\omega t. \tag{1.13.6}$$

积分, 得到

$$\begin{aligned}\gamma=&\frac{1}{2}A^2\omega\rho J_0(\omega\rho)J_0'(\omega\rho)\cos^2\omega t\\&+\frac{1}{2}A^2\omega^2\rho^2\times\left\{[J_0'(\omega\rho)]^2-J_0(\omega\rho)J_0''(\omega\rho)\right\}.\end{aligned} \tag{1.13.7}$$

显然, ψ 和 γ 都是 t 的周期函数.

如果我们取

$$\psi=BN_0(\omega\rho)\cos\omega t$$

代替 (1.13.4), 则得到的解在原点有奇异性. 此解可解释为无限长质量线发出的柱对称的引力驻波.

如果取

$$\psi=AJ_0(\omega\rho)\cos\omega t+AN_0(\omega\rho)\sin\omega t, \tag{1.13.8}$$

考虑到 ρ 很大时 Bessel 函数渐近展开式

$$J_0(\omega\rho)\approx\left(\frac{2}{\pi\omega\rho}\right)^{1/2}\cos\left(\omega\rho-\frac{\pi}{4}\right), \tag{1.13.9}$$

$$N_0(\omega\rho) \approx \left(\frac{2}{\pi\omega\rho}\right)^{1/2} \sin\left(\omega\rho - \frac{\pi}{4}\right), \tag{1.13.10}$$

我们有

$$\psi \approx A\frac{2}{\pi\omega\rho}^{1/2} \cos\left(\omega\rho - \omega t - \frac{\pi}{4}\right). \tag{1.13.11}$$

这是一个向外传播的柱面波.

将展开式 (1.13.10) 代入 (1.13.2b) 和 (1.13.2c), 积分后得到

$$\begin{aligned}\gamma =&\frac{1}{2}A^2\omega\rho\Big\{J_0(\omega\rho)J_0'(\omega\rho) + N_0(\omega\rho)N_0'(\omega\rho)\\&+ \omega\rho[J_0^2(\omega\rho) + J_0'^2(\omega\rho) + N_0^2(\omega\rho) + N_0'^2(\omega\rho)]\\&+ [J_0(\omega\rho)J_0'(\omega\rho) - N_0(\omega\rho)N_0'(\omega\rho)]\cos 2\omega t\\&- [J_0(\omega\rho)N_0'(\omega\rho) + N_0(\omega\rho)J_0'(\omega\rho)]\sin 2\omega t\Big\} - \frac{2}{\pi}A^2\omega t.\end{aligned} \tag{1.13.12}$$

此解中含有一个时间的非周期项. 由于引力能量的连续转移, 使度规张量发生非周期性变化.

下面研究脉冲解.

我们讨论从 z 轴发出的脉冲波. 将波函数 ψ 取为

$$\psi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\tau} \frac{f(t')\mathrm{d}t'}{[(t-t')^2 - \rho^2]}. \tag{1.13.13}$$

式中 $\tau = t - \rho$ 是延迟时间; $f(t)$ 是波源强度. 假设当 $t < -t_0$ 时 $f(t) = 0$, t_0 为一有限时间, 容易验证 (1.3.13) 满足方程 (1.13.2a).

以下讨论几个例子.

1. 取波源函数为

$$f(t) = f_0\delta(t). \tag{1.13.14}$$

式中 $f_0 = \mathrm{const}$. 将 (1.13.14) 代入 (1.13.13) 得

$$\psi = 0, \quad \tau < 0. \tag{1.13.15.a}$$

$$\psi = \frac{1}{2\pi}\frac{f_0}{(t^2 - \rho^2)^{1/2}}, \quad \tau > 0. \tag{1.13.15b}$$

由方程 (1.13.2b) 和 (1.13.2c) 可知

$$\gamma = 0, \quad \tau < 0. \tag{1.13.16a}$$

$$\gamma = \frac{1}{8\pi^2}\frac{f_0^2\rho^2}{(t^2 - \rho^2)} \quad ,\tau > 0. \tag{1.13.16b}$$

这是波源为尖脉冲的情况. 与 $\tau = t - \rho = 0$ 对应的波前为奇异面. 接着有一个"尾巴"持续很长时间.

2. 取波源函数为

$$f(t) = 0, \quad t < 0.$$
$$f(t) = f_0, \quad 0 < t < T.$$
$$f(t) = 0, \quad t > T. \tag{1.13.17}$$

式中 $f_0 = \mathrm{const}$. 将 (1.13.17) 代入 (1.13.13) 积分得

$$\psi = 0, \quad \tau < 0.$$
$$\psi = \frac{f_0}{2\pi}\ln\frac{t + (t^2 - \rho^2)^{1/2}}{\rho}, \quad 0 < \tau < T.$$
$$\psi = \frac{f_0}{2\pi}\ln\frac{t + (t^2 - \rho^2)^{1/2}}{t - T + [(t - T)^2 - \rho^2]^{1/2}}, \quad \tau < T. \tag{1.13.18}$$

积分 (1.13.2b) 和 (1.13.2c) 得

$$\gamma = 0, \quad \tau < 0.$$
$$\gamma = \left(\frac{f_0}{2\pi}\right)^2 \ln\frac{\rho^2}{t^2 - \rho^2}, \quad 0 < \tau < T$$
$$\gamma = \frac{1}{2}\left(\frac{f_0}{\pi}\right)^2 \ln\frac{t^2 - Tt - \rho^2 + x^2}{x^2}, \quad \tau > T. \tag{1.13.19}$$

式中

$$x^2 = \{(t^2 - \rho^2)[(t - T)^2 - \rho^2]\}^{1/2}. \tag{1.13.20}$$

可以看到, 在这种情况下 ψ 和 γ 仍有奇点, 这是由于源函数 f 的不连续性引起的.

3. 取波源函数为连续函数

$$f(t) = 0, \quad t < 0, \tag{1.13.21a}$$

$$f(t) = f_0 t, \quad t > 0. \tag{1.13.21b}$$

式中 $f_0 = \mathrm{const}$. 在这种情况, 重复前面的步骤, 容易得到

$$\psi = 0, \quad \tau < 0.$$
$$\psi = \frac{f_0}{2\pi}\left[t\ln\frac{t + (t^2 - \rho^2)^{1/2}}{\rho} - (t^2 - \rho^2)^{1/2}\right], \quad \tau > 0. \tag{1.13.22}$$

$$\gamma = 0, \quad \tau < 0.$$

$$\gamma=\left(\frac{f_0}{2\pi}\right)^2\left[\frac{1}{2}(t^2-\rho^2)+\frac{1}{2}\rho^2\ln^2\frac{t+(t^2-\rho^2)^{1/2}}{\rho}\right.$$
$$\left.-t(t^2-\rho^2)^{1/2}\ln\frac{t+(t^2-\rho^2)^{1/2}}{\rho}\right],\quad \tau>0. \tag{1.13.23}$$

函数 ψ 和 γ 在 $\tau=t-\rho=0$ 处的奇点已被消除.

取源函数为

$$f(t)=0,\quad t<0;$$
$$f(t)=0,\quad t>T. \tag{1.13.24}$$

4. 这对应于 t 很大时解的行为

设 $\tau=t-\rho\geqslant T$, 则积分 (1.13.13) 的渐近式可写为

$$\psi\approx\frac{1}{2\pi}\frac{f_0}{(t^2-\rho^2)^{1/2}}. \tag{1.13.25}$$

式中

$$f_0=\int_0^T f(t')\mathrm{d}t'. \tag{1.13.26}$$

从而得到

$$\gamma\approx\frac{1}{2}\left[\frac{f_0\rho}{2\pi(t^2-\rho^2)}\right]^2. \tag{1.13.27}$$

可见波的“尾”已消除.

1.14 Kerr-Newman 解

Kerr 度规描述一匀角速转动球体的外部引力场; Kerr-Newman 度规描述一个匀角速转动荷电球体的外部引力场. 我们先讨论 Kerr-Newman 度规, 而把 Kerr 度规作为其特殊情况. 在 1.15 节、3.5 节、3.15 节中还要给出 Kerr 解的推导.

我们由 Reissner-Nordström 度规 (R-N 度规) 经过复坐标变换获得 Kerr-Newman 度规 (Newman,1962).

作变换

$$r'=r,\quad \theta'=\theta,\quad \varphi'=\varphi,$$
$$\mathrm{d}u=\mathrm{d}t-\frac{r^2\mathrm{d}r}{r^2-2mr+e^2}, \tag{1.14.1}$$

可把 Reissner-Nordström 度规 (1.3.9) 写为 (取 $c=1$)

$$\mathrm{d}s^2=\left(1-\frac{2m}{r}+\frac{e^2}{r^2}\right)\mathrm{d}u^2+2\mathrm{d}u\mathrm{d}r-r^2(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2), \tag{1.14.2a}$$

即

$$[g_{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} 1-\dfrac{2m}{r}+\dfrac{e^2}{r^2} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}, \tag{1.14.2b}$$

由此得到

$$g = -r^4\sin^2\theta,$$

$$[g^{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\left(1-\dfrac{2m}{r}+\dfrac{e^2}{r^2}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^{-2}\sin^{-2}\theta \end{pmatrix}, \tag{1.14.3}$$

引入零标架 l^μ, n^μ, m^μ 和 $\overline{m}^\mu$

$$\begin{aligned} l^\mu &= \delta^\mu_1, \\ n^\mu &= \delta^\mu_0 - \left(\frac{1}{2}-\frac{m}{r}+\frac{e^2}{2r^2}\right)\delta^\mu_1, \\ m^\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{r}\left(\delta^\mu_2+\frac{\mathrm{i}}{\sin\theta}\delta^\mu_3\right). \end{aligned} \tag{1.14.4}$$

此时度规可写为

$$g^{\mu\nu} = l^\mu n^\nu + n^\mu l^\nu - m^\mu\overline{m}^\nu - \overline{m}^\mu m^\nu. \tag{1.14.5}$$

(1.14.4) 就是采用零标架表象的 Reissner-Nordström 度规. 把 (1.14.4) 中的 r 延拓到复数空间, 并把零标架改写为

$$\begin{aligned} l^\mu &= \delta^\mu_1, \\ n^\mu &= \delta^\mu_0 - \frac{1}{2}\left[1-m\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{\bar{r}}\right)+\frac{e^2}{r\bar{r}}\right]\delta^\mu_1, \\ m^\mu &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{r}\right)\left[\delta^\mu_2+\frac{\mathrm{i}}{\sin\theta}\delta^\mu_3\right]. \end{aligned} \tag{1.14.6}$$

作变换

$$\begin{aligned} r' &= r + \mathrm{i}a\cos\theta, \\ u' &= u - \mathrm{i}a\cos\theta. \end{aligned} \tag{1.14.7}$$

或

$$\mathrm{d}r' = \mathrm{d}r - \mathrm{i}a\sin\theta\mathrm{d}\theta,$$

$$\mathrm{d}u' = \mathrm{d}u + \mathrm{i}a\sin\theta\mathrm{d}\theta. \tag{1.14.8}$$

由于标架矢量是坐标空间的四维矢量, 我们得到变换后的标架矢量

$$\begin{aligned}
l'^{\mu} &= \delta_1^{\mu}, \\
m'^{\mu} &= [\sqrt{2}(r' + \mathrm{i}a\cos\theta)]^{-1} \times \left[\mathrm{i}a\sin\theta(\delta_0^{\mu} - \delta_1^{\mu}) + \delta_2^{\mu} + \frac{\mathrm{i}}{\sin\theta}\delta_3^{\mu}\right], \\
n'^{\mu} &= \delta_0^{\mu} - \left[\frac{1}{2} - \left(mr' - \frac{e^2}{r}\right)(r'^2 + a^2\cos^2\theta)^{-1}\right]\delta_1^{\mu}, \\
g'^{\mu\nu} &= l'^{\mu}n'^{\nu} + n'^{\mu}l^{\nu} - m'^{\mu}\bar{m}'^{\nu} - \bar{m}'^{\mu}m'^{\nu}.
\end{aligned}$$

我们有

$$[g^{\mu\nu}] = \begin{pmatrix}
\rho^{-2}(-a^2\sin^2\theta) & \rho^{-2}(r^2+a^2) & 0 & -\rho^{-2}a \\
\rho^{-2}(r^2+a^2) & \rho^{-2}[2mr-(r^2+a^2)-e^2] & 0 & \rho^{-2}a \\
0 & 0 & -\rho^{-2} & 0 \\
-\rho^2 a & \rho^{-2}a & 0 & \rho^{-2}(-\sin^{-2}\theta)
\end{pmatrix},$$

$$[g_{\mu\nu}] = \begin{pmatrix}
1+\rho^{-2}(e^2-2mr) & 1 & 0 & \rho^{-2}(a\sin^2\theta)(2mr-e^2) \\
1 & 0 & 0 & -a\sin^2\theta \\
0 & 0 & -\rho^{-2} & 0 \\
\rho^{-2}(a\sin^2\theta)(2mr-e^2) & -a\sin^2\theta & 0 & -\sin^2\theta\left[r^2+a^2+\dfrac{a^2\sin^2\theta(2mr-e^2)}{r^2+a^2\cos^2\theta}\right]
\end{pmatrix}, \tag{1.14.9}$$

式中 $\rho^2 \equiv r^2 + a^2\cos^2\theta$.

由 (1.14.9), (1.14.7) 和 (1.14.1), 最后得到

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{\Delta}{\rho^2}[\mathrm{d}t - a\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi]^2 - \frac{\sin^2\theta}{\rho^2}[(r^2+a^2)\mathrm{d}\varphi - a\mathrm{d}t]^2 - \frac{\rho^2}{\Delta}\mathrm{d}r^2 - \rho^2\mathrm{d}\theta^2. \tag{1.14.10}$$

式中 $\Delta \equiv r^2 - 2mr + a^2 + e^2$.

式 (1.14.10) 就是 Kerr–Newman 度规.

Kasuya(1982) 将 Kerr-Newman 度规推广到场源含磁荷的情况. 在 Boyer-Lindquist 坐标中, Kerr-Newman-Kasuya 度规表示为

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}s^2 = &\left\{1 - \frac{2mr-(e^2+q^2)}{\Sigma}\right\}\mathrm{d}t^2 - \frac{\Sigma}{\Delta}\mathrm{d}r^2 - (\Sigma)\mathrm{d}\theta^2 \\
&- \left\{\frac{[2mr-(e^2+q^2)]a^2\sin^2\theta}{\Sigma} + (r^2+a^2)\right\} \\
&\times \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2 + \frac{2a\sin^2\theta}{\Sigma}\{(2mr-(e^2+q^2)\}\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}t.
\end{aligned} \tag{1.14.11}$$

式中

$$\Sigma = r^2 + a^2\cos^2\theta, \quad \Delta = r^2 + a^2 + e^2 + q^2 - 2mr, \quad a = \frac{J}{m}.$$

m, e 和 q 分别表示源的质量、电荷和磁荷.

当 $e = 0$ 时, (1.14.10) 退化为

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}s^2 = &\left(1 - \frac{2mr}{r^2 + a^2\cos^2\theta}\right)\mathrm{d}t^2 - \frac{r^2 + a^2\cos^2\theta}{r^2 - 2mr + a^2}\mathrm{d}r^2 \\
&- (r^2 + a^2\cos^2\theta)\mathrm{d}\theta^2 - \left(r^2 + a^2 + \frac{2mra^2\sin^2\theta}{r^2 + a^2\cos^2\theta}\right) \\
&\times \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2 + \frac{4mar\sin^2\theta}{r^2 + a^2\cos^2\theta}\mathrm{d}t\mathrm{d}\varphi. \qquad (1.4.12)
\end{aligned}$$

这就是著名的 Kerr 度规.

在 (1.14.10) 中令 $a = 0$, 便得到 Reissner-Nordström 度规. 此度规在时间反演 $(t \to -t)$ 变换下形式不变, 是一个静态球对称度规. 当 $a \neq 0$ 时, 度规 (1.14.10) 不具有时间反演不变性, 是一个稳态轴对称度规.

为了说明参量 a 的物理意义, 我们把 Kerr 度规按 $\frac{a}{r}$ 展开, 保留一阶项, 得到

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}s^2 = &\left(1 - \frac{2m}{r}\right)\mathrm{d}t^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2 \\
&- r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2) + 4\frac{ma}{r}\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

引入坐标变换 $r = r'\left(1 + \frac{m}{2r'}\right)^2$, 可把上式化为

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}s^2 = &\frac{\left(1 - \frac{m}{2r'}\right)^2}{\left(1 + \frac{m}{2r'}\right)^2}\mathrm{d}t^2 - \left(1 + \frac{m}{2r'}\right)^4[\mathrm{d}r^2 + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2)] \\
&+ \frac{4ma}{r'\left(1 + \frac{m}{2r'}\right)}^2\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

按 $\frac{m}{r'}$ 展开, 保留一阶项得

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}s^2 = &\left(1 - \frac{m}{r}\right)\mathrm{d}t^2 - \left(1 + \frac{2m}{r}\right)(\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\theta^2 + r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2) \\
&+ \frac{4ma}{r}\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}t. \qquad (1.14.13)
\end{aligned}$$

将 (1.14.13) 和 Lense 所得到的转动球体外部度规 (弱场近似)

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)\mathrm{d}t^2 - \left(1 + \frac{2m}{r}\right)(\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\theta^2 + r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2) + 4\frac{GJ}{c^3 r}\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}t$$

相比较, 可得

$$ma = \frac{GJ}{c^3}.$$

由于 $m = \dfrac{GM}{c^2}$, 故

$$a = \frac{J}{Mc},$$

$ac = J/M$, 即单位质量的角动量，常称为比角动量.

由此可知, Kerr 度规和 Kerr-Newman 度规描述转动球体的外部引力场.

1.15 Kerr 度规的直接推导

上节中我们用复延拓的方法由 R-N 度规获得了 Kerr Newman 度规和 Kerr 度规, 由于不是解引力场方程得到的, 所以不能算是严格推导, 只能靠代入场方程验算, 来证实它满足场方程. 本节采用直接解引力场方程的方法导出 Kerr 度规 (Klotz,1982). 我们还将在 3.5 节和 3.15 节中用 Ernst 方法和孤立子方法给出 Kerr 度规的标准解析推导.

按照 Klotz 的符号, 稳态辐射对称度规可以写为

$$\mathrm{d}s^2 = \gamma\mathrm{d}\tau^2 - \Sigma(\mathrm{d}\zeta^2 + \mathrm{d}\theta^2 + \frac{q}{a}\mathrm{d}\varphi^2) + 2q\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\varphi. \tag{1.15.1}$$

式中

$$\gamma = \gamma(\zeta,\theta), \quad \Sigma = \Sigma(\zeta,\theta), \quad q = q(\theta), \quad a = \mathrm{const}. \tag{1.15.2}$$

作变换

$$\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}t - q\mathrm{d}\varphi, \tag{1.15.3}$$

并设

$$\Sigma = a(p-q), \quad p = p(\zeta), \tag{1.15.4}$$

度规 (1.15.1) 改写为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2 =& (\gamma\mathrm{d}t^2 - a(p-q)\mathrm{d}\zeta^2 - a(p-q)\mathrm{d}\theta^2 \\ &- [(1-\gamma)q^2 + pq]\mathrm{d}\varphi^2 + 2q(1-\gamma)\mathrm{d}t\mathrm{d}\varphi.\end{aligned} \tag{1.15.5}$$

取坐标 $x^0=t, x^1=\zeta, x^2=\theta, x^3=\varphi$, 由 (1.15.5) 可得

$$
\begin{aligned}
&\Gamma^0_{01}=\frac{p\gamma_{,1}}{2\Delta},\quad \Gamma^0_{20}=\frac{p\gamma_{,2}+(1-\gamma)^2q_{,2}}{2\Delta}\\
&\Gamma^0_{13}=-\frac{q[p\gamma_{,1}+(1-\gamma)p_{,1}]}{2\Delta},\\
&\Gamma^0_{23}=-\frac{q[p\gamma_{,2}+(1-\gamma)^2q_{,2}]}{2\Delta},\\
&\Gamma^1_{00}=\frac{\gamma_{,1}}{2\Sigma},\quad \Gamma^1_{03}=-\frac{q\gamma_{,1}}{2\Sigma},\\
&\Gamma^1_{11}=-\Gamma^1_{22}=\frac{p_{,1}}{2(p-q)},\quad \Gamma^1_{33}=\frac{q(q\gamma_{,1}-p_{,1})}{2\Sigma},\\
&\Gamma^1_{12}=-\frac{q_{,2}}{2(p-q)},\quad \Gamma^2_{00}=\frac{\gamma_{,2}}{\Sigma},\\
&\Gamma^2_{03}\frac{(1-\gamma)q_{,2}-q\gamma_{,2}}{2\Sigma},\quad \Gamma^2_{11}=-\Gamma^2_{22}=\frac{q_{,2}}{2(p-q)},\\
&\Gamma^2_{12}=\frac{p_{,1}}{2(p-q)},\quad \Gamma^2_{33}=\frac{q\gamma_{,2}-[p+2(1-\gamma)q]q_{,2}}{2\Sigma},\\
&\Gamma^3_{01}=\frac{\gamma_{,1}}{2\Delta},\quad \Gamma^3_{02}=\frac{q^2\gamma_{,2}-\gamma(1-\gamma)q_{,2}}{2q\Delta},\\
&\Gamma^3_{13}=\frac{\gamma p_{,1}-q\gamma_{,1}}{2\Delta},\\
&\Gamma^3_{23}=\frac{[p\gamma+(1-\gamma)^2q]q_{,2}-q^2\gamma_{,2}}{2q\Delta},
\end{aligned}
$$

其余

$$\Gamma^\tau_{\mu\nu}=0. \tag{1.15.6}$$

式中

$$\Delta\equiv\gamma p+(1-\gamma)q. \tag{1.15.7}$$

由 (1.15.6) 得到 $R_{\mu\nu}$ 的表达式, 只有 $R_{00}, R_{03}, R_{11}, R_{12}, R_{22}$ 和 R_{33} 不为零. 其中

$$
\begin{aligned}
R_{00}=&-\frac{\gamma_{,11}+\gamma_{,22}}{2\Sigma}+\frac{1}{4\Delta\Sigma}[(\gamma^2_{,1}+\gamma^2_{,2})(p-q)\\
&+2\gamma_{,2}q_{,2}(1-\gamma)-\gamma p_{,1}\gamma_{,1}]+\frac{\gamma q_{,2}}{4q\Delta\Sigma}\\
&\times[-p\gamma_{,2}-2q_{,2}(1-\gamma)^2],
\end{aligned}
\tag{1.15.8}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{03}=&\frac{q(\gamma_{,11}+\gamma_{,22})}{2\Sigma}-\frac{q}{4\Delta\Sigma}[p_{,1}\gamma_{,1}(2-\gamma)\\
&+3\gamma_{,2}q_{,2}(1-\gamma)+(p-q)(\gamma^2_{,1}+\gamma^2_{,2})]
\end{aligned}
$$

$$+\frac{1}{4\Delta\Sigma}\Big\{2\Delta[2\gamma_{,2}q_{,2}-(1-\gamma)q_{,22}]$$

$$+[2\gamma q_{,2}^2(1-\gamma)^2-\gamma_{,2}pq_{,2}]\Big\}+\frac{1}{4q\Delta\Sigma}\gamma pq_{,2}^2(1-\gamma), \tag{1.15.9}$$

$$R_{12}=\frac{\Delta_{,12}}{2\Delta}-\frac{\Delta_{,2}}{4\Delta^2(p-q)}[(p-q)\Delta_{,1}+2\Delta p_{,1}]. \tag{1.15.10}$$

显然, 方程 $R_{12}=0$ 的一个解是

$$\Delta_{,2}=0, \tag{1.15.11}$$

代入 (1.15.7) 得

$$\gamma_{,2}=-\frac{(1-\gamma)q_{,2}}{p-q}. \tag{1.15.12}$$

注意到 (1.15.2), 积分此式得

$$\gamma=1-\frac{2f}{p-q},\quad f=f(\zeta). \tag{1.15.13}$$

引入 σ 代替 ζ

$$\mathrm{d}\sigma\equiv\Delta^{1/2}\mathrm{d}\zeta, \tag{1.15.14}$$

场方程

$$qR_{00}+R_{03}=0. \tag{1.15.15}$$

可写为

$$p\left(2\frac{\dot{f}\dot{p}}{f}q^2-2qq_{,22}+q_{,2}^2\right)-2q^2\dot{p}^2-q\left(2\frac{\dot{f}\dot{p}}{f}q^2+3q_{,2}^2-2qq_{,2}\right)=0. \tag{1.15.16}$$

式中 $\dot{f}\equiv\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\sigma}$. 注意到 $p=p(\sigma), f=f(\sigma)$, 而 $q=q(\theta)$.

由上式可得

$$\frac{\dot{f}\dot{p}}{f}=k=\text{const}, \tag{1.15.17}$$

$$\dot{p}^2=2kp+n,\quad n=\text{const}, \tag{1.15.18}$$

$$q_{,2}^2=-2kq^2-nq. \tag{1.15.19}$$

积分 (1.15.7)~(1.15.9), 适当选取积分常数值, 得到

$$q=-\frac{n}{2k}\sin^2\left[\frac{1}{2}(2k)^{1/2}\theta\right], \tag{1.15.20}$$

$$p=\frac{1}{2k}(k^2\sigma^2-n), \tag{1.15.21}$$

$$f = A\sigma, \quad A = \text{const}. \tag{1.15.22}$$

选取常数, 使

$$k = 2, \quad n = -4a, \quad A = ma^{-1/2}. \tag{1.15.23}$$

引入变量 r, 使

$$r \equiv \sqrt{a\sigma}, \tag{1.15.24}$$

此时有 $\mathrm{d}r = (a\Delta)^{1/2}\mathrm{d}\zeta$. 将 (1.15.23)~(1.15.24) 代入 (1.15.20)~ (1.15.22), 得到

$$\begin{aligned} &q = a\sin^2\theta, \quad p = a^{-1}(r^2 + a^2), \\ &f = a^{-1}(mr). \end{aligned} \tag{1.15.25}$$

代入 (1.15.13) 和 (1.15.17) 得

$$\gamma = 1 - \frac{2mr}{r^2 + a^2\cos^2\theta}, \quad \Delta = a^{-1}(r^2 + a^2 - 2mr). \tag{1.15.26}$$

代入 (1.15.15), 得到场方程 $R_{\mu\nu} = 0$ 的一个严格解

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 = &\left(1 - \frac{2mr}{r^2 + a^2\cos^2\theta}\right)\mathrm{d}t^2 - \frac{r^2 + a^2\cos^2\theta}{r^2 + a^2 - 2mr}\mathrm{d}r^2 \\ &- (r^2 + a^2\cos^2\theta)\mathrm{d}\theta^2 - \bigg[(r^2 + a^2) \\ &+ \frac{2mra^2\sin^2\theta}{r^2 + a^2\cos^2\theta}\bigg]\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2 + \frac{4mra\sin^2\theta}{r^2 + a^2\cos^2\theta}\mathrm{d}t\mathrm{d}\varphi. \end{aligned} \tag{1.15.27}$$

此即 Kerr 度规 (1.14.12).

桂元星等 (1984) 用 Klotz 的方法求出了 Kerr-Newman 度规.

第 2 章　复合场方程及解

2.1　标量–电磁–引力复合场

近年来, 人们对于用高维空间作低维分解的方法研究统一场论越来越感兴趣, 并且构造了几种复合场; 但场方程多是不具有明显形式的, 因此很难给出它的严格解 (哪怕是最简单的球对称解). 这就使人们无法探索复合场产生 (预言) 的引力效应了.

另外, 在广义相对论建立时, 人们就已经清楚地认识到, 物体唯一有意义的运动是相对于宇宙中其他物质的运动. 这一观点可以追溯到马赫原理. 为了充分考虑这一原理, Brans 和 Dicke 在建立场方程时, 在拉格朗日密度中引入了一个标量场 φ:

$$\mathscr{L}_{BD} = \left[\varphi R + \frac{16\pi}{c^4} L - \omega(\Delta\varphi)^2 \frac{1}{\varphi}\right]\sqrt{-g}.$$

这一理论和广义相对论同样经受住了精度日益提高的引力实验的检验.

本节的目的是建立一种关于标量场、电磁场和引力场的复合场理论.

我们采用五维 Rieman 流形的 4+1 分解的方法确定拉格朗日密度, 从而建立复合场的场方程. 然后, 进一步讨论复合场的引力性质.

1. 复合场的拉格朗日密度

我们将五维空间作 4+1 分解. 假定空间存在类时 Killing 矢量, 则五维空间的变分原理归结为四维空 – 时的 (物理空 – 时的) 变分原理, 从而建立复合场理论.

在五维空间 M^5 中, 定义一矢量场 a^μ, 它满足 $a^\mu a_\mu = -1$. 这一矢量场便可确定五维空间 M^5 的 4+1 分解. 按照空间 M^4 分解的熟知的方案, 我们可以得到

$$\mathrm{d}\overset{(5)}{s}{}^2 = \overset{(5)}{g}{}_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu = -(a_\mu \mathrm{d}x^\mu)^2 + \mathrm{d}\overset{(4)}{s}{}^2. \tag{2.1.1}$$

式中

$$\mathrm{d}\overset{(4)}{s}{}^2 = \overset{(4)}{g}{}_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu; \quad \mu,\nu = 0,1,2,3,4. \tag{2.1.2}$$

$\overset{(4)}{g}{}_{\mu\nu} = (\overset{(5)}{g}{}_{\mu\nu} + a_\mu a_\nu)$ 是垂直于矢量 a^μ 的四维局部截面 (空间)S^4 的度规张量, 且满足

$$\left.\begin{aligned} &a^\mu \overset{(4)}{g}{}^{\nu}_{\mu} = 0, \quad \overset{(4)}{g}{}^{\alpha}_{\beta}\overset{(4)}{g}{}^{\beta}_{\gamma} = \overset{(4)}{g}{}^{\alpha}_{\gamma}; \\ &\det[\overset{(4)}{g}{}^{\mu}_{\nu}] = 0, \quad \overset{(4)}{g}{}^{\alpha}_{\alpha} = -4. \end{aligned}\right\} \tag{2.1.3}$$

用恒等式

$$a^{\mu}_{;\nu;\alpha} - a^{\mu}_{;\alpha;\nu} = -a^{\tau} R^{\mu}_{\tau\nu\alpha}, \tag{2.1.4}$$

可将标曲率 $\overset{(5)}{R}$ 写为

$$\begin{aligned}\overset{(5)}{R} &= -2\overset{(5)}{R}{}^{\alpha}{}_{\beta\alpha\tau}\overset{(5)}{g}{}^{\beta\tau}\\ &= -2\overset{(5)}{R}{}_{\alpha\beta}a^{\alpha}a^{\beta} + 2(\overset{(5)}{R}{}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\overset{(5)}{g}{}_{\alpha\beta}\overset{(5)}{R})a^{\alpha}a^{\beta}\\ &= -2\overset{(5)}{R}{}_{\alpha\beta}a^{\alpha}a^{\beta} + 2\overset{(5)}{R}{}_{\alpha\beta\delta\gamma}\overset{(4)}{g}{}^{\alpha\delta}\overset{(4)}{g}{}^{\beta\gamma},\end{aligned} \tag{2.1.5}$$

其中用到了关系式

$$\overset{(5)}{R}{}_{\alpha\beta}a^{\alpha}a^{\beta} = (a^{\alpha}_{;\beta;\alpha} - a^{\alpha}_{;\alpha;\beta})a^{\beta}. \tag{2.1.6}$$

五维空间中的变分原理可写为

$$\delta\overset{(5)}{I}(\overset{(5)}{g}{}_{\mu\nu}) = \delta\left\{-\frac{1}{4\pi_{v^5}}\int\overset{(5)}{R}|\overset{(5)}{g}|^{1/2}\mathrm{d}^5x\right\} = 0, \tag{2.1.7}$$

式中 $\overset{(5)}{g} \equiv \det[\overset{(5)}{g}{}_{\mu\nu}]$. 由以上诸式可得

$$\overset{(5)}{I} = \int\overset{(5)}{L}|\overset{(5)}{g}|^{1/2}\mathrm{d}^5x, \tag{2.1.8}$$

$$\mathscr{L} \equiv \overset{(5)}{L}|\overset{(5)}{g}|^{1/2} = \frac{1}{4\pi}\{-2(a^{\mu}_{;\nu}a^{\nu}_{;\mu} - a^{\alpha}_{;\alpha}a^{\beta}_{;\beta}) - \overset{(5)}{R}{}_{\alpha\beta\delta\gamma}\overset{(5)}{g}{}^{\alpha\delta}\overset{(5)}{g}{}^{\beta\gamma}\}|\overset{(5)}{g}|^{1/2}. \tag{2.1.9}$$

在得到上式时我们略去了对 $\overset{(5)}{I}$ 没有贡献的项 $-2(a^{\mu}_{;\nu} - a^{\nu}_{i\nu}a^{\mu})_{;\mu}$(因为此项的积分化为沿系统边界面的面积分, 等于零).

设所研究的空间区域 V^5 中存在 Killing 矢量 ξ^{μ}, $\xi^{\mu}\xi_{\mu} < 0$. 选择坐标系, 可使 $\xi^{\mu} = \delta^{\mu}_4$, 由于 $a^{\mu}a_{\mu} = -1$, 可令 $a^{\mu} = \alpha^{-2}\xi^{\mu}$, 式中 $\alpha = \alpha(x^{\nu})$. 这时度规 (2.1.1) 可写为

$$\mathrm{d}\overset{(5)}{s}{}^2 = -\alpha^2(\mathrm{d}x^4 + A_i\mathrm{d}x^i)^2 + \mathrm{d}\overset{(4)}{s}{}^2, \quad i,k = 0,1,2,3. \tag{2.1.10}$$

$$\left.\begin{aligned}&\mathrm{d}\overset{(4)}{s}{}^2 = \overset{(4)}{g}{}_{ik}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^k,\\ &\overset{(4)}{g}{}_{ik} = (\overset{(5)}{g}{}_{ik} + \alpha^2 A_i A_k),\\ &A_i = \alpha^{-2}\xi_i.\end{aligned}\right\} \tag{2.1.11}$$

式中 α, A_i 和 g_{ik} 只含 x^i, 与稳态空间 M^4 的 3+1 分解相似, 变换

$$\left.\begin{aligned}&\tilde{x}^4 = x^4 + f(x^i),\\ &\tilde{x}^i = \tilde{x}^i(x^k).\end{aligned}\right\} \tag{2.1.12}$$

保持 ξ^μ 和 g_{ik} 形式不变, 且导致规范变换

$$\tilde{A}_i = A_k \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^i} + f_{,i}. \tag{2.1.13}$$

故可将空间 S^4 看作完备的空间 M^4, 具有度规 $g_{ik}^{(4)}$ 和场 α, A_i, 这时 $V^5 = V^4\{x^4 : x_1^4 < x^4 < x_2^4\}, V^4 \subset M^4$. 在 S^4 中对称联络 ∇ 可表示为

$$\begin{aligned}\nabla_x Y &= \overset{(5)}{\nabla}_x Y - \omega(\nabla_x Y)\partial_\sigma = \overset{(5)}{\nabla}_x Y - Y \cdot \overset{(5)}{\nabla}_x \partial_\sigma \partial_\sigma \\ &= \overset{(5)}{\nabla}_x Y - \frac{1}{2}(Y \cdot \overset{(5)}{\nabla}_x + X \cdot \overset{(5)}{\nabla}_y)\partial_\sigma - \frac{1}{2}\mathrm{d}\omega(Y \Lambda X)\partial_\sigma \\ &= \overset{(5)}{\nabla}_x Y - \frac{1}{2}(Y \cdot \overset{(5)}{\nabla}_x + X \cdot \overset{(5)}{\nabla}_y)\partial_\sigma - \frac{1}{2}(Y \cdot \overset{(5)}{\nabla}_x - X \cdot \overset{(5)}{\nabla}_y)\partial_\sigma \partial_\sigma.\end{aligned} \tag{2.1.14}$$

式中 ∂_σ 为 M^5 中的矢量场, 且满足 $\partial_\sigma \cdot \partial_\sigma = -1$.

协变导数 $\nabla_{\partial_\sigma} X$ 和 $\overset{(5)}{\nabla}_x \partial_\sigma$ 的表示式可写为

$$\nabla_{\partial_\sigma} X = \overset{(5)}{\nabla}_{\partial\sigma} X - \omega(\overset{(5)}{\nabla}_{\partial\sigma} \overset{(5)}{X})_{\partial\sigma} = \overset{(5)}{\nabla}_{\partial\sigma} X - \overset{(5)}{X} \cdot \overset{(5)}{\nabla}_{\partial\sigma} \partial_\sigma \partial_\sigma, \tag{2.1.15}$$

$$\overset{(5)}{\nabla}_x \partial_\sigma f = \nabla_x \partial_\sigma = \omega(\overset{(5)}{X}) \overset{(5)}{\nabla}_{\partial\sigma} \partial_\sigma f + \omega(\overset{(5)}{\nabla}_x f). \tag{2.1.16}$$

曲率张量表示为

$$\overset{(5)}{R}(\overset{(5)}{X}, \overset{(5)}{Y}) \overset{(5)}{Z} = (\overset{(5)}{\nabla}_x \overset{(5)}{\nabla}_y - \overset{(5)}{\nabla}_y \overset{(5)}{\nabla}_x - \overset{(5)}{\nabla}_{[x,y]} \overset{(5)}{Z}. \tag{2.1.17}$$

以上诸式中凡 S^4 中的量均未标维数. 由 (2.1.14)~(2.1.17) 以及对称联络和矢量的性质, 我们得到

$$\begin{aligned}\overset{(5)}{R}(X,Y)Z = \overset{(4)}{R}(X,Y)Z &+ \{\omega(\overset{(5)}{\nabla}_y Z)\nabla_x - \omega(\overset{(5)}{\nabla}_x Z)\nabla_y \\ &- \omega([X,Y])\nabla_z + (\nabla_x \omega)(\nabla_y Z) \\ &- (\nabla_y \omega)(\nabla_x Z) - \omega([X,Y])Z. \overset{(5)}{\nabla}_{\partial\sigma} \partial_\sigma\}\partial_\sigma,\end{aligned} \tag{2.1.18}$$

$$\begin{aligned}\overset{(5)}{R}(X,Y)Z \cdot U = \overset{(4)}{R}(X,Y)Z \cdot U &+ \omega(\overset{(5)}{\nabla}_y Z)\omega(\nabla_x U) \\ &- \omega(\overset{(5)}{\nabla}_x Z)\omega(\overset{(5)}{\nabla}_y U) + \omega([X,Y])\omega(\overset{(5)}{\nabla}_z U),\end{aligned} \tag{2.1.19}$$

$$\begin{aligned}\overset{(5)}{R}(X,Y)Z \cdot \partial_\sigma =&(\nabla_y \omega)(\nabla_x Z) \\ &- (\nabla_x \omega)(\nabla_y Z) + \omega([X,Y])Z \cdot \nabla_{\partial_\sigma} \partial_\sigma,\end{aligned} \tag{2.1.20}$$

$$\begin{aligned}\overset{(5)}{R}(X,\partial_\sigma)Y \cdot \partial_\sigma f =& - Y \cdot \nabla_x \overset{(5)}{\nabla}_{\partial_\sigma} \partial_\sigma f \\ &- \overset{(5)}{X} \cdot \overset{(5)}{\nabla}_{\partial_\sigma} \partial_\sigma \overset{(5)}{Y} \cdot \overset{(5)}{\nabla}_{\partial_\sigma} \partial_\sigma f\end{aligned}$$

$$+L_{\partial_\sigma}\omega(\overset{(5)}{\nabla}_x Y)f-\omega(\overset{(5)}{\nabla}_x f)\cdot\omega(\overset{(5)}{\nabla}_y f). \tag{2.1.21}$$

令

$$\partial_\sigma=\alpha^{-1}\xi,\quad \omega=-\alpha\lambda. \tag{2.1.22}$$

式中 ξ 为 Killing 矢量; 在 M^5 中取完全系基及其对偶基 $(\xi,\partial_i),(\mathrm{d}x^4,\mathrm{d}x^i)$, 我们得到 $[(\mathrm{d}x^\mu(\partial_\nu)=\delta^\mu_\nu)]$

$$\partial_\mu\cdot\partial_\nu=\overset{(5)}{g}_{\mu\nu},\quad \overset{(4)}{\partial}_i\cdot\partial_j=\overset{(4)}{g}(\partial_i,\partial_j)=\overset{(4)}{g}_{ij},\quad \partial_\sigma=\sigma^\mu\partial_\mu, \tag{2.1.23}$$

$$\omega([\partial_i,\partial_j])=-\partial F_{ij}, \tag{2.1.24}$$

$$F_{ij}=A_{j,i}-A_{i,j}, \tag{2.1.25}$$

$$\overset{(4)}{\nabla}_{\partial_i}\partial_j=\frac{1}{2}\overset{(4)}{g}{}^{km}(\overset{(4)}{g}_{mi,j}+\overset{(4)}{g}_{mj,i}-\overset{(4)}{g}_{ij,m})\partial_k, \tag{2.1.26}$$

$$\overset{(5)}{R}(\partial_i,\partial_j)\partial_k=\overset{(5)}{R}{}^m{}_{ijk}\partial_m, \tag{2.1.27}$$

$$\overset{(5)}{R}(\partial_i,\partial_j)\partial_k\cdot\partial_m=\overset{(5)}{R}_{mkij}, \tag{2.1.28}$$

$$\overset{(5)}{R}(\partial_i,\partial_j)\partial_k\cdot\overset{(4)}{\partial}_m=\overset{(4)}{R}_{mkij}. \tag{2.1.29}$$

由以上诸式可以得到

$$\overset{(5)}{g}_{ij}=\overset{(4)}{g}_{ij}-\sigma_i\sigma_j, \tag{2.1.30}$$

$$\omega=-\sigma_\mu\mathrm{d}x^\mu, \tag{2.1.31}$$

$$\lambda=-(\mathrm{d}x^4+A_i\mathrm{d}x^i), \tag{2.1.32}$$

$$\sigma_\mu=\alpha A_\mu, \tag{2.1.33}$$

$$\overset{(5)}{R}_{mkij}=\overset{(4)}{R}_{mkij}-\frac{1}{4}\alpha^2(F_{ik}F_{jm}-F_{jk}F_{im}-2F_{ji}F_{km}), \tag{2.1.34}$$

$$\overset{(5)}{R}_{\mu\nu\tau\lambda}\overset{(4)}{g}{}^{\mu\tau}\overset{(4)}{g}{}^{\nu\lambda}=\overset{(5)}{g}_{mkij}\overset{(4)}{g}{}^{mi}\overset{(4)}{g}{}^{kj}=\overset{(4)}{R}+\frac{3}{4}\alpha^2F_{ik}F^{ik}. \tag{2.1.35}$$

将以上结果代入 (2.1.9), 我们得到拉格朗日密度的表示式

$$\overset{(5)}{\mathscr{L}}\equiv\overset{(5)}{L}\,|\overset{(5)}{g}|^{1/2}=-\frac{1}{4}\pi\left(\alpha\overset{(4)}{R}+\frac{1}{4}\alpha^3F_{ik}F^{ik}\right)|\overset{(4)}{g}|^{1/2}. \tag{2.1.36}$$

此时五维变分原理 (2.1.7) 过渡到四维情况

$$(x_2^4-x_1^4)^{-1}\delta\overset{(5)}{I}(\overset{(5)}{g}_{\mu\nu})=\delta\overset{(4)}{I}(\alpha,A_i,\overset{(4)}{g}_{ij})$$

$$= \delta \int_{\nu^4} \overset{(4)}{L} \mid \overset{(4)}{g} \mid^{1/2} \mathrm{d}^4 x = 0. \tag{2.1.37}$$

作变换 $\alpha \to \varphi$, $\overset{(4)}{g}_{ij} \to g_{ik}$:

$$\alpha = \frac{1}{2} \exp \left[\pm\sqrt{2}(\varphi - \varphi_0)/\sqrt{3} \right], \tag{2.1.38}$$

$$\overset{(4)}{g}_{ik} = g_{ik} \exp[\mp\sqrt{2}(\varphi - \varphi_0)/\sqrt{3}], \tag{2.1.39}$$

$$\varphi_0 = \mp\sqrt{3}\ln 2/\sqrt{2}. \tag{2.1.40}$$

拉格朗日密度 (2.1.37) 变为

$$\begin{aligned} \overset{(4)}{\mathscr{L}} &\equiv \overset{(4)}{L} \sqrt{-\overset{(4)}{g}} = L\sqrt{-g} \\ &= -\frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{4k} R - \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 + \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} \mathrm{e}^{\pm\sqrt{6}\varphi} \right] \sqrt{-g}. \end{aligned} \tag{2.1.41}$$

上式与度规

$$\overset{(5)}{\mathrm{d}} s^2 = \frac{1}{2} \exp\left(\mp\sqrt{\frac{2}{3}}\varphi \right) \mathrm{d}s^2 - \exp\left(\pm\sqrt{\frac{8}{3}}\varphi \right) (\mathrm{d}x^4 + A_i \mathrm{d}x^i)^2 \tag{2.1.42}$$

相对应.

2. *复合场方程*

根据 (2.1.41) 中各量量纲的考虑, 我们作代换 $A_i = \beta\tilde{A}_i$, $\tilde{\varphi} = \eta\beta\tilde{\varphi}$, $\beta = l/q$, 式中 l, q, β, η 均为常数, l 的量纲是长度, q 的量纲是电荷, η 无量纲; $\tilde{A}_i$ 和 $\tilde{\varphi}$ 是场变量. 为简便, 变换后去掉 ~ 号, (2.1.41) 可写为

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{1}{4k} R - \frac{1}{2}\eta^2\beta^2(\nabla\varphi)^2 + \frac{\beta^2}{4} F_{ij} F^{ij} \mathrm{e}^{\pm\sqrt{6}\beta\eta\varphi} \sqrt{-g} \right\}, \tag{2.1.43}$$

式中指数应负数, 所以当 $\beta\varphi > 0$ 时应取负号.

由拉格朗日密度 (2.1.43) 代入变分原理式, 得到标量场 φ、电磁场 F_{ij} 和引力场 g_{ij} 的复合场方程

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R = 2k\varPhi_{ij}(\varphi) + 2kE_{ij}(A_k) \exp(-\beta\eta\varphi\sqrt{6}), \tag{2.1.44}$$

$$\varPhi_{ij} = \eta^2 \left\{ \varphi_{,i}\varphi_{,j} - \frac{1}{2} g_{ij} (\nabla\varphi)^2 \right\}, \tag{2.1.45}$$

$$E_{ij} = -F_{ik}F_j^k + \frac{1}{4} g_{ij} F_{km} F^{km}, \tag{2.1.46}$$

$$\nabla^2\varphi \equiv g^{ij}\varphi_{,i}\varphi_{,j} = (\sqrt{6}\beta/4\eta)F_{ij}F^{ij}\exp(-\sqrt{6}\beta\eta\varphi), \tag{2.1.47}$$

$$F^{;j}_{ij} = \beta\eta\sqrt{6}F^{ij}_{\cdot}\varphi_{,j}, \tag{2.1.48}$$

式中 $i, j, k, \cdots = 0, 1, 2, 3.$

下面我们给出场方程的一个静态球对称解. 当标量场不存在时, 此解退化为 Reissner-Nordström 度规.

静态球对称度规具有形式

$$\mathrm{d}s^2 = a(r)\mathrm{d}t^2 - b(r)\mathrm{d}r^2 - c(r)(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2), \tag{2.1.49}$$

标量场

$$\varphi = \varphi(r). \tag{2.1.50}$$

借助于适当的变换, 可使势 A_i 变为

$$A_i = (A_0, 0, 0, 0). \tag{2.1.51}$$

将 (2.1.49)~(2.1.51) 代入, 拉格朗日密度 (2.1.41) 变为

$$\begin{aligned}\mathscr{L} =& \frac{1}{2}\sqrt{a(r)b(r)}\cdot c(r)\sin\theta\Big[\frac{1}{2k}R + \eta^2\varphi^2_{,r} \\ & - A^2_{0,r}\times a^{-1}(r)b^{-1}(r)\exp(-\eta\beta\varphi\sqrt{6})\Big],\end{aligned} \tag{2.1.52}$$

$$\begin{aligned}R =& -2c^{-1}(r) + b^{-1}(r)\left[2\left(\frac{c_{,rr}}{c} - \frac{c^2_{,r}}{c^2}\right) + \left(\frac{a_{,rr}}{a} - \frac{a^2_{,r}}{a^2}\right)\right. \\ & \left. + \frac{3}{2}\left(\frac{c_{,r}}{c}\right)^2 - \frac{b_{,r}c_{,r}}{bc} + \frac{a_{,r}c_{,r}}{ac} + \frac{1}{2}\left(\frac{a_{,r}}{a}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{a_{,r}b_{,r}}{ab}\right].\end{aligned} \tag{2.1.53}$$

式中 $a_{,r} \equiv \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}a(r)$, $a_{,rr} = \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}a(r)$. 由此, 在作用量的表示式中对 t, θ, φ 积分, 再取全导数, 得到拉格朗日

$$\begin{aligned}L =& \frac{1}{2}c(r)\sqrt{\frac{a(r)}{b(r)}}\left\{\frac{1}{2k}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{c_{,r}}{c}\right)^2 + \frac{a_{,r}c_{,r}}{ac}\right] - \eta^2\varphi^2_{,r}\right. \\ & \left. + A^2_{o,r}\exp(-\sqrt{6}\eta\beta\varphi)\cdot\frac{1}{a}\right\} + \frac{1}{2k}\sqrt{b(r)c(r)}.\end{aligned} \tag{2.1.54}$$

直接计算可以证明, 对于静态球对称情况, 由上式得到的场方程和由 (2.1.44)~(2.1.48) 所得到的是一致的.

下面我们由 (2.2.12) 构成哈密顿–雅可比方程, 然后积分, 获得场方程的解. 令

$$b(r)c(r) = d(r), \quad a(r)b(r) = e(r),$$

(2.2.12) 化为

$$
\begin{aligned}
L =&\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{4k}\left[\left(\frac{d_{,r}}{d}\right)^2-\left(\frac{a_{,r}}{a}\right)^2\right]-\eta\varphi_{,r}^2\right.\\
&\left.+A_{0,r}^2\exp(-\sqrt{6}\eta\beta\varphi)\cdot a^{-1}(r)\right\}\\
&\times d(r)/\sqrt{e(r)}+\frac{1}{2k}\sqrt{e(r)}.
\end{aligned}\tag{2.1.55}
$$

取广义坐标

$$
\left.\begin{aligned}
q_i=(\tilde{d},\tilde{a},\varphi,A_0),\\
\tilde{d}\equiv \mathrm{lnd},\quad \tilde{a}\equiv \ln a,\quad \tilde{e}=\mathrm{ln}e(r).
\end{aligned}\right\}\tag{2.1.56}
$$

则有

$$
\left.\begin{aligned}
P_{qi}=\frac{\partial L}{\partial q_{i,r}},\\
\frac{\partial L}{\partial q_i}-\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\right)_{,r}=\frac{\delta L}{\delta q_i}.
\end{aligned}\right\}\tag{2.1.57}
$$

$$
\begin{aligned}
H(q,q_{,r})&=P_{\tilde{d}}\tilde{d}_{,r}+P_{\tilde{a}}\tilde{a}_{,r}+P_\varphi\varphi_{,r}+P_{A_0}A_{0,r}-L\\
&=-2\frac{\delta L}{\delta e}=-2\frac{\partial L}{\partial\tilde{e}}=0.
\end{aligned}\tag{2.1.58}
$$

适当调整 r 坐标的刻度, 可使 $e=1$, 最后用广义动量表示广义速度, 我们得到

$$
\begin{aligned}
H(P,q)=&\frac{1}{2}\left[4k(P_{\tilde{d}}^2-P_{\tilde{a}}^2)-\frac{1}{\eta^2}P_\varphi^2\right.\\
&\left.+P_{A_0}^2a(r)\times\exp(\sqrt{6}\eta\beta\varphi)\right]\times d^{-1}(r)-\frac{1}{2k}=0.
\end{aligned}\tag{2.1.59}
$$

由此得到哈密顿-雅可比方程

$$
4k\left[\left(\frac{\partial I}{\partial\tilde{d}}\right)^2-\left(\frac{\partial I}{\partial\tilde{a}}\right)^2\right]-\frac{1}{\eta^2}\left(\frac{\partial I}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial I}{\partial_{A_0}}\right)^2a(r)\exp(\eta\beta\varphi)-\frac{1}{k}d(r)=0.\tag{2.1.60}
$$

边界条件是当 $r\to\infty$ 时 $a\to 1,\varphi\to 0,A_0\to 0,d\to\infty$.

将方程 (2.1.60) 分离变量并积分, 我们求得

$$
\begin{aligned}
I=&qA_0+\frac{k}{2\delta}[4\eta k\varphi-\beta\sqrt{6}\mathrm{ln}a(\gamma)]\\
&+\frac{1}{2k}\int\sqrt{k^2m^2-kq^2+kK^2+d(r)}\\
&\times d^{-1}(r)dd(r)+\frac{1}{\delta}\int\sqrt{k^2m^2-kq^2(r-\mathrm{e}^\gamma)}\mathrm{d}\gamma,
\end{aligned}\tag{2.1.61}
$$

$$\gamma \equiv \ln a + \eta\beta\varphi\sqrt{6}, \quad \delta^2 \equiv 4k^2 + 6k\beta^2, \tag{2.1.62}$$

η, q 和 K 都是分离变量常数.

对方程

$$\frac{\partial L}{\partial d_{,r}} = \frac{\partial I}{\partial d}$$

积分, 我们得到

$$d = r^2 - (k^2m^2 - kq^2 + kK^2). \tag{2.1.63}$$

我们只局限于 $(k^2m^2-kq^2>0)$ 的情况, 按照 [2.1.48] 中给出的一般方法, 由 (2.1.61), (2.1.62), (2.1.64) 和边界条件, 经过虽然麻烦但并不困难的运算, 我们得到

$$\left.\begin{aligned} a(r) = \omega^{\beta kK\sqrt{6}/\delta\eta}\left[\frac{1}{2}(B+1)\omega^{-\delta D/4k} - \frac{1}{2}(B-1)\omega^{\delta D/4k}\right]^{-\frac{8k^2}{\delta^2}}, \\ b(r) = a^{-1}(r), \quad c(r) = d(r)/b(r). \end{aligned}\right\} \tag{2.1.64}$$

$$\varphi(r) = -\frac{k}{\delta\eta}\ln\left|\omega^{k/p}\left\{\frac{1}{2}(B+1)\omega^{-\delta D/4k} - \frac{1}{2}(B-1)\omega^{\delta D/4k}\right\}^{\frac{2\sqrt{6}\beta}{\delta}}\right|, \tag{2.1.65}$$

$$A_0(r) = \frac{2kq}{\delta\eta D}(1-\omega^{\frac{\delta D}{2k}})[B+1-(B-1)\omega^{\frac{\delta D}{2k}}]^{-1}, \tag{2.1.66}$$

式中

$$\rho^2 \equiv k^2m^2 - kq^2 + kG^2,$$

$$\omega \equiv \frac{r-\sqrt{k^2m^2-kq^2+kK^2}}{r+\sqrt{k^2m^2-kq^2+kK^2}}, \quad B \equiv \frac{\pm km}{\sqrt{k^2m^2-kq^2}},$$

$$D \equiv \frac{\sqrt{k^2m^2-kq^2}}{\sqrt{k^2m^2-kq^2+kK^2}}.$$

于是所寻求的度规为

$$\mathrm{d}s^2 = a(r)\mathrm{d}t^2 - a^{-1}(r)\{\mathrm{d}r^2 + [r^2-(k^2m^2-kq^2+kK^2)]\mathrm{d}\Omega^2\}, \tag{2.1.67}$$

$$\mathrm{d}\Omega^2 \equiv \mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2.$$

令

$$\bar{r}^2 \equiv 4\Delta^2\omega(1-\omega)^2\omega^{\frac{1-\beta kK\sqrt{6}}{\delta\eta}}\left[\frac{1}{2}(B+1)\omega^{-\frac{\delta D}{4k}} - \frac{1}{2}(B-1)\omega^{\frac{\delta D}{4k}}\right]^{\frac{8k^2}{\delta^2}}, \tag{2.1.68}$$

$$\bar{a}^{-1} \equiv \left(\frac{\mathrm{d}\bar{r}}{\mathrm{d}r}\right)^2 \cdot a = k^2(1-\omega)^2(4\delta^2\eta^2\omega)^{-1}[-\beta K\sqrt{6}$$

$$- 2km + \delta\eta k^{-1}(1+\omega)(1-\omega)^{-1}$$
$$+ \frac{2kq}{\beta D} \cdot \frac{1-\omega^{\delta D/2k}}{B+1-(B-1)\omega^{\delta D/2k}}\Big]^2, \tag{2.1.69}$$

式中

$$\Delta^2 \equiv k^2m^2 - kq^2 + kK^2. \tag{2.1.70}$$

可将度规 (2.1.69) 改写为

$$\mathrm{d}s^2 = a(\bar{r})\mathrm{d}t^2 - \bar{a}(\bar{r})\mathrm{d}\bar{r}^2 - \bar{r}^2\mathrm{d}\Omega^2. \tag{2.1.71}$$

3. 讨论

(1) 由场方程 (2.1.47) 和 (2.1.48) 可见, 参量 β 描述标量场 φ 和电磁场 F_{ij} 的耦合程度. 当 $\beta=0$ 时, 不存在上述耦合. 当 $\beta=K=0$ 时, 不但不存在上述耦合, 而且由 (2.1.66) 可知不存在标量场 φ; 此时场方程退化为静态球对称 Einstein-Maxwell 方程. 容易证明, 此时解 (2.1.65)~(2.1.72) 恰好退化为熟知的 Reissner-Nordström 度规.

(2) 由场方程 (2.1.48) 可以发现, 量

$$J^i \equiv \sqrt{6}\beta\eta F^{ij}\varphi_{,j}, \tag{2.1.72}$$

满足守恒律

$$J^i_{;i} = 0, \tag{2.1.73}$$

由式 (2.3.1) 可以看出, 这一守恒量取决于电磁场和标量场的相互作用. 由 (2.3.2) 可见, 这一守恒量可以看作电磁场和标量场的复合场的"源流密度"矢量.

(3) 当 $r\to\infty$ 时, 度规 (2.2.23)~(2.2.30) 可写成下面的渐近形式:

$$a = 1 - \frac{2kM}{\bar{r}} + \frac{kq^2}{\bar{r}^2} + \cdots, \tag{2.1.74}$$

$$\bar{a} = 1 - \frac{2kM}{\bar{r}} + \cdots. \tag{2.1.75}$$

式中 $M\equiv\delta(2km+\beta K\sqrt{6})$ 与 Schwarzschild 度规和 Reissner-Nordström 度规比较, 可知量 M 即为引力源的引力质量, 但它和耦合参量 βK 有关. 当 $\beta K=0, \delta=1$ 时, $M=2km$. 可见 m 对应于 Schwarzschild 质量 (常量 δ 和 k 可认为是和单位有关的常数).

由 (2.1.74) 和 (2.1.75) 可以看出, 在静态球对称的情况下, 标量场对度规的贡献是高阶小量.

2.2　五维标量–电磁–引力复合场理论中的介子质量谱

在现代物理学中, 人们已经沿着统一场论的方向做了许多研究工作; 曾经采用了规范场的思想, 分解空间几何的思想, 超对称的思想, 等等. 在这些思想和相应的方案中, Kalutza 提出的五维复合场理论具有重要的地位. 我们首先简单地说明五维复合场理论的基本要点.

首先, 五维流形按照 5 个坐标的封闭性条件, 选择形式为 $V^4 \times S^1$ 的拓扑. 人们已经证明, 要求标量场的电荷等于电子电荷 ($\pm e$), 会导致第 5 个坐标的周期 T_1 非常小 ($\sim 10^{-30}$cm). 由于 T_1 远小于场方程成立的线度, 人们把拉格朗日按照第 5 个坐标的周期取平均. 这时, 在拉格朗日中出现了量级为 10^{-6}g 的质量项, 可以看作对电磁场质量的贡献. 为了使质量"标准化", 人们又引入了第 6 维度量, 并选择 6 维时空的拓扑为 $V^4 \times S^1 \times S^1$. 这个 6 维流形的度规对 x^6 的依赖性对电荷没有贡献, 只对标量场的质量有贡献, 但具有相反的符号 (因为 x^6 是类时的, 而 x^5 是类空的). 由于 x^6 的周期 T_2 与 T_1 不同, 它不由任何条件决定 (T_1 由标量场的电荷等于 $\pm e$ 决定), 所以原则上可以得到任何质量值.

可以把荷电的标量场解释为描述荷电物质的标量场. 实际上, 过渡到经典极限, 即令

$$\varphi = \rho^{1/2}\exp(\mathrm{i}I/h). \tag{2.2.1}$$

式中 φ 与 $x = (-G_{55})^{3/4}$ 相联系, I 是经典作用量, ρ 是粒子在区域 d^3V 出现的几率, 令 $\bar{h} \to 0$, 则 Klein-Gordon-Fock 方程退化为哈密顿–雅可比方程, 爱因斯坦方程右端退化为通常的电磁场能动张量, 麦克斯韦方程的右端是通常的流.

在本节中, 我们把荷电的和中性的标量场理解为介子的波函数. 为了使中性标量场有质量, 令其电荷等于零, 就必须引入第 7 个度量. 我们的基本目的是证明, 通过对附加时空坐标的选择, 可以得到至今人们所知道的所有介子和它们的共振态的质量谱.

考虑拓扑为 $V^7 = V^4 \times S^1 \times S^1 \times S^1$ 的 7 维黎曼流形, 选择其度规张量具有形式

$$^7C_{AB} = \chi^{4/5}\begin{bmatrix} g_{\mu\nu} - \dfrac{4k}{\tau^4}A_\mu A_\nu & \dfrac{1}{c^2}2\sqrt{kA_\mu} & 0 & 0 \\ \dfrac{1}{c^2}2\sqrt{kA_\nu} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{bmatrix}. \tag{2.2.2}$$

式中 $g_{\mu\nu}$ 是四维黎曼空间的度规张量,A_μ 是电磁势, k 是牛顿引力常数, χ 是共形因子, 附标 $A, B =$0,1,2,3,5,6,7.

拉格朗日密度取为

$$^7L = \sqrt{-G}\,^7R. \tag{2.2.3}$$

做共形变换和 (4+1+1+1) 分解, 得到

$$\begin{aligned}^7L = (-G)^{1/2}\,^7R =&(-g)^{1/2}\Big\{\chi^2\Big[^4R + \frac{k}{c^4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\Big] \\ &- \frac{24}{5}g^{\mu\nu}\chi\nabla^+_\mu\nabla^+_\nu\chi + \frac{24}{5}(\chi\chi_{,5,5} - \chi\chi_{,6,6} + \chi\chi_{,7,7})\Big\}.\end{aligned} \tag{2.2.4}$$

式中 ^4R 是由 $g_{\mu\nu}$ 构成的标曲率.

$$\nabla^+_\mu = \nabla_\mu + \frac{2\sqrt{k}}{c^2}A_\mu\frac{\partial}{\partial x^5}, \tag{2.2.5}$$

∇_μ 为通常的关于 $g_{\mu\nu}$ 的协变导数.

我们要求质量项具有基本粒子质量的量级, 所以周期 T_1 和 T_2 都非常小 ($\sim 10^{-30}$cm). 所以, 自然地可以认为, 通常研究的拉格朗日是对 x^5, x^6 和 x^6 取过平均的

$$^4L(x^\mu) = \int_0^{T_1}\int_0^{T_2}\int_0^{T_1}\,^7L(x^\mu, x^5, x^6, x^7)\mathrm{d}x^5\mathrm{d}x^6\mathrm{d}x^7. \tag{2.2.6}$$

式中 $^4L(x^\mu)$ 是通常的四维拉格朗日密度.

我们选择共形因子 χ 具有形式

$$\chi = 1 + \mathrm{i}b_1\varPhi(x^A) + \mathrm{i}b_2\psi_0(x^A) + b_3\psi(x^A) - b_3\psi^*(x^A) \tag{2.2.7}$$

考虑到变量 x^μ 和 x^5, x^6, x^7 分离, 将 χ 改写成

$$\begin{aligned}\chi =&1 + \mathrm{i}b_1\varPhi(x^\mu)f_1(x^5, x^6, x^7) + \mathrm{i}b_2\psi_0(x^\mu) \times f_2(x^5, x^6, x^7) \\ &+ b_3\psi(x^\mu)f_3(x^5, x^6, x^7) - b_3\psi^*(x^\mu)f_3^*(x^5, x^6, x^7).\end{aligned}$$

式中星号表示复共轭.

所引入的函数 $\varPhi(x^\mu)$ 描述中性的同位旋 $I = 0$ 的介子. 函数 $\psi_0(x^\mu), \psi(x^\mu)$ 和 $\psi^*(x^\mu)$ 描述三重介子 (当 $b_2 = b_3$), 或者二重介子 (当 $b_2 = \sqrt{2}b_3$).$\psi_0(x^\mu)$ 是三重或二重介子的中性分量, 而 b_1, b_2 和 b_3 是常数标准化因子, 因为波函数 ψ_0, ψ 和 ψ^* 的量纲为 $l^{-3/2}$.

选择函数 f_1, f_2 和 f_3, 使对 $^4L(x^\mu)$ 取平均以后不出现交叉项 $\varPhi\psi$, $\varPhi\partial_\mu\psi, \psi_0\partial_\mu\psi$, $\psi_0\psi\cdots$ 即不出现标量场自身相互作用的项, 只有它与引力场、电磁场相互作用的项. 我们设

$$f_1 = \frac{2}{T_1\sqrt{T_2}}\cos\frac{2\pi}{T_1}(n+4)x^7 \cdot \cos\frac{2\pi}{T_2}(n+4)x^6,$$

$$f_2 = \frac{2}{T_1\sqrt{T_2}}\cos\frac{2\pi}{T_1}(n+1)x^7\cdot\cos\frac{2\pi}{T_2}(n+1)x^6, \tag{2.2.8}$$

$$f_3 = \frac{2}{T_1\sqrt{T_2}}\exp\left(-\mathrm{i}\frac{2\pi}{T_1}x^5\right)\times\cos\frac{2\pi}{T_1}nx^5\exp\left(-\mathrm{i}\frac{2\pi}{T_2}x^6\right)\cos\frac{2\pi}{T_2}nx^6.$$

式中 $\frac{2}{T_1\sqrt{T_2}}$ 为标准化因子, n 取值 $0,2,3,4,\cdots,n\neq 1$, 因为 $n=1$ 将有交叉项.

按 x^5,x^6,x^7 取平均, 并加上要求：荷电的标量场的电荷等于 $\pm e$, 我们得到 $T_1=4\pi\sqrt{k}\hbar/ec$. 取平均后得到

$$\begin{aligned}{}^4L(x^\mu) =&\sqrt{-g}\Big\{(1-b_1^2\varPhi_n^2-b_2^2\psi_{0_n}^2\\&-2b_3^2\psi_n\psi_n^*)\left({}^4R+\frac{k}{c^4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right)\\&-\frac{24}{5}b_1^2\left(g^{\mu\nu}\partial_\mu\varPhi_n\partial_\nu\varPhi_n-\left[\frac{4\pi^2}{T_1^2}-\frac{4\pi^2}{T_2^2}\right](n+4)^2\varPhi_n^2\right)\\&-\frac{24}{5}\left[2b_3^2\left(g^{\mu\nu}\partial_\mu^+\psi_n^*\partial_\nu^-\psi_n-\left(\frac{4\pi^2}{T_1^2}-\frac{4\pi^2}{T_2^2}\right)(1+n^2)\psi_n^*\psi_n\right)\right.\\&\left.+b_2^2\left(g^{\mu\nu}\partial_\mu\psi_{0_n}\partial_\nu\psi_{0_n}-\left(\frac{4\pi^2}{T_1^2}-\frac{4\pi^2}{T_2^2}\right)(1+n)^2\psi_{0_n}^2\right)\right]\Big\},\end{aligned} \tag{2.2.9}$$

$$\partial_\mu^\pm\equiv\partial_\mu\pm\mathrm{i}(e/\hbar c)A_\mu,\quad \partial_\mu\equiv\partial/\partial x^\mu.$$

量纲因子 b_3 可由拉格朗日密度 (2.2.9) 得到的麦克斯韦方程确定

$$b_3^2=\frac{5}{48}\chi\frac{\hbar^2}{m_{\psi_n}}. \tag{2.2.10}$$

我们从物理观点考虑, 做一些自然的假设. 第一个假设是不区分三重和二重介子. 因为若取 $b_1=b_2=b_3$, 便得到描述单态和三重态的拉格朗日, 而若取 $b_1=b_2=\sqrt{2}b_3$, 则得到描述单态和二重态的拉格朗日. 第二个假设, 当 $n=0$ 我们得到 $m_{\psi_0}=m_\psi=m_\psi$, 所以在和 $n\neq 0$ 对应的状态中, 我们不考虑电荷的分离, 即状态 ψ_n^0 和 ψ_n 在三重 (二重) 态中我们认为是等几率的, 并用函数

$$\tilde{\psi}_n\equiv\frac{1}{\sqrt{2}}\psi_n^0+\frac{1}{\sqrt{2}}\psi_n$$

来描述. 因此, 三重 (二重) 介子质量的“平均”等于

$$m\tilde{\psi}_n=m\tilde{\psi}_0\left[\frac{1+n^2}{2}+\frac{(1+n)^2}{2}\right]^{1/2} \tag{2.2.11}$$

我们选择 m_{π^0} 和 m_{π^-} 的均方根值为式 (2.2.11) 中的初始质量 $m_{\tilde{\psi}_0}$(MeV)

$$m_{\tilde{\psi}_0}c^2 = \left(\frac{m_{\pi_0}^2 + m_{\pi^-}^2}{2}\right)^{1/2} c^2 \cong 137286\text{MeV}. \tag{2.2.12}$$

又因为

$$m_{\tilde{\psi}_0}^2 \frac{c^2}{\hbar^2} = \left(\frac{e^2c^2}{4k\hbar^2} - \frac{4\pi^2}{T_2^2}\right),$$

所以由质量 $m_{\tilde{\psi}_0}$ 可以确定周期 T_2 的大小

$$\frac{4\pi^2}{T_2^2} = \frac{e^2c^2}{4k\hbar^2} - \frac{c^2}{\hbar^2}m_{\tilde{\psi}_0}^2. \tag{2.2.13}$$

这里我们指出, 如果不按电荷取平均 [式 (2.2.11)], 与实验结果的符合程度就差一些.

中性的单态的质量 (MeV) 由下式给出 [见 (2.2.9)]:

$$m_{\Phi_n} = \left(\frac{e^2c^2}{4k\hbar^2} - \frac{4\pi^2}{T_2^2}\right)^{1/2}(n+4) = 137286(n+4)\text{MeV}. \tag{2.2.14}$$

第三个假设是, 如果某一粒子不对应于任何一个 m_n, 则描述它的波函数 f 就不是本征函数, 但是是两个相邻本征函数的叠加 (如果 $m_n < m_f < m_{n+1}$)

$$f = \cos\theta f_n + \sin\theta f_{n+1}$$

或者

$$f = \sin\theta f_n + \cos\theta f_{n+1},$$

因此

$$m_f^2 = (\cos^2\theta m_n^2 + \sin^2\theta m_{n+1}^2)^{1/2} \tag{2.2.15}$$

或者

$$m_f^2 = (\sin^2\theta m_n^2 + \cos^2\theta m_{n+1}^2)^{1/2},$$

式中 θ 是介子谱中常用的相移角, 由下式给出:

$$\cos\theta = \sqrt{2/3}, \quad \sin\theta = \sqrt{1/3}.$$

理论预言和实验结果的比较见表 3-1 和表 3-2.

表 3-1

	$I=1$ 和 1/2 的介子质量								
	实验值 /MeV	理论预言值	n	相对误差/%		实验值 /MeV	理论预言值	n	相对误差 /%
1. π	137286	137286	0	0	16. p'	~1600	1583	11	<1
2. ?		350	2		17. A_3	1660(10)	1675	–	<1
3. K	495.7	495	3	<0.5	18. g	1700(20)	1720	12	<1.5
4. ?		622	4		19. K_2^*	1785(6)	1769	–	<1
5. ρ	776(3)	764.4	5	<2	20. L	1600~2000?	1817	–	
6. K^*	895(4)	900	6	<2	21. D	1865,7	1864	13	0
7. A_1'	1040(13)	1036	7	<0.5	22. F	~1970	1952	–	<1
8. M	1150-1170?	1172	8	<2	23. D^*	2007	1994	14	<1
9. B	1231(10)	1220	–	<1	24. κ_h	~2060	2041	–	<1
10. A_1''	1280(40)	1265	–	<1.5	25. F^*	~2140	2131	15	<0.5
11. Q_1	~1280	1280	–	0	26. X_1	2307(6)	2268	16	<2
12. A_2	1310(5)	1309.6	9	0	27. ?		2405	17	
13. Q_2	~1400	1402	–	0					
14. K_1^*	434(5)	1446	10	<1	⋮		⋮	⋮	
15. χ	~1500	1493	–	<1					

表中符号“–”表示用式 (2.2.15) 计算的.

表中理论预言后计算式

$$
\begin{aligned}
m_B &=(\sin^2\theta\cdot m_9^2+\cos^2\theta\cdot m_8^2)^{1/2}=1220\\
m_{A_1''} &=(\sin^2\theta\cdot m_8^2+\cos^2\theta\cdot m_9^2)^{1/2}=1265\\
m_{Q_1} &=(\sin^2\theta\cdot m_9^2+\cos^2\theta\cdot m_{A_1}^2{}'')^{1/2}=1280\\
m_{Q_2} &=(\sin^2\theta\cdot m_9^2+\cos^2\theta\cdot m_{10}^2)^{1/2}=1402\\
m_\chi &=(\sin^2\theta\cdot m_{11}^2+\cos^2\theta\cdot m_{10}^2)^{1/2}=1493\\
m_{A_3} &=(\sin^2\theta\cdot m_{11}^2+\cos^2\theta\cdot m_{12}^2)^{1/2}=1675\\
m_{K_2^*} &=(\sin^2\theta\cdot m_{13}^2+\cos^2\theta\cdot m_{12}^2)^{1/2}=1769\\
m_L &=(\sin^2\theta\cdot m_{12}^2+\cos^2\theta\cdot m_{13}^2)^{1/2}=1817\\
m_F &=(\sin^2\theta\cdot m_{13}^2+\cos^2\theta\cdot m_{14}^2)^{1/2}=1952\\
m_{\kappa_h} &=(\sin^2\theta\cdot m_{15}^2+\cos^2\theta\cdot m_{14}^2)^{1/2}=2041
\end{aligned}
$$

表 3-2

	$I=0$ 的介子质量								
	实验值 /MeV	理论预言值	n	相对误差/%		实验值 /MeV	理论预言值	n	相对误差 /%
1. η	549	549	0	0	4. S^*	~981(10)	1008	–	< 3
2. ω	783	823	2	< 5	5. φ	1020	1054	–	< 4
3. η	958	961	3	< 0.5	6. η_N	1080	1098	4	< 2

续表

	$I=0$ 的介子质量								
	实验值 /MeV	理论预言值	n	相对误差/%		实验值 /MeV	理论预言值	n	相对误差 /%
7. f	1270	1236	5	< 3	23. I/ψ	3097(1)	3020	18	< 3
8. D	1284(9)	1283	–	< 0.5	24. $\overline{NN}$	1400~3600?	3158	19	
9. ε	1300	1329	–	< 3					
10. E	1418(10)	1373	6	< 4	25. X''	3400?	3295	20	
11. f	1516(12)	1510	7	< 0.5	26. χ	3414(4)	3432	21	< 1
12. ω'	1666(5)	1647	8	< 1	27. χ'	3507(4)	3524	–	< 1
13. X	~1690?	1784	9	< 6	28. χ''	3551(4)	3569	22	< 1
14. S	1935	1922	10	< 1	29. η'	3592	3615	–	< 1
15. h	2040(20)	2059	11	< 1	30. ψ	685	3706	23	< 1
16. TO	~2150	2197	12	< 3	31. ψ'	3770	3844	24	< 2
17. UO	~2350	2334	13	< 1	32. ψ''	4030(5)	3981	25	< 1
18. X_1	2200?	2471	14		33. ψ'''	4159(20)	4118	26	< 1
19. e^+e^-	1100~3100?	2608	15		34.?		4256	27	
20. X'	1900~3600	2745	16		35. ψ'''	4415	4393	28	<1
21. X''	2830?	2883	17		36?		4530	29	
22. η	2984	2975	–	< 1					

表中理论预言值计算式

$$
\begin{aligned}
m_{S^*} &=(\sin^2\theta\cdot m_4^2+\cos^2\theta\cdot m_3^2)^{1/2}=1008,\\
m_{\varphi} &=(\sin^2\theta\cdot m_3^2+\cos^2\theta\cdot m_4^2)^{1/2}=1054,\\
m_D &=(\sin^2\theta\cdot m_6^2+\cos^2\theta\cdot m_5^2)^{1/2}=1283,\\
m_{\varepsilon} &=(\sin^2\theta\cdot m_5^2+\cos^2\theta\cdot m_6^2)^{1/2}=1329,\\
m_{\eta} &=(\sin^2\theta\cdot m_{17}^2+\cos^2\theta\cdot m_{18}^2)^{1/2}=2975,\\
m_{\chi'} &=(\sin^2\theta\cdot m_{21}^2+\cos^2\theta\cdot m_{22}^2)^{1/2}=3524,\\
m_{\eta'} &=(\sin^2\theta\cdot m_{23}^2+\cos^2\theta\cdot m_{22}^2)^{1/2}=3615.
\end{aligned}
$$

2.3 dilaton-Maxwell-Einstein 复合场

20 世纪 90 年代中期, 现代宇宙学和引力理论受到了来自标量–张量理论和卡鲁查–克莱因型高维理论观点的挑战, 后者在 dilaton 场 (即中性标量场) 中给出了一系列好的结果. 一些作者对标量–张量理论很是喜欢, 甚至认为它是最有希望的引力基础理论. 不少作者讨论了存在 dilaton 场时物质场的行为. 结果表明, 极端荷电 dilaton 黑洞从某种意义上讲如同基本粒子; 有标量场的超对称性可能有助于奇点问题的研究 …… 这些结果使人们有兴趣去寻找有标量场时具有规则视界的解.

本节我们讨论引力与无质量标量场和电磁场的耦合. 根据弦理论的低能极限, 系统的作用量具有形式

$$I=-\frac{1}{16\pi}\int\sqrt{-g}(R+2g^{mn}\nabla_m\varphi\nabla_n\varphi+\mathrm{e}^{-2\varphi}g^{mn}g^{kl}F_{mk}F_{nl})\mathrm{d}^4x. \tag{2.3.1}$$

对上式取变分 (分别对于 $g_{\mu\nu},\varphi,A_m$), 得到场方程

$$R_{mn}+2\nabla_m\varphi\nabla_n\varphi+\mathrm{e}^{-2\varphi}\left(2g^{kl}F_{mk}F_{nl}-\frac{1}{2}g_{mn}g^{cd}g^{ef}F_{ce}F_{df}\right)=0, \tag{2.3.2}$$

$$g^{mn}\nabla_m\nabla_n\varphi+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2\varphi}F_{mn}F^{mn}=0, \tag{2.3.3}$$

$$\nabla_m(\mathrm{e}^{-2\varphi}g^{mn}g^{kl}F_{nl})=0. \tag{2.3.4}$$

我们取协变 de Donder 规范条件

$$D_m\sqrt{-g}g^{mn}=0, \tag{2.3.5}$$

式中 D_m 是关于闵可夫斯基度规

$$\gamma_{mn}=\mathrm{diag}(+1,-1,-r^2,-r^2\sin^2\theta)$$

的协变导数. 我们进一步假设, 解是静态球对称的

$$F_{10}(t,r,\theta,\varphi)=E(r),$$
$$\varphi(t,r,\theta,\varphi)=\varphi(r).$$

此时度规具有形式

$$g_{mn}=\mathrm{diag}[u(r),-v(r),-w(r),-w(r)\sin^2\theta]. \tag{2.3.6}$$

如果标量场不存在, $\varphi=0$, 由作用量 (2.3.1) 得到的解描述一个质量为 μ_0. 电荷为 Q 的黑洞. 用闵可夫斯基时空中的谐和坐标, 此度规可写为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2=&\left(\frac{r-\mu_0}{r+\mu_0}+\frac{Q^2}{(r+\mu_0)^2}\right)\mathrm{d}t^2-\left(\frac{r-\mu_0}{r+\mu_0}+\frac{Q^2}{(r+\mu_0)^2}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2\\&-(r+\mu_0)^2(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2).\end{aligned} \tag{2.3.7}$$

此即谐和 R-N 度规, 具有视界 $\mu>0,\mu=\sqrt{\mu_0^2-Q^2}$.

满足 (2.3.5) 的静态球对称渐近平直解为

$$u(r)=\frac{1}{v(r)}=\frac{r^2-\mu^2}{w(r)}, \tag{2.3.8a}$$

$$\varphi(r) = \frac{1-4k^2}{8k}\ln\frac{r+\mu}{r-\mu} + \frac{Q^2}{16\mu^2k^2}\left[1-\left(\frac{r-\mu}{r+\mu}\right)^{2k}\right], \tag{2.3.8b}$$

$$\begin{aligned} w(r) &= (r^2-\mu^2)\left(\frac{r+\mu}{r-\mu}\right)^{2k} e^{2\varphi(r)} \\ &= (r^2-\mu^2)\left(\frac{r+\mu}{r-\mu}\right)^{(1+4k^2)/4k} \exp\left\{\frac{Q^2}{8\mu^2k^2}\left[1-\left(\frac{r-\mu}{r+\mu}\right)^{2k}\right]\right\}. \end{aligned} \tag{2.3.8c}$$

式中 $\mu>0, Q$ 和 k 是任意常参数。由作用量 (2.3.1) 和 (2.3.8b), 可以看出 dilaton 场具有负的动能项.

由于 (2.3.8b) 第一项含对数式, 所以此解一般是奇异的. 但有趣的是, 可以使对数项的系数为零, 即取 $k=\pm\frac{1}{2}$, 消除这一项, 从而避免奇异性. 我们取 $k=\frac{1}{2}$, 得到

$$\varphi(r) = \frac{Q^2}{4\mu^2}\left(1-\frac{r-\mu}{r+\mu}\right), \tag{2.3.9a}$$

$$w(r) = (r+\mu)^2 \exp\left[\frac{Q^2}{2\mu^2}\left(1-\frac{r-\mu}{r+\mu}\right)\right], \tag{2.3.9b}$$

$$u(r) = \frac{1}{v(r)} = \left(\frac{r-\mu}{r+\mu}\right)\exp\left[\frac{Q^2}{2\mu^2}\left(\frac{r-\mu}{r+\mu}\right)\right], \tag{2.3.9c}$$

这里我们已取 $\varphi_\infty=0$.

当 $Q\to 0$ 时, 此解退化为静态球对称的谐和 Fock 解

$$ds^2 = \left(\frac{r-\mu}{r+\mu}\right)dt^2 - \left(\frac{r+\mu}{r-\mu}\right)dr^2 - (r+\mu)^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2). \tag{2.3.10}$$

于是, (2.3.9) 是在存在 dilaton 场和电磁场时, Fock 解的推广. 通过上面的退化过程可以看出, 参量 μ 是场源的质量, Q 是其电荷. 此解有两个视界

$$r_\pm = \mu_\pm = \frac{1}{2}\left(\mu_0 \pm \sqrt{\mu_0^2-2Q^2}\right), \tag{2.3.11}$$

这两个视界都是规则的. 显然, 度规 $g_{\mu\nu}$ 的行列式在视界面上也是规则的

$$\begin{aligned} g &= w^2(r)\sin^2\theta \\ &= -(r+\mu)^4 \exp\left[\frac{Q^2}{\mu^2}\left(1-\frac{r-\mu}{r+\mu}\right)\right]\sin^2\theta. \end{aligned} \tag{2.3.12}$$

在 Schwarzschild 坐标中, 我们也可以获得和 (2.3.9) 类似的解. 把条件 (2.3.5) 换成

$$u_s(r) = \frac{1}{v_s(r)} = p(r)e^{-2\varphi_s(r)},$$

$$w_s(r) = r^2 e^{2\varphi_s(r)}. \tag{2.3.13a}$$

则下面形式的解满足场方程 (2.3.2)、(2.3.3)

$$p(r) = 1 - \frac{2\mu}{r}, \quad \varphi_r(r) = \frac{Q^2}{2\mu r}, \quad E_s(r) = \frac{Q}{r^2}. \tag{2.3.13b}$$

在这种情况下, 度规和两个场在 $r = 0$ 处有奇异性. 但是奇点被视界 $V_\pm$[见 (2.3.11)] 包围. 在视界面上, 度规和两个场都是规则的.

下面讨论度规 (2.3.9) 和 (2.3.13) 给出的标曲率. 很明显, 和作用量 (2.3.1) 相对应, 能 – 动张量中的电磁部分是无迹的, 对标曲率 R 的贡献仅仅来自 dilaton 场. 求 (2.3.2) 的迹, 可以得到与 (2.3.9) 对应的标曲率

$$\begin{aligned} R(r) &= -2g^{mn}\nabla_m\nabla_n\varphi = 2\frac{\varphi'2}{w}(r^2 - \mu^2) \\ &= \frac{Q^4}{2\mu^2}\frac{r^2-\mu^2}{(r+\mu)^6}\exp\left[\frac{Q^2}{2\mu^2}\left(\frac{r-\mu}{r+\mu} - 1\right)\right]. \end{aligned} \tag{2.3.14a}$$

类似地, 由度规 (2.3.13), 可以得到标曲率 R_s

$$R_s(r) = \frac{Q^4}{2\mu^2 r^4}\left(1 - \frac{2\mu}{r}\right)\exp\left(-\frac{Q^2}{2\mu r}\right).$$

对于极端黑洞,$\mu_0^2 = 2Q^2$, 由 (2.3.11) 得到

$$\mu = \mu_\pm = \frac{\mu_0}{2}.$$

此时 (2.3.14a) 给出

$$R_0(r) = 8\mu_0^2\frac{4r^2 - \mu_0^2}{(2r+\mu_0)^6}\exp\left(-\frac{2\mu_0}{2r+\mu_0}\right). \tag{2.3.14b}$$

上式在 $r = \mu_0(1+\sqrt{5})/4$ 处达到极大值, 且在无限远趋于零

$$R_0(r) \to 0, \quad 当 r \to \infty.$$

对于任意的质量 μ_0, 在视界附近有

$$R_0(r) = \frac{2r - \mu_0}{4\mu_0^3}e^{-1} + o(r^2).$$

当 $\mu_0 \to 0$ 或 $Q \to 0$ 时, 由 (2.3.14) 可得

$$R_0(r) = \frac{\mu_0^2}{2r^4} + o\left(\frac{\mu_0^3}{r^5}\right)$$

至此, 我们得到了 Einstein-Maxwell 场耦合于具有负能项的 dilaton 场的复合场方程的一个静态球对称解. 度规 (2.3.9) 有两个与极端黑洞一致的规则视界. 此解有一个显著的特点, 质量 μ_0 受电荷的限制: $\mu_0 \geqslant \sqrt{2}Q$. 这与 R-N 解不同 (R-N 解 $\mu_0 = |Q|$). 当 $Q = 0$ 时, 所获得的与 Fock 解或 Schwarzschild 解一致.

所获得的解仍满足无毛定理. 分析无限远处 dilaton 场的行为, 可以得到 dilaton 荷的值

$$D = \frac{Q^2}{2\mu}.$$

这表明复合场的性质仅由两个独立参数 (μ_0 和 Q) 决定, 即黑洞的性质仍然仅由质量、电荷和角动量三个参量决定.

2.4 共形引力物质规范场

早在 20 世纪初, Weyl 为了统一引力和电磁相互作用, 就提出了一种几何化场论. 这种理论导致时空度量和路径有关, 不可接受. 但是 Weyl 的思想却成为现代规范场理论的基础. 20 世纪 90 年代, 人们又重新对 Weyl(共形) 对称性感兴趣, 沿这一方向发表了一系列文章. Cheng Hung 提出, 在规范质量产生机制中引入共形对称性是很有意义的. 赵书城 (1991) 将纯规范概念引入共形群, 构造了可积 Weyl 空间中包含引力场、物质场和 Weyl 规范场的规范理论. 人们重新关注共形对称性, 主要由于量子引力的重整化问题遇到了原则性困难, 粒子物理实验一直没找到 Higgs 粒子. 而且目前场论中存在的三种质量 (引力质量、惯性质量和真空自发破缺质量) 之间的联系也还不很清楚, 期望引入共形对称性能够有助于上述问题的解决.

度规 $g_{\mu v}(x)$ 和场 $\Phi(x)$ 满足的局域变换 (CT)

$$g'_{\mu v}(x) = Q^2(x) g_{\mu v}(x), \quad \Phi'(x) = \Omega^w(x)\Phi(x) \tag{2.4.1}$$

称为共形变换, 式中 $\Omega(x)$ 为非零实标量函数, w 称为 Weyl 权重. 本节线元取形式

$$\mathrm{d}s^2 = -g_{\mu v}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu, \quad \eta_{\mu v} = (-+++).$$

由 (2.4.1) 可以定义协变导数

$$d_\mu = \partial_\mu - w b_\mu(x), \quad (d_\mu \Phi)' = \Omega^w d_\mu \Phi. \tag{2.4.2}$$

$b_\mu(x)$ 即 Weyl 规范场, 满足共形规范变换

$$b'_\mu = b_\mu + \partial_\mu Q\Omega \cdot \Omega^{-1}. \tag{2.4.3}$$

相应的规范场张量 $H_{\mu\nu} = \partial_\mu b_\nu - \partial_\nu b_\mu$. 显然对于共形变换群存在相应的纯规范 (平联络).

$$\overset{\circ}{b}_\mu = -\partial_\mu \phi \cdot \phi^{-1}, \quad \overset{\circ}{b}'_\mu = \overset{\circ}{b}'_\mu + \partial_\mu \Omega \cdot \Omega^{-1} \tag{2.4.4}$$

满足 $H_{\mu v} = 0$, 其中 $\phi(x)$ 称 Weyl 标量场, $w = -1$.

Weyl 几何是指具有对称度规张量且满足

$$\overline{\nabla}_\lambda g_{\mu\nu} = d_\lambda g_{\mu v} - \overline{\Gamma}^a_{\lambda\mu} g_{a\nu} - \overline{\Gamma}^a_{\lambda\nu} g_{\mu\alpha} = 0 \tag{2.4.5}$$

的空间, 这里 $\overline{\nabla}_\lambda$ 为 CT 和广义坐标变换 (CGT) 相应的双重协变微商.$\overline{\Gamma}^a_{\mu v}$ 为共形不变联络, 它与黎曼空间 Christoffel 符号 $\overline{\Gamma}^a_{\mu v}$ 有关系

$$\overline{\Gamma}^a_{\mu v} = \Gamma^a_{\mu\nu} - (\delta^a_\mu b_\nu + \delta^a_\nu b_\mu - g_{\mu v} b^\alpha). \tag{2.4.6}$$

由此可定义 Weyl 曲率张量 $\overline{R}^\rho_{\lambda\mu v}, \overline{R}_{\mu v}$ 和标曲率 $\overline{R}$

$$\begin{aligned} &\overline{R}^\rho_{\lambda\mu v} = \partial_\mu \overline{\Gamma}^\rho_{v\lambda} - \partial_v \overline{\Gamma}^\rho_{\mu\lambda} + \overline{\Gamma}^\rho_{\mu\alpha}\overline{\Gamma}^\alpha_{v\lambda} - \overline{\Gamma}^\rho_{v\alpha}\overline{\Gamma}^\alpha_{\mu v}, \\ &\overline{R}_{\mu v} = \overline{R}^\rho_{\mu\rho v}, \quad \overline{R} = g^{\mu v}\overline{R}_{\mu v} = R + 6(\nabla_\mu b^\mu - b_\mu b^\mu). \end{aligned} \tag{2.4.7}$$

通常,Weyl 几何属于半度量空间. 仅当 $H_{\mu\nu} = 0$ 满足才是可积的. 这时联络变为

$$\overset{*}{\Gamma}{}^\lambda{}_{\mu v} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu} + \phi^{-1}(\delta^\lambda_\mu \partial_\nu \phi + \delta^\lambda_v \partial_\mu \phi - g_{\mu\nu} b^\lambda). \tag{2.4.8}$$

令 $\overset{*}{g}_{\mu v} = \phi^2 g_{\mu v}, \overset{*}{g}{}^{\mu v} = \phi^{-2} g^{\mu v}$, 易证

$$\overset{*}{\nabla}_\lambda \overset{*}{g}_{\mu v} = \partial_\lambda \overset{*}{g}_{\mu v} - \overset{*}{\Gamma}{}^\alpha_{\lambda\mu} \overset{*}{g}_{\alpha v} - \overset{*}{\Gamma}{}^\alpha_{\lambda\mu} \overset{*}{g}_{\alpha v} = 0. \tag{2.4.9}$$

这时时空是可度量的,$\mathrm{d}\overset{*}{s}{}^2 = -\overset{*}{g}_{\mu v}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^v$. 可定义相应的曲率张量 $\overset{*}{R}{}^\rho_{\lambda\mu v}, \overset{*}{R}_{\mu v}$ 和 $\overset{*}{R}$. 其中

$$\overset{*}{R} = \phi^{-2}(R - 6\phi^{-1}\Box\phi). \tag{2.4.10}$$

值得讨论的是关于可积 Weyl 时空与 Weyl 规范场 b_μ 的相容性问题. 确实, 按照 Weyl 几何的观点, 它们是不相容的. 然而, 如果以 $\overset{*}{g}_{\mu v}$ 为度量, 即将 $g_{\mu v}, \phi$ 看成描述时空的几何量. 同时按照规范理论, 将 b_μ 看成存在于该时空的规范场, 则可构造可度量 Weyl 时空中包含 Weyl 规范场的共形场论. 其特点是在保留时空可度量性质的同时引入新的动力学自由度.

具有普遍对称性的作用量为

$$I = \int \mathscr{L} \mathrm{d}^4 x = \int (\mathscr{L}_G + \mathscr{L}_M) \mathrm{d}^4 x,$$

$$\mathscr{L}_G=\sqrt{-\overset{*}{g}}\left(\frac{\alpha}{4}R-\frac{\lambda}{4}\right),\quad \mathscr{L}_M=\mathscr{L}_b+\mathscr{L}_{M'}$$

$$\mathscr{L}_b=\sqrt{-\overset{*}{g}}\left(1-\frac{1}{4f^2}\overset{*}{H}_{\mu v}\overset{*}{H}^{\mu v}-\frac{1}{2}k_b^2\overset{*}{b}_\mu\overset{*}{b}^\mu\right). \tag{2.4.11}$$

式中仅给出 b_μ 场的拉格朗日, 其他物质场将分别讨论. 指标的升降是用 $\overset{*}{g}^{\mu v},\overset{*}{g}^{\mu v}$ 进行的, 且

$$\overset{*}{R}=\phi^{-2}(R-6\phi^{-1}\Box\phi), \tag{2.4.12}$$

$$\overset{*}{b}_\mu=b_\mu-\overset{\circ}{b}_\mu,\quad \overset{*}{H}_{\mu v}=H_{\mu v}.$$

令 $\alpha=1/4\pi$, 对 $\overset{*}{g}_{\mu v}$ 变分, 得到共形不变的 Einstein 方程

$$\overset{*}{R}_{\mu v}-\frac{1}{2}\overset{*}{g}_{\mu v}\overset{*}{R}=8\pi\left(\overset{*}{T}_{\mu v}-\frac{\lambda}{4}\overset{*}{g}_{\mu v}\right),$$

$$\overset{*}{T}_{\mu v}=-\frac{2}{\sqrt{-\overset{*}{g}}}\frac{\delta\mathscr{L}_M}{\delta\overset{*}{g}^{\mu v}}. \tag{2.4.13}$$

这实质上是以 $\overset{*}{g}$ 为度量的共形引力理论.

根据 (2.4.12), 可将 (2.4.11) 写为

$$\begin{aligned}\mathscr{L}=&\sqrt{-g}\left\{\frac{\alpha}{4}(R\phi^2+6\partial_\mu\phi\partial^u\phi)-\frac{1}{4f^2}H_{\mu v}H^{\mu v}\right.\\&\left.-\frac{1}{2}k_b^2(\partial_\mu\phi\partial^u\phi+2\phi\partial_\mu\phi\cdot b^\mu+\phi^2b_\mu b^\mu)-\frac{\lambda}{4}\phi^4\right\}+\mathscr{L}_{M'}.\end{aligned} \tag{2.4.14}$$

可见引力场是由 $g_{\mu v}(x),\phi(x)$ 场描述的, b_μ 为质荷为 k_b 的物质场, α,f,k_b,λ 均为无量纲参数, 且仅有三个是独立的. 特别地取 $k_b^2=1+3\alpha$ 并利用 $\bar{R}$ 的分解式 (2.4.7), 可将 (2.4.14) 式写成

$$\mathscr{L}=\sqrt{-g}\left[\frac{\alpha}{4}\bar{R}\phi^2-\frac{1}{2}g^{\mu v}d_\mu\phi d_v\phi-\frac{1}{4f^2}H_{\mu v}H^{\mu v}-\frac{\lambda}{4}\phi^4\right]+\mathscr{L}_{M'} \tag{2.4.15}$$

这正是 Smolin 给出的 Weyl 时空引力理论. 可见, 不考虑曲率平方项时, 上述理论属于可度量时空共形规范理论的范畴.

由于共形不变性, 场量中存在一个非动力学自由度, 不难验证, 在经典意义下, 以 $\overset{*}{g}_{\mu v}$ 为基本变量的共形不变 Einstein 方程 (2.4.13) 包含以 $g_{\mu v}(x),\phi(x)$ 为基本变量的场方程的全部信息. 在理论中 $g_{\mu v},\phi$ 为几何量, 描述引力.

对于共形引力场中的粒子, 为了满足共形不变性, 其质量应以无量纲参数质荷 k 代替

$$I=-\int k\mathrm{d}\overset{*}{s}=-\int k\phi(x)\mathrm{d}s. \tag{2.4.16}$$

经典粒子运动方程则为

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^\lambda}{\mathrm{d}\overset{*}{s}^2} + \overset{*}{\Gamma}{}^\lambda_{\mu v} \overset{*}{u}{}^\mu \overset{*}{u}{}^v = 0, \tag{2.4.17}$$

式中 $\overset{*}{u}{}^\mu = \dfrac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\overset{*}{s}}$ 为共形不变四维速度. 定义

$$k^\lambda_{\mu v} = -\delta^\lambda_\mu \partial_v \phi \cdot \phi^{-1} + g_{\mu v} \partial^\lambda \phi \cdot \phi^{-1}. \tag{2.4.18}$$

运动方程可写成

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^\lambda}{\mathrm{d}s^2} + (\overset{*}{\Gamma}{}^\lambda_{\mu v} + k^\lambda_{\mu v}) \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}x^v}{\mathrm{d}s} = 0. \tag{2.4.19}$$

定义四动量 $p_\mu = \dfrac{\partial I}{\partial x^\mu} = k\phi(x) u_\mu$, 可以得到粒子在共形引力场中的雅可比方程

$$g^{\mu v} \frac{\partial I}{\partial x^\mu} \frac{\partial I}{\partial x^\nu} + \phi^2 k^2 = 0 \tag{2.4.20}$$

与黎曼时空方程比较, 粒子惯性 (运动) 质量成为场, 不再为基本参数, 代之以粒子的质荷.

$$m = k\phi(x). \tag{2.4.21}$$

从这种意义讲,$\phi(x)$ 起惯性场的作用.

为了描述自旋 1/2 粒子在共形引力场中的运动, 须建立 Weyl 几何的 Vielbein 形式,Weyl 时空中引入局域 $O(3,1)$ 切空间, $e_{\mu\alpha}$ 定义为

$$g_{\mu v}(x) = e_{\mu\alpha}(x) e_{v\alpha}(x). \tag{2.4.22}$$

相应于局域 Lorentz 变换的李西旋度系数

$$\begin{aligned} &\overline{\omega}_{\mu ab} = \omega_{\mu ab} + \omega'_{\mu ab}, \quad \omega_{\mu ab} = \nabla_\mu e_{v\alpha} \cdot e^v_a, \\ &\omega'_{\mu ab} = (e_{\mu a} e^v_b - e_{\mu b} e^v_a) \partial_v \phi \cdot \phi^{-1}. \end{aligned} \tag{2.4.23}$$

旋量场 $\psi(x)$ 为局域 Lorentz 群旋量表示的变换对象. 由于其正则量纲

$$[\psi] = M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} T^{-\frac{1}{2}},$$

则其 Weyl 权重 $w = -3/2$. 即在 CT 下

$$\psi' = \Omega^{-\frac{3}{2}} \psi, \quad \psi' = \Omega^{-\frac{3}{2}} \overline{\psi}. \tag{2.4.24}$$

这时, 满足广义不变性的旋量场拉氏密度函数为

$$\mathscr{L} = \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} (\psi \Gamma^\mu \overline{\mathscr{D}}_\mu \psi - \overline{\mathscr{D}}_\mu \psi \Gamma^\mu \psi) - k\phi \overline{\psi} \psi \right], \tag{2.4.25}$$

式中,$\Gamma^\mu = e_a^\mu r_a$, 而

$$\overline{\mathscr{D}}_\mu\psi = \left(d_\mu - \frac{1}{2}\overline{\omega}_{\mu ab}I_{ab}\right)\psi. \tag{2.4.26}$$

采用式 (2.4.23), 可以证明

$$\mathscr{L} = \sqrt{-g}\left[\frac{1}{2}(\psi\Gamma^\mu\mathscr{D}_\mu\psi - \mathscr{D}_\mu\overline{\psi}\Gamma^\mu\psi) - k\phi\overline{\psi}\psi\right]. \tag{2.4.27}$$

将此式与黎曼空间的拉格朗日比较, 可知除了质量项以外二者相同. 这表明, 对于 Dirac 粒子, $\phi(x)$ 仍然具有惯性因数场的意义, 这还表明在 Weyl 规范场同位旋粒子的相互作用中, 不可能引入共形对称性. 这是 b_μ 和相因数规范场的本质区别.

对于幺正李群 G, 引入规范势 $A_\mu(x), A_\mu = e_{\mu a}A_a$: 由 $[A_a] = M^{1/2}T^{-1/2}$ 可知, $A_a(x)$ 场的 Weyl 权重应为 -1. 在局域变换下有

$$A_a' = \Omega^{-1}A_\alpha, \quad e_{\mu\alpha}' = \Omega e_{\mu\alpha}, \quad A_\mu' = A_\mu. \tag{2.4.28}$$

即规范场 A_μ 的 Weyl 权重为零, 广义协变规范场张量和拉格朗日与黎曼时空相同, 即

$$\begin{aligned} &\overline{F}_{\mu v} = F_{\mu v}, \\ &\mathscr{L} = \sqrt{-g}\frac{1}{2}T_r(F_{\mu v}F^{\mu v}). \end{aligned} \tag{2.4.29}$$

即运动方程中不含与 b_μ 场的相互作用.

在方程 (2.4.13) 中, 令 $\lambda = 0$, 我们讨论场源静止、弱场近似的情况，以揭示参量 k 的物理意义. 只考虑经典粒子, 共形不变能–动张量为

$$\overset{*}{T}{}^{\mu v} = \rho_0\overset{*}{u}{}^\mu\overset{*}{u}{}^v. \tag{2.4.30}$$

式中 ρ_0 为共形不变质荷密度. 对方程 (2.4.13) 求迹得

$$R_v^\mu = 8\pi\left(\overset{*}{T}{}_v^\mu - \frac{1}{2}\delta_v^\mu\overset{*}{T}\right), \quad \overset{*}{T} = \overset{*}{g}{}^{\mu v}\overset{*}{T}_{\mu v}. \tag{2.4.31}$$

对静止源, $\overset{*}{u}{}^i = 0 (i = 1, 2, 3)$, $\overset{*}{T}{}^{\mu\nu}$ 中不为零的分量仅为

$$\overset{*}{T}{}^{00} = \rho_0\overset{*}{u}{}^0\overset{*}{u}{}^0 = \rho_0\phi^{-2}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right)^2. \tag{2.4.32}$$

利用低速条件, 即得弱场静止源引力场方程

$$\overset{*}{R}{}_0^0 = -4\pi\rho_0. \tag{2.4.33}$$

弱场条件下, 可设

$$g_{\mu v} = \eta_{\mu v} + h_{\mu v}, \quad h_{00} = -2\psi, \quad \phi = \phi_0(1+\eta). \tag{2.4.34}$$

式中 $h_{\mu v}, \psi, \eta$ 均为小量. 由 $\phi(x)$ 场几何性质, 当 $r\to\infty$ 时,$\phi(x)\to\phi_0\neq 0$(常量). 取惯性系条件, 且令 $\zeta=\psi+\eta$, 则有

$$\overset{*}{g}_{00}\approx -\phi_0^2(1+2\xi),\quad \overset{*}{g}_{ij}\approx \phi_0^2(1+2\eta)\eta_{ij}. \tag{2.4.35}$$

代入方程 (2.4.33), 可得

$$\nabla^2\xi = 4\pi\phi_0^2\rho_0. \tag{2.4.36}$$

由此可得两个质荷分为 k, k' 粒子, 应有如下引力

$$F=-\frac{kk'}{r^2}. \tag{2.4.37}$$

此式表明了 k 的物理意义 —— 引力荷.

求 (2.4.31) 的迹, 可以得到

$$R-6\phi^{-1}\Box\phi=-8\pi\phi^{-2}T. \tag{2.4.38}$$

式中 $T=T^{\mu}_{\mu}$ 为可积 Weyl 时空外所有物质场能量动量张量的迹. 由此可见, 惯性因数场确实可以看成是由整个宇宙物质场所决定的量. 考虑一个简单的宇宙模型, 可以对 ϕ 的值做一大致估计. 设宇宙为密度均匀的气体球, 密度为 $\rho\approx 10^{-29}g\cdot\text{cm}^{-3}$, 半径为宇宙表观半径 $a\approx 10^{28}\text{cm}$, 则标曲率为 $R\approx -6/a^2$, 由 (2.4.38) 式对宇宙取平均值

$$\langle\phi\rangle^2\approx -\frac{8\pi\langle T\rangle}{\langle R\rangle}=\frac{4\pi}{3}\rho a^2\approx 10^{27}g\cdot\text{cm}^{-1}, \tag{2.4.39}$$

这个值接近于引力常数的倒数 $1/G$.

下面讨论共形对称性自发破缺.

拉格朗日 (2.4.15) 可以写成形式

$$\begin{aligned}\mathscr{L}=&\sqrt{-g}\left\{\frac{\alpha}{4}R\phi^2-\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^u-(1+3\alpha)b^\mu\phi\partial_\mu\phi\right.\\&\left.-\frac{1}{2}(1+3\alpha)\phi^2b_\mu b^\mu-\frac{1}{4f^2}H_{\mu\nu}H^{\mu\nu}-\frac{\lambda}{4}\phi^4\right\}+\mathscr{L}_{M'}\end{aligned} \tag{2.4.40}$$

相应的 $\phi, g_{\mu\nu}, b_\mu$ 场运动方程为

$$\begin{aligned}&\Box\phi+\frac{\alpha}{2}R\phi-(1+3\alpha)\phi b_\mu b^\mu+(1+3\alpha)\phi\nabla_\mu b^\mu-\lambda\phi^3=-Q,\\&\nabla_\mu H^\mu_\nu-f^2(1+3\alpha)(\phi\partial_\nu\phi+\phi^2 b_\nu)=0,\\&\frac{\alpha}{4}\phi^2\left(R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right)+\frac{\alpha}{4}(\Box\phi^2\cdot g_{\mu\nu}-\nabla_\mu\nabla_\nu\phi^2)=\cdots,\\&Q=-\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta\mathscr{L}_{M'}}{\delta\phi}.\end{aligned}$$

由于描述共形引力时空的是几何量 $g_{\mu\nu}(x)$ 和 $\phi(x)$, 它们的真空期望值不应为零. 理论中的物质场则有为零的真空期望值, 即

$$\langle g_{\mu\nu}\rangle_0 \neq 0, \quad \langle \phi\rangle_0 \neq 0, \quad \langle A_\mu\rangle_0 = \langle \psi\rangle_0 = \langle b_\mu\rangle_0 = 0.$$

代入方程 (2.4.42), 可得

$$\langle \phi\rangle_0 \partial_\nu \langle \phi\rangle_0 = 0.$$

由此得到 $\langle \phi\rangle_0 =$ 常量 ϕ_0. 这将导致在低能极限下共形对称性的真空自发破缺. 代入式 (2.4.40) 中, 破缺后 Lagrangian 成为

$$\begin{aligned}\mathscr{L} =& \sqrt{-g}\left\{\frac{\alpha\phi_0^2}{4}R - \frac{1}{4f^2}H_{\mu\nu}H^{\mu\nu} - \frac{1}{2}k_b^2\phi_0^2 b_\mu b^\mu + \frac{\lambda}{4}\phi_0^4\right\} + \mathscr{L}_{M'},\\ \mathscr{L}_{M'} =& \mathscr{L}_{M'}(\varPhi^A, g_{\mu\nu}, \phi_0).\end{aligned}$$

即所有具有质荷 k 的物质粒子获得统一的惯性因数, 其惯性质量成为 $m = k\phi_0$, Einstein 引力理论自然产生, 引力常数为

$$G = \frac{1}{4\pi\alpha}\frac{1}{\phi_0^2}.$$

当取 $\alpha = 1/4\pi$ 时, $G = 1/\phi_0^2$, 即 $\phi_0 \approx 10^{19}\text{GeV}$, 给出共形对称性真空自发破缺的尺度.

牛顿引力成为 $F = -G\dfrac{mm'}{r^2}$. 即惯性质量等于引力质量. Weyl 规范场也获得质量 $m_B = fk_B\phi_0$.

2.5 非稳态 Einstein-Maxwell 场

在本节中, 我们将 Kerr-Newman 度规推广到非稳态情况.

Vaidya-Bonner 度规具有形式

$$\begin{aligned}g_{00} &= 1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2},\\ g_{01} &= 1,\\ g_{22} &= -r^2,\\ g_{33} &= -r^2\sin^2\theta.\end{aligned} \tag{2.5.1}$$

式中 $m = m(u), Q = Q(u)$, u 为延迟时间坐标. 此度规场源的质量和电荷为时间任意函数时, 引力场的分布.

把 (2.5.1) 写成零标架形式

$$g_{\mu\nu} = l_\mu n_\nu + n_\mu l_\nu - m_\mu \overline{m}_\nu - m_\mu \overline{m}_\nu, \tag{2.5.2}$$

$$
\begin{aligned}
l_\mu &= \delta^0_\mu, \\
n_\mu &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)\delta^0_\mu + \delta^1_\mu, \\
m_\mu &= -\frac{r}{\sqrt{2}}(\delta^2_\mu + \mathrm{i}\sin\theta\delta^3_\mu).
\end{aligned} \tag{2.5.3}
$$

式中 $\mu, \nu = 0, \cdots, 3$, 分别代表 u, r, θ, φ. 求出 (2.5.2) 式的逆变形式并仿照 Newman 提出的方法进行复化, 我们得到

$$
\begin{aligned}
l^\mu &= \delta^\mu_1, \\
n^\mu &= \delta^\mu_0 - \frac{1}{2}\left[1 - m\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\bar{r}}\right) + \frac{Q^2}{r\bar{r}}\right]\delta^\mu_1, \\
m^\mu &= -\frac{1}{\sqrt{2r}}(\delta^\mu_2 + \mathrm{i}\sin\theta\delta^\mu_3).
\end{aligned} \tag{2.5.4}
$$

其中 r 可取复值, $\bar{r}$ 是 r 的复共轭.

作坐标变换

$$
\begin{aligned}
u' &= u - \mathrm{i}a\cos\theta, \\
r' &= r + \mathrm{i}a\cos\theta(a = \mathrm{const}), \\
\theta' &= \theta, \\
\psi' &= \psi.
\end{aligned} \tag{2.5.5}
$$

相应的变换矩阵为

$$
[a'^\mu_\nu] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \mathrm{i}a\sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & -\mathrm{i}a\sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.5.6}
$$

再把变换后的 r' 和 u' 取为实值, 就得到如下的零标架:

$$
\begin{aligned}
l'_\mu &= \delta^\mu_1, \\
n'_\mu &= \delta^\mu_0 - \frac{1}{2}(1 - 2mr\rho\overline{\rho} + Q^2\rho\overline{\rho})\delta^\mu_1, \\
m'^\mu &= -\frac{\overline{\rho}}{\sqrt{2}}\left(\mathrm{i}a\sin\theta\delta^\mu_0 - \mathrm{i}a\sin\theta\delta^\mu_1 + \delta^\mu_2 + \frac{i}{\sin\theta}\delta^\mu_3\right).
\end{aligned} \tag{2.5.7}
$$

式中

$$
\rho = -\frac{1}{r - \mathrm{i}a\cos\theta}. \tag{2.5.8}
$$

去掉撇号并利用方程 (2.5.2), 最后得到

$$
g^{00} = -a^2\sin^2\theta\rho\overline{\rho},
$$

$$
\begin{aligned}
g^{01} &= (a^2 + r^2)\rho\bar{\rho}, \\
g^{03} &= -a\rho\bar{\rho}, \\
g^{11} &= (2mr - Q^2 - r^2 - a^2)\rho\bar{\rho}, \\
g^{13} &= -a\rho\bar{\rho}, \\
g^{22} &= -\rho\bar{\rho}, \\
g^{33} &= -\frac{\rho\bar{\rho}}{\sin^2\theta}.
\end{aligned} \tag{2.5.9}
$$

其协变形式是

$$
\begin{aligned}
g_{00} &= 1 - (2mr - Q^2)\rho\bar{\rho}, \\
g_{01} &= 1, \\
g_{03} &= a(2mr - Q^2)\rho\bar{\rho}\sin^2\theta, \\
g_{13} &= -a\sin^2\theta, \\
g_{22} &= -\frac{1}{\rho\bar{\rho}}, \\
g_{33} &= \sin^4\theta\left[(Q^2 - 2mr)a^2\rho\bar{\rho} - \frac{a^2 + r^2}{\sin^2\theta}\right].
\end{aligned} \tag{2.5.9$'$}
$$

这就是我们求得的新的时空度规. 它是 Kerr-Newman 度规的非稳态推广. 它与 Kerr-Newman 度规的不同之处是: (2.5.8) 和 (2.5.9) 中代表质量和电荷的 $m(u)$ 和 $Q(u)$ 是延迟坐标时 u 的任意函数, 而 Kerr-Newman 度规的 m 和 Q 都是常数.

为了研究引力场 (2.5.9) 并把结果与稳态 Kerr-Newman 度规和非稳态 Kerr 度规进行比较, 我们采用另一种零标架: 度规 (2.5.9) 的零标架的逆变分量为

$$
\begin{aligned}
l^\mu &= \delta_1^\mu, \\
n^\mu &= \rho\bar{\rho}\left[(r^2 + a^2)\delta_0^\mu + \frac{2mr - Q^2 - (r^2 + a^2)}{2}\delta_1^\mu + a\delta_3^\mu\right], \\
m^\mu &= -\frac{\bar{\rho}}{\sqrt{2}}\left(\mathrm{i}a\sin\theta\delta_0^\mu + \delta_2^\mu + \frac{1}{\sin\theta}\delta_3^\mu\right).
\end{aligned} \tag{2.5.10}
$$

其协变分量为

$$
\begin{aligned}
l_\mu =& \delta_\mu^0 - a\sin^2\theta\delta_\mu^3, \\
n_\mu =& \rho\bar{\rho}\left[\frac{r^2 + a^2 + Q^2 - 2mr}{2}\delta_\mu^0 + \frac{\delta_\mu^1}{\rho\bar{\rho}}\right. \\
& \left. + \frac{2mr - Q^2 - (r^2 + a^2)}{2}a\sin^2\theta\delta_\mu^3\right],
\end{aligned}
$$

$$m_\mu = -\frac{\bar{\rho}}{\sqrt{2}}\left[\mathrm{i}a\sin\theta\delta_\mu^0 - \frac{\delta_\mu^2}{\rho\bar{\rho}} - \mathrm{i}(r^2+a^2)\sin\theta\delta_\mu^3\right]. \tag{2.5.11}$$

根据旋系数的定义, 再利用附录中给出的 Christoffel 符号, 我们得到

$$\begin{aligned}
&\kappa = \varepsilon = \sigma = \lambda = 0,\\
&\rho = -\frac{1}{r - \mathrm{i}d\cos\theta},\\
&\pi = \frac{\mathrm{i}a\sin\theta\rho^2}{\sqrt{2}},\\
&\beta = -\frac{\cot\theta\bar{\rho}}{2\sqrt{2}},\\
&\alpha = \pi - \bar{\beta},\\
&\mu = -\frac{2mr - Q^2 - (r^2+a^2)}{2}\rho^2\bar{\rho},\\
&\nu = -\frac{\mathrm{i}a\sin\theta}{\sqrt{2}}\left(r\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}u} - Q\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}u}\right)\rho^2\bar{\rho},\\
&\gamma = \mu + \frac{(r-m)\rho\bar{\rho}}{\sqrt{2}},\\
&\tau = -\frac{\mathrm{i}a\sin\theta\rho\bar{\rho}}{\sqrt{2}}.
\end{aligned} \tag{2.5.12}$$

我们注意到该度规的旋系数 ν 不为零, 而在 Kerr-Newman 度规中它为零. 其余的旋系数与 Kerr-Newmn 度规形式相同, 不同的只是质量和电荷是可变的. 我们将看到, 旋系数 ν 不为零将在其他的 Newman-Penrose 量中引起稳态 Kerr-Newman 度规没有的项.

Ricci 张量的标架分量 $\Phi_{00}, \Phi_{01}, \Phi_{02}, \Phi_{11}, \Phi_{12}, \Phi_{22}$ 可用如下的 Newman-Penrose 方程计算:

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}\rho - \bar{\delta}\kappa =& (\rho^2 + \sigma\bar{\sigma}) + (\varepsilon+\bar{\varepsilon})\rho - \bar{\kappa}\tau - \kappa(3\alpha + \bar{\beta} - \pi) + \Phi_{00},\\
\mathrm{D}\alpha - \bar{\delta}\varepsilon =& (\rho + \bar{\varepsilon} - 2\varepsilon)\alpha + \beta\bar{\sigma} - \bar{\beta}\varepsilon - \kappa\lambda - \bar{\kappa}\gamma + (\varepsilon+\rho)\pi + \Phi_{10},\\
\mathrm{D}\lambda - \bar{\delta}\pi =& (\rho\lambda + \bar{\sigma}\mu) + \pi^2 + (\alpha - \bar{\beta})\pi - \nu\bar{\kappa} - (3\varepsilon - \bar{\varepsilon})\lambda + \Phi_{20},\\
\mathrm{D}\gamma - \Delta\varepsilon + \delta\alpha - \bar{\delta}\beta =& (\tau + \bar{\pi})\alpha + (\bar{\tau} + \pi)\beta - (\varepsilon + \bar{\varepsilon})\gamma\\
&- (\gamma + \bar{\gamma})\varepsilon + \tau\pi - \nu\kappa + (\mu\rho - \lambda\sigma) + \alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} - 2\alpha\beta\\
&+ (\rho - \bar{\rho})\gamma + (\mu - \bar{\mu})\varepsilon + 2\Phi_{11},\\
\delta\gamma - \Delta\beta =& (\tau - \bar{\alpha} - \beta)\gamma + \mu\tau - \sigma\nu - \varepsilon\bar{\nu} - (\gamma - \bar{\gamma} - \mu)\beta + \alpha\bar{\lambda} + \Phi_{12},\\
\delta\nu - \Delta\mu =& (\mu^2 + \lambda\bar{\lambda}) + (\gamma+\bar{\gamma})\mu - \bar{\nu}\pi + (\tau - 3\beta - \bar{\alpha})\nu + \Phi_{22},
\end{aligned} \tag{2.5.13}$$

Ricci 示量 $R=-24\Lambda$ 可用下式求出：

$$\begin{aligned}&\mathrm{D}\mu-\delta\pi+\delta\alpha-\delta\beta\\&=(\overline{\rho}+\rho)\mu+(\rho-\overline{\rho})\gamma-(\overline{\alpha}-\beta)\pi\\&\quad-(\varepsilon\overline{\mu}+\overline{\varepsilon}\mu)-\nu\kappa+\alpha\overline{\alpha}+\beta\overline{\beta}+\pi\overline{\pi}-2\alpha\beta+\Phi_{11}+3\Lambda.\end{aligned}\tag{2.5.14}$$

式中 D、Δ 和 δ 是导数. 根据其定义和 (2.5.10) 式给出的零标架, 我们得到

$$\begin{aligned}&\mathrm{D}=\frac{\partial}{\partial r},\\&\Delta=\rho\overline{\rho}\left[(r^2+a^2)\frac{\partial}{\partial u}-\frac{1}{2}(r^2+a^2-2mr+Q^2)\frac{\partial}{\partial r}+a\frac{\partial}{\partial\varphi}\right],\\&\delta=-\frac{\overline{\rho}}{\sqrt{2}}\left[\mathrm{i}a\sin\theta\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial\theta}+\mathrm{i}\mathrm{cosec}\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right].\end{aligned}\tag{2.5.15}$$

把上式和方程 (2.5.12) 给出的旋系数代入 (2.5.13) 和 (2.5.14) 式得到

$$\begin{aligned}&\Phi_{00}=\Phi_{01}=\Phi_{02}=0,\\&\Phi_{11}=\frac{Q^2}{2}(\rho\overline{\rho})^2,\\&\Phi_{12}=-\frac{\mathrm{i}a\sin\theta}{\sqrt{2}}\left(\frac{\rho^2\overline{\rho}}{2}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}u}+Q(\rho\overline{\rho})^2\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}u}\right),\\&\Phi_{22}=\frac{a^2\sin^2\theta(\rho\overline{\rho})^2}{2}\left[r\frac{\mathrm{d}^2m}{\mathrm{d}u^2}-Q\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}u^2}-\left(\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}u}\right)\right]^2-r(\rho\overline{\rho})^2\left(r\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}u}-Q\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}u}\right),\\&\qquad R=-24\Lambda=0.\end{aligned}\tag{2.5.16}$$

为了计算 Weyl 张量的零标架分量 $\psi_0,\psi_1,\psi_2,\psi_3,\psi_4$, 我们采用下列 Newman-Penrose 方程

$$\begin{aligned}&\mathrm{D}\sigma-\delta\kappa=(\rho+\overline{\rho})\sigma+(3\varepsilon-\overline{\varepsilon})\sigma-\kappa(\tau-\overline{\pi}+\overline{\alpha}+3\beta)+\psi_0,\\&\mathrm{D}\beta-\delta\varepsilon=(\alpha+\pi)\sigma+(\overline{\rho}-\overline{\varepsilon})\beta-(\mu+\gamma)\kappa-(\overline{\alpha}-\overline{\pi})\varepsilon+\psi_1,\\&\Delta\rho-\delta\tau=-(\rho\overline{\mu}+\sigma\lambda)+(\overline{\beta}-\alpha-\overline{\tau})\tau+(\gamma+\overline{\gamma})\rho+\nu\kappa-\psi_2-2\Lambda,\\&\Delta\alpha-\overline{\delta}\gamma=(\rho+\varepsilon)\nu-(\tau+\beta)\lambda+(\overline{\gamma}-\overline{\mu})\alpha+(\overline{\beta}-\overline{\tau})\gamma-\psi_3,\\&\Delta\lambda-\overline{\delta}\nu=-(\mu+\overline{\mu})\lambda-(3\gamma-\overline{\gamma})\lambda+(3\alpha+\overline{\beta}+\pi-\overline{\tau})\nu-\psi_4.\end{aligned}\tag{2.5.17}$$

把导数 (2.5.15) 和 (2.5.16) 式给出的旋系数代入方程 (2.5.17) 得

$$\begin{aligned}&\psi_0=\psi_1=0,\\&\psi_2=\left(\frac{m}{\overline{\rho}}+Q^2\right)\rho^3\overline{\rho},\\&\psi_3=-\mathrm{i}\frac{\rho^2\overline{\rho}}{2\sqrt{2}}\left[\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}u}+4\rho\left(r\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}u}-Q\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}u}\right)\right]a\sin\theta,\end{aligned}$$

$$\psi_4 = \left\{ \left[r\frac{\mathrm{d}^2 m}{\mathrm{d}u^2} - Q\frac{\mathrm{d}^2 Q}{\mathrm{d}u^2} - \left(\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}u}\right)^2 \right] \frac{\rho^3\overline{\rho}}{2} + \left(r\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}u} - Q\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}u} \right) \rho^4\overline{\rho} \right\} a^2 \sin^2\theta. \tag{2.5.18}$$

注意　(2.5.16) 和 (2.5.18) 中的 $\Phi_{12}, \Phi_{22}, \psi_3, \psi_4$ 不为零, 而这些量在 Kerr-Newman 度规中都为零.

代入第二篇第 3 章中的 N-P 方程 (3.11.21a)~(3.11.21r) 和 (3.11.23a)~(3.11.23k), 我们证明了度规 (2.5.10) 确是 Einstein-Maxwell 方程的严格解.

三个光学标量 (剪切度、旋度和散度) 为

$$\begin{aligned} \sigma &= \left[\frac{1}{2} l_{(\mu;\nu)} l^{\mu;\nu} - \Theta^2\right]^{1/2} = 0, \\ \omega &= \left[\frac{1}{2} l_{(\mu;\nu)} l^{\mu;\nu}\right]^{1/2} = -a\rho\overline{\rho}\cos\theta, \\ \Theta &= -\frac{1}{2} l^{\mu}_{;\mu} = -\rho\overline{\rho}. \end{aligned} \tag{2.5.19}$$

很明显它们和 Kerr-Newman 度规相同. 下面我们将证明度规 (2.5.9) 是 Petrov II 型, 其重复的主零矢量为 l^μ. 因此, 我们的解具有与 Kerr-Newman 相同的剪切度、旋度和零线汇.

我们现在计算在坐标系 u, r, θ, φ 中的 Ricci 张量. 由于 Ricci 标量为零 [参见方程 (2.5.16)], 所以 $R_{\mu\nu} = R_{mn} Z^m_\mu Z^n_\nu = T_{\mu\nu}$. 于是, 能–动张量由下式给出:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} =& 4Q^2(\rho\overline{\rho})^2 [l_{(\mu^n\nu)} + m_{(\mu^{\overline{m}}\nu)}] - \left\{ a^2\sin^2\theta(\rho\overline{\rho})^2 \left[r\frac{\mathrm{d}^2 m}{\mathrm{d}u^2} - Q\frac{\mathrm{d}^2 Q}{\mathrm{d}u^2} - \left(\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}u}\right)^2 \right] \right. \\ & \left. + 2r\rho\overline{\rho}^2 \left(r\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}u} - Q\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}u} \right) \right\} l_\mu l_\nu - \frac{4a\sin\theta}{\sqrt{2}} \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}u} \rho\overline{\rho} - \mathrm{Im}[l_{(\mu^{\overline{m}}\nu)}\rho] \\ & - \frac{8Q(\rho\overline{\rho})^2 a \sin\theta}{\sqrt{2}} \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}u} \mathrm{Im}[l_{(\mu^{\overline{m}}\nu)}\rho]. \end{aligned} \tag{2.5.20}$$

利用方程 (2.5.11) 和 (2.5.20), 我们可直接写出在坐标系 u、r、θ、φ 中的 Ricci 张量和能–动张量的各分量. 结果表明满足主能条件, 这表明度规 (2.5.9) 是具有物理意义的.

下面讨论度规的代数分类. 我们采用 Petrov 分类的旋量形式对 Weyl 张量进行分类. 在时空的每一点, $l^\mu, n^\mu, m^\mu, \overline{m}^\mu$ 都对应一个旋量基为 l_A, n_A 的切空间 (满足 $l_A n^A = 1$). 由旋量基可得到在 5 维复空间 E_5 中的另一组基

$$\xi_{0ABCD} = n_A n_B n_C n_D,$$

$$\begin{aligned}
\xi_{1ABCD} &= -4l_{(A^nB^nC^nD)},\\
\xi_{2ABCD} &= 6l_{(\dot{A}^lB^nC^nD)},\\
\xi_{3ABCD} &= -4l_{\dot{A}}l_Bl_C{}^n{}_D,\\
\xi_{4ABCD} &= l_Al_Bl_Cl_D.
\end{aligned}\tag{2.5.21}$$

利用这组基, Weyl 旋量 ψ_{ABCD}(它是等价 Weyl 张量 $C_{\mu\nu\rho\sigma}$ 的旋量) 可表示为

$$\psi_{ABCD} = \sum_{m=0}^{4}\psi_m\xi_{mABCD}.\tag{2.5.22}$$

式中 α_m 是 Weyl 旋量的标架分量. 由于本度规的 $\psi_0=\psi_1=0$[参见方程 (2.5.18)], 用 l^Cl^D 缩并 (2.5.22) 式得到

$$\psi_{ABCD}l^Cl^D = \psi_2l_Al_B.\tag{2.5.23}$$

式中 α_A 和 l_A 成正比. 由此可知, 若 $\gamma_c\neq\delta_c$, 度规是 Petrov II 型; 若 $\gamma_c=\delta_c$, 则度规为 D 型, 这里, 容易证明 $3\psi_2\psi_4\neq\psi_3^2$, 从而有 $\gamma_c\neq\delta_c$, 因此我们的度规属于 Petrov II 型.

注意 在 (2.5.8) 中:

第一类 Christoffel 符号的非零分量为

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\alpha\beta\gamma} &= \frac{1}{2}[g_{\alpha\beta,\gamma}+g_{\alpha\gamma,\beta}-g_{\beta\gamma,\alpha}] = \Gamma_{\alpha\gamma\beta},\\
\Gamma_{000} &= -\left(\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}u}r-Q\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}u}\right)\rho\overline{\rho},\\
\Gamma_{001} &= (2mr-Q^2)r\rho^2\overline{\rho}^2-m\rho\overline{\rho},\\
\Gamma_{002} &= -(2mr-Q^2)a^2\sin\theta\cos\theta\rho^2\overline{\rho}^2,\\
\Gamma_{013} &= -(2mr-Q^2)ra\sin^2\theta\rho^2\overline{\rho}^2+ma\sin^2\theta\rho\overline{\rho},\\
\Gamma_{023} &= (2mr-Q^2)(r^2+a^2)a\sin\theta\cos\theta\rho^2\overline{\rho}^2,\\
\Gamma_{033} &= \left(\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}u}r-Q\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}u}\right)a^2\sin^4\theta\rho\overline{\rho},\\
\Gamma_{100} &= -(2mr-Q^2)r\rho^2\overline{\rho}^2+m\rho\overline{\rho},\\
\Gamma_{103} &= (2mr-Q^2)ra\sin^2\theta\rho^2\overline{\rho}^2-ma\sin^2\theta\rho\overline{\rho},\\
\Gamma_{122} &= r,\\
\Gamma_{123} &= -a\sin\theta\cos\theta,\\
\Gamma_{133} &= -(2mr-Q^2)ra^2\sin^4\theta\rho^2\overline{\rho}^2+ma^2\sin^4\theta\rho\overline{\rho}+r\sin^2\theta,\\
\Gamma_{200} &= (2mr-Q^2)a^2\sin\theta\cos\theta\rho^2\overline{\rho}^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{203} &= -(2mr - Q^2)(r^2 + a^2)a\sin\theta\cos\theta\rho^2\overline{\rho}^2, \\
\Gamma_{212} &= -r, \\
\Gamma_{213} &= a\sin\theta\cos\theta, \\
\Gamma_{222} &= a^2\sin\theta\cos\theta, \\
\Gamma_{233} &= (r^2 + a^2)\sin\theta\cos\theta + (2mr - Q^2)(2a^2\sin^3\theta\cos\theta\rho\overline{\rho} \\
&\quad + a^4\sin^5\theta\cos\theta\rho^2\overline{\rho}^2), \\
\Gamma_{300} &= 2\left(\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}u}r - Q\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}u}\right)a\sin^2\theta\rho\overline{\rho}, \\
\Gamma_{301} &= -(2mr - Q^2)ra\sin^2\theta\rho^2\overline{\rho}^2 + ma\sin^2\theta\rho\overline{\rho}, \\
\Gamma_{302} &= (2mr - Q^2)(r^2 + a^2)a\sin\theta\cos\theta\rho^2\overline{\rho}^2, \\
\Gamma_{303} &= -\left(\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}u}r - Q\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}u}\right)a^2\sin^4\theta\rho\overline{\rho}, \\
\Gamma_{312} &= -a\sin\theta\cos\theta, \\
\Gamma_{313} &= (2mr - Q^2)ra^2\sin^4\theta\rho^2\overline{\rho}^2 + ma^2\sin^4\theta\rho\overline{\rho} - r\sin^2\theta, \\
\Gamma_{323} &= -(r^2 + a^2)\sin\theta\cos\theta - (2mr - Q^2) \\
&\quad \times (2a^2\sin^3\theta\cos\theta\rho\overline{\rho} - a^4\sin^5\theta\cos\theta\rho^2\overline{\rho}^2).
\end{aligned} \tag{2.5.24}$$

第二类 Christoffer 符号的非零分量为

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} &= g^{\mu\gamma}\Gamma_{\gamma\alpha\beta}, \\
\Gamma^0_{00} &= -\left(\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}u}r - Q\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}u}\right)a^2\sin^2\theta\rho^2\overline{\rho}^2 - (mr^2 - Q^2r)\rho^2\overline{\rho}^2 \\
&\quad + ma^2\rho^2\overline{\rho}^2 - (2mr - Q^2)ra^2\sin^2\theta\rho^3\overline{\rho}^3, \\
\Gamma^0_{02} &= -(2mr - Q^2)a^2\sin\theta\cos\theta\rho^2\overline{\rho}^2, \\
\Gamma^0_{03} &= (2mr^2 - Q^2r)a^3\sin^4\theta\rho^3\overline{\rho}^3 + (2mr^2 - Q^2)ar\sin^2\theta\rho^2\overline{\rho}^2 \\
&\quad - ma^3\sin^4\theta\rho^2\overline{\rho}^2 + \left(\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}u}r - Q\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}u}\right)a^3\sin^4\theta\rho^2\overline{\rho}^2 - ma\sin^2\theta\rho\overline{\rho}, \\
\Gamma^0_{12} &= a^2\sin\theta\cos\theta\rho\overline{\rho}, \\
\Gamma^0_{13} &= ra\sin^2\theta\rho\overline{\rho}, \\
\Gamma^0_{22} &= r(a^2 + r^2)\rho\overline{\rho}, \\
\Gamma^0_{23} &= (2mr - Q^2)a^3\sin^3\theta\cos\theta\rho^2\overline{\rho}^2, \\
\Gamma^0_{33} &= -(mr^4 - Q^2r^3 - Q^2ra^2)a^2\sin^4\theta\rho^3\rho^{-3} \\
&\quad - mr^2a^4\sin^6\theta\rho^3\overline{\rho}^3 + ma^6\sin^4\theta\cos\theta - \left(\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}u}r - Q\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}u}\right)a^4\sin^6\theta\rho^2\overline{\rho}^2 \\
&\quad + ra^2\sin^4\theta\rho\overline{\rho} + r\sin^2\theta,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{00} = &(2mr^2 - Q^2 r)a^2\sin^2\theta\rho^3\overline{\rho}^3 - (2mr - Q^2)^2 r\rho^3\rho^{-3}\\
&+\left(\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}u}r - Q\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}u}\right)a^2\sin^2\theta\rho^2\overline{\rho}^2 + (2mr - Q^2)m\rho^2\overline{\rho}^2\\
&+(2mr^2 - Q^2 r)\rho^2\overline{\rho}^2 - ma^2\sin^2\theta\rho^2\overline{\rho}^2\\
&-\left(\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}u}r - Q\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}u}\right)\rho\overline{\rho} - m\rho\overline{\rho},\\
\Gamma^1_{01} = &(2mr - Q^2)r\rho^2\overline{\rho}^2 - m\rho\overline{\rho},\\
\Gamma^1_{03} = &(2mr - Q^2)^2 ra\sin^2\theta\rho^3\overline{\rho}^3 - (2mr - Q^2)ra^3\sin^4\theta\rho^3\overline{\rho}^3\\
&-(2mr - Q^2)ma\sin^2\theta\rho^2\overline{\rho}^2 - (2mr - Q^2)ra\sin^2\theta\rho^2\overline{\rho}^2\\
&+ma^3\sin^4\theta\rho^2\overline{\rho}^2 - \left(\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}u}r - Q\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}u}\right)a^3\sin^4\theta\rho^2\overline{\rho}^2\\
&+ma\sin^2\theta\rho\overline{\rho},\\
\Gamma^1_{12} = &-a^2\sin\theta\cos\theta\rho\overline{\rho},\\
\Gamma^1_{13} = &-(2mr - Q^2)ra\sin^2\theta\rho^2\overline{\rho}^2 + ma\sin^2\theta\rho\overline{\rho} - ra\sin^2\theta\rho\overline{\rho},\\
\Gamma^1_{22} = &(2mr - Q^2)r\rho\overline{\rho} - ra^2\sin^2\theta\rho\overline{\rho} - r,\\
\Gamma^1_{33} = &-(2mr - Q^2)^2 ra^2\sin^4\theta\rho^3\overline{\rho}^3\\
&+(2mr - Q^2)ra^4\sin^6\theta\rho^3\overline{\rho}^3 + \left(\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}u}r - Q\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}u}\right)\\
&\times a^4\sin^6\theta\rho^2\overline{\rho}^2 + (2mr - Q^2)ra^2\sin^4\theta\rho^2\overline{\rho}^2\\
&+(2mr - Q^2)ma^2\sin^4\theta\rho^2\overline{\rho}^2 - ma^4\sin^6\theta\rho^2\overline{\rho}^2\\
&+\left(\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}u}r - Q\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}u}\right)a^2\sin^4\theta\rho\overline{\rho} - ma^2\sin^4\theta\rho\overline{\rho}\\
&+(2mr - Q^2)r\sin^2\theta\rho\overline{\rho} - ra^2\sin^4\theta\rho\overline{\rho} - r\sin^2\theta,\\
\Gamma^2_{00} = &-(2mr - Q^2)a^2\sin\theta\cos\theta\rho^3\overline{\rho}^3,\\
\Gamma^2_{03} = &(2mr - Q^2)r^2 a\sin\theta\cos\theta\rho^3\overline{\rho}^3 + (2mr - Q^2)a^3\sin\theta\cos\theta\rho^3\overline{\rho}^3,\\
\Gamma^2_{12} = &r\rho\overline{\rho},\\
\Gamma^2_{13} = &-a\sin\theta\cos\theta\rho\overline{\rho},\\
\Gamma^2_{22} = &-a^2\sin\theta\cos\theta\rho\overline{\rho},\\
\Gamma^2_{33} = &-(2mr - Q^2)a^4\sin^5\theta\cos\theta\rho^3\overline{\rho}^3 - 2(2mr - Q^2)\\
&\times a^2\sin^3\theta\cos\theta\rho^2\overline{\rho}^2 - (r^2 + a^2)\sin\theta\cos\theta\rho\overline{\rho},\\
\Gamma^3_{00} = &-\left(\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}u}r - Q\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}u}\right)a\rho^2\overline{\rho}^2 + ma\rho^2\overline{\rho}^2 - (2mr - Q^2)ra\rho^3\overline{\rho}^3,\\
\Gamma^3_{02} = &-(2mr - Q^2)a\cos\theta\mathrm{cosec}\theta\rho^2\overline{\rho}^2,\\
\Gamma^3_{03} = &(2mr - Q^2)ra^2\sin^2\theta\rho^3\overline{\rho}^3 - ma^2\sin^2\theta\rho^2\overline{\rho}^2\\
&+\left(\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}u}r - Q\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}u}\right)a^2\sin^2\theta\rho^2\overline{\rho}^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\Gamma_{12}^3 = a\cos\theta\mathrm{cosec}\theta\rho\overline{\rho},\\
&\Gamma_{13}^3 = r\rho\overline{\rho},\\
&\Gamma_{22}^3 = ra\rho\overline{\rho},\\
&\Gamma_{23}^3 = (2mr-Q^2)a^2\sin\theta\cos\theta\rho^2\overline{\rho}^2+\cos\theta\mathrm{cosec}\theta,\\
&\Gamma_{33}^3 = -(2mr-Q^2)ra^3\sin^4\theta\rho^3\overline{\rho}^3-\left(\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}u}r-Q\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}u}\right)a^3\sin^4\theta\rho^2\overline{\rho}^2\\
&\qquad +ma^3\sin^4\theta\rho^2\overline{\rho}^2+ra\sin^2\theta\rho\overline{\rho}.
\end{aligned}\tag{2.5.25}
$$

2.6　Einstein-Maxwell 场的一个静磁解

我们曾给出一个一级近似解 (Wang, 1985), 描述含磁矩的质量源的外部场. 本节将给出一个严格解.

Einstein-Maxwell 场的第一个严格解是 Bonnor 于 1954 年获得的. 接着, Tauber 采用 Kerson 解构成一个含磁荷的中心质量的外部解. 1966 年, Bonnor 采用 Kerr 度规, 用自己的关于稳态真空解和电磁真空解的对应关系, 得到了一个含两个参量的解 (含质量和磁偶极矩). 这个解在无限远是平直的, 磁场趋近于磁偶极子的磁场. 但是 Bonnor 的解有一个问题, 即当磁的参量为零时不能过渡到 Schwarzschild 解.

20 世纪 70 年代末, Herlt 求出了一个解簇, 其中包括 Bonnor 解, 也可退化为 R-N 解. 但是很遗憾, Herlt 的解不能描述磁偶极矩的静磁场.

下面将给出的解满足上述各个物理条件, 描述质量–磁矩的外部场.

E-M 方程具有形式

$$
\begin{aligned}
&R_{ik} = 8\pi T_{ik},\quad \frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{-g}F_{lm}g^{il}g^{km})=0,\\
&F_{ik;l}+F_{kl;i}+F_{li;k}=0,\\
&T_{ik}=\frac{1}{4\pi}\left(F_{il}F_k^l-\frac{1}{4}F_{lm}F^{lm}g_{ik}\right),\\
&F_{ik}=A_{k;i}-A_{i;k}=\frac{\partial A_k}{\partial x^i}-\frac{\partial A_i}{\partial x^k}.
\end{aligned}\tag{2.6.1}
$$

静态辐射对称引力场度规的一般形式为

$$
\mathrm{d}s^2 = f^{-1}[\mathrm{e}^{2\gamma}(\mathrm{d}\rho^2+\mathrm{d}z^2)+\rho^2\mathrm{d}\varphi^2]-f\mathrm{d}t^2.\tag{2.6.2}
$$

函数 f 和 r 只依赖于 ρ 和 z.

在所讨论的情况下, 四维势可写为 $A_\mu = A_3(\rho,z)$, 其余分量为零. 这样, 可将

(2.6.1) 改写为

$$f\Delta f = (\nabla f)^2 + \frac{2f^3}{\rho^2}(\nabla A_3)^2, \quad \nabla\left(\frac{f}{\rho^2}\nabla A_3\right) = 0, \tag{2.6.3}$$

$$\begin{aligned} 4\frac{\partial\gamma}{\partial\rho} &= \frac{\rho}{f^2}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial\rho}\right)^2 - \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\right] + \frac{4f}{\rho}\left[\left(\frac{\partial A_3}{\partial\rho}\right)^2 - \left(\frac{\partial A_3}{\partial z}\right)^2\right], \\ 2\frac{\partial\gamma}{\partial z} &= \frac{\rho}{f^2}\frac{\partial f}{\partial\rho}\frac{\partial f}{\partial z} + 4\frac{f}{\rho}\frac{\partial A_3}{\partial\rho}\frac{\partial A_3}{\partial z}, \end{aligned} \tag{2.6.4}$$

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \Delta \equiv \boldsymbol{P}_0\frac{\partial}{\partial\rho} + \boldsymbol{z}_0\frac{\partial}{\partial z}.$$

式中 $\boldsymbol{P}_0$ 和 $\boldsymbol{z}_0$ 是单位矢量.

从 (2.6.3) 的第二个方程可以看出, 由式

$$\frac{\partial A_3'}{\partial\rho} = -\frac{f}{\rho}\frac{\partial A_3}{\partial z}, \quad \frac{\partial A_3'}{\partial z} = \frac{f}{\rho}\frac{\partial A_3}{\partial\rho} \tag{2.6.5}$$

给出的 A_3' 也满足场方程. 将 A_3' 代入, (2.6.3) 和 (2.6.4) 改写为

$$f\Delta f = (\nabla f)^2 + 2f(\nabla A_3')^2, \quad f\Delta A_3'' = \nabla A_3' \cdot \nabla f, \tag{2.6.6}$$

$$\begin{aligned} \frac{4}{\rho}\frac{\partial\gamma}{\partial\rho} &= \frac{1}{f^2}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial\rho}\right)^2 - \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\right] + \frac{4}{f}\left[\left(\frac{\partial A_3'}{\partial z}\right)^2 - \left(\frac{\partial A_3'}{\partial\rho}\right)^2\right], \\ \frac{2}{\rho}\frac{\partial\gamma}{\partial z} &= \frac{1}{f^2}\frac{\partial f}{\partial\rho}\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{4}{f}\frac{\partial A_3'}{\partial\rho}\frac{\partial A_3'}{\partial z}. \end{aligned} \tag{2.6.7}$$

再引入两个函数 ε_1 和 ε_2

$$\varepsilon_1 = u + A_3', \quad \varepsilon_2 = u - A_3', \quad u\sqrt{f}, \tag{2.6.8}$$

可将静磁场方程写成对称形式

$$(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\Delta\varepsilon_1 = 2(\nabla\varepsilon_1)^2, \quad (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\Delta\varepsilon_2 = 2(\nabla\varepsilon_2)^2, \tag{2.6.9}$$

$$\begin{aligned} \frac{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)^2}{4\rho}\frac{\partial\gamma}{\partial\rho} &= \frac{\partial\varepsilon_1}{\partial\rho}\frac{\partial\varepsilon_2}{\partial\rho} - \frac{\partial\varepsilon_1}{\partial z}\frac{\partial\varepsilon_2}{\partial z}, \\ \frac{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)^2}{4\rho}\frac{\partial\gamma}{\partial z} &= \frac{\partial\varepsilon_1}{\partial\rho}\frac{\partial\varepsilon_2}{\partial z} + \frac{\partial\varepsilon_1}{\partial z}\frac{\partial\varepsilon_2}{\partial\rho}, \end{aligned} \tag{2.6.10}$$

我们发现, 如果 $(\tilde{\varepsilon}_1, \tilde{\varepsilon}_2)$ 是方程 (2.6.9~2.6.10) 的解, 则

$$\varepsilon_1 = \frac{-a + b\tilde{\varepsilon}_1}{c - \mathrm{d}\widetilde{\varepsilon}_1}, \quad \varepsilon_2 = \frac{a + b\widetilde{\varepsilon}_2}{c + \mathrm{d}\widetilde{\varepsilon}_2}, \tag{2.6.11}$$

也是方程 (2.6.9~2.6.10) 的解. 式中 a, b, c 和 d 都是任意的实常数.

令上式中 $c = 0, a = -2dc, b = -d$, 得到

$$\varepsilon_1 = -\frac{2c_0}{\underset{\sim}{\varepsilon}_1} + 1, \quad \varepsilon_2 = -\frac{2c_0}{\underset{\sim}{\varepsilon}_2} - 1, \tag{2.6.12}$$

这样, 我们得到一个生成解定理: 知道了场方程的一个解 $(\tilde{f}, \tilde{A}'_3)$, 便可构造一个新解

$$f = 4c_0^2 \tilde{f}(\tilde{A}'^2_3 - \tilde{f})^{-2}, \quad A'_3 = 1 - 2c_0 \tilde{A}'_3 (\tilde{A}'^2_3 - \tilde{f})^{-1}. \tag{2.6.13}$$

由 (2.6.10) 和 (2.6.12) 可知 $r = \tilde{r}$.

下面我们将获得一新的解簇.

把方程 (2.6.6) 改写为

$$f\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial\rho}\right) + \frac{\partial^2 f}{2z^2}\right] = \left(\frac{\partial f}{\partial\rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 + 2f\left[\left(\frac{\partial A'_3}{\partial\rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial A'_3}{\partial z}\right)^2\right],$$

$$f\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial A'_3}{\partial\rho}\right) + \frac{\partial^2 A'_3}{\partial z^2}\right] = \frac{\partial f}{\partial\rho}\frac{\partial A'_3}{\partial\rho} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial A'_3}{\partial z}. \tag{2.6.14}$$

引入两个函数 ψ 和 χ, 满足方程

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\rho} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial^2\chi}{\partial\rho^2} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial\chi}{\partial\rho} + \frac{\partial^2\chi}{\partial z^2} = 0, \tag{2.6.15}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\rho} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\chi}{\partial z}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial\chi}{\partial\rho}. \tag{2.6.16}$$

不难证明, 如果 $F(\psi)$ 是常微分方程

$$F\frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}\psi^2} = \left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\psi}\right)^2 + 2F \tag{2.6.17}$$

的解, 则

$$\tilde{A}'_3 = \chi, \quad \tilde{f} = \rho^2 F(\psi) \tag{2.6.18}$$

就是方程 (2.6.14) 的解.

解 (2.6.17), 得到

$$F(\psi) = \frac{1}{b_0}\left(\frac{\mathrm{e}^{\psi} + b_0\mathrm{e}^{-\psi}}{2}\right)^2, \quad b_0 = \mathrm{const}. \tag{2.6.19}$$

令 $b_0 = 1$, 即 $F = \mathrm{ch}^2\psi$, 与 (2.6.13) 对应的 (2.6.14) 的解可以写成

$$f = \frac{4c_0^2\rho^2\mathrm{ch}^2\psi}{(\chi^2 - \rho^2\mathrm{ch}^2\psi)^2}, \quad A'_3 = 1 - \frac{2c_0\chi}{\chi^2 - \rho^2\mathrm{ch}^2\psi}. \tag{2.6.20}$$

这时方程 (2.6.7) 可以改写为

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(2\gamma-2\ln\mathrm{ch}^2\psi-\ln\frac{\rho^2}{\kappa_0^2}\right)=-2\left[\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\chi}{\partial\rho}\right)^2-\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\chi}{\partial z}\right)^2\right],$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}\left(2\gamma-2\ln\mathrm{ch}^2\psi-\ln\frac{\rho^2}{\kappa_0^2}\right)=-\frac{4}{\rho^2}\frac{\partial\chi}{\partial\rho}\frac{\partial\chi}{\partial z}, \tag{2.6.21}$$

方程 (2.6.5) 可改写为

$$\frac{\partial}{\partial\rho}(2c_0A_3+\chi^2\mathrm{th}\psi)=\rho\frac{\partial\chi}{\partial z},$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(2c_0A_3+\chi^2\mathrm{th}\psi)=-\rho\frac{\partial\chi}{\partial\rho}+2\chi. \tag{2.6.22}$$

方程 (2.6.20~2.6.22) 确定了 E-M 场方程的新的解簇.

令

$$\rho=\kappa_0\sqrt{(x^2-1)(1-y^2)},\quad z=\kappa_0xy, \tag{2.6.23}$$

从 Weyl 坐标变至椭球坐标, 再变至 Schwarzschild 坐标, (2.6.20) 便退化为 Schwarzschild 解和 R-N 解. 由这一退化和解的渐近行为, 便可确定解中各参量的物理意义, 下面我们就来做这一工作.

将 (2.6.20~2.6.22) 变至椭球坐标, 我们有

$$\kappa_0\frac{\partial}{\partial\rho}\equiv\sqrt{(x^2-1)(1-y^2)}(x^2-y^2)^{-1}\left(x\frac{\partial}{\partial x}-y\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

$$\kappa_0\frac{\partial}{\partial z}\equiv(x^2-y^2)^{-1}\left[(x^2-1)y\frac{\partial}{\partial x}+(1-y^2)x\frac{\partial}{\partial y}\right]. \tag{2.6.24}$$

在坐标 (x,y) 中, 度规 (2.6.2) 具有形式

$$\mathrm{d}s^2=\kappa_0^2f^{-1}\left[\mathrm{e}^{2\gamma}(x^2-y^2)\left(\frac{\mathrm{d}x^2}{x^2-1}+\frac{\mathrm{d}y^2}{1-y^2}\right)+(x^2-1)(1-y^2)\mathrm{d}\varphi^2\right]-f\mathrm{d}t^2, \tag{2.6.25}$$

而解 (2.6.20) 和方程 (2.6.15~2.6.16) 具有形式

$$f=\frac{4c_0^2\kappa_0^2(x^2-1)(1-y^2)\mathrm{ch}^2\psi}{[\chi^2-\kappa_0^2(x^2-1)(1-y^2)\mathrm{ch}^2\psi]^2},$$

$$A_3'=1-\frac{2c_0\chi}{\chi^2-\kappa_0^2(x^2-1)(1-y^2)\mathrm{ch}^2\psi} \tag{2.6.26}$$

$$\frac{\partial}{\partial\chi}\left[(x^2-1)\frac{\partial\psi}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[(1-y^2)\frac{\partial\psi}{\partial y}\right]=0, \tag{2.6.27}$$

$$
\begin{aligned}
&(x^2-1)\frac{\partial^2\chi}{\partial x^2}+(1-y^2)\frac{\partial^2\chi}{\partial y^2}=0,\\
&k_0\frac{\partial\psi}{\partial x}=-\frac{1}{x^2-1}\frac{\partial\chi}{\partial y},\quad k_0\frac{\partial\psi}{\partial y}=\frac{1}{1-y^2}\frac{\partial\chi}{\partial x}.
\end{aligned}\tag{2.6.28}
$$

为了得到 Schwarzschild 解, 只要令

$$
\chi=\kappa_0(x+1),\quad \psi=\frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{1-y}.
$$

取 $c_0=k_0$, 由 (2.6.26) 得

$$
f=\frac{x-1}{x+1},\quad A_3'=0.
$$

变至 Schwarzschild 坐标

$$
x=(r-m_0)/k_0,\quad y=\cos\theta,
$$

再令 $k_0=m_0$, 得到

$$
f=1-\frac{2m_0}{r},\quad A_3'=0,\quad \mathrm{e}^{2r}=\frac{r^2-2m_0r}{r^2-2m_0r+m_0^2\sin^2\theta},
$$

此即 Schwarzschild 解.

所获得的解簇 (2.6.26) 可以把 Schwarzschild 解推广至场源含磁参量的情况.

(2.6.27) 中的函数 χ. 我们选取为

$$
\chi=\kappa_0(x+p_0+q_0y),\quad q_0=\mathrm{const},p_0=\mathrm{const},\tag{2.6.29}
$$

代入 (2.6.28), 得到 ψ 的表示式

$$
\psi=\frac{1}{2}\ln\left[\frac{1+y}{1-y}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{q_0}\right].\tag{2.6.30}
$$

这时有

$$
\mathrm{ch}^2\psi=\frac{M^2}{1-y^2},\quad M=\frac{1+y}{2}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{q_0/2}+\frac{1-y}{2}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{q_0/2};\tag{2.6.31}
$$

(2.6.8) 中的函数 ε_1 和 ε_2 具有形式

$$
\varepsilon_1=-\frac{2c_0}{u+\chi}+1,\quad \varepsilon_2=-\frac{2c_0}{u-\chi}-1,\tag{2.6.32}
$$

当 $c_0=m_0$ 时有

$$
\varepsilon_1=-\frac{2m_0}{k_0}\frac{1}{M\sqrt{x^2-1}+(x+p_0+q_0y)}+1,
$$

$$\varepsilon_2 = -\frac{2m_0}{k_0}\frac{1}{M\sqrt{x^2-1}-(x+p_0+q_0y)} - 1. \tag{2.6.33}$$

于是势

$$f = \left(\frac{2m_0u}{\chi^2-u^2}\right)^2, \quad A_3' = 1 - \frac{2m_0\chi}{\chi^2-u^2}$$

的表示式为

$$\begin{aligned} f &= \frac{4m_0^2(x^2-1)M^2}{k_0^2[(x+p_0+q_0y)^2-(x^2-1)M^2]^2}, \\ A_3' &= 1 - \frac{2m_0(x+p_0+q_0y)}{k_0[(x+p_0+q_0y)^2-(x^2-1)M^2]}. \end{aligned} \tag{2.6.34}$$

方程 (2.6.21) 在坐标 (x, y) 中具有如下形式:

$$\begin{aligned} k_0^2(x^2-y^2)\frac{\partial \Gamma}{\partial x} &= x\left(\frac{\partial\chi}{\partial x}\right)^2 - \frac{x(1-y^2)}{x^2-1}\left(\frac{\partial\chi}{\partial x}\right)^2 - 2y\frac{\partial\chi}{\partial x}\frac{\partial\chi}{\partial y}, \\ k_0^2(x^2-y^2)\frac{\partial \Gamma}{\partial y} &= \frac{y(x^2-1)}{1-y^2}\left(\frac{\partial\chi}{\partial x}\right)^2 - y\left(\frac{\partial\chi}{\partial y}\right)^2 + 2x\frac{\partial\chi}{\partial x}\frac{\partial\chi}{\partial y}, \end{aligned} \tag{2.6.35}$$

$$\Gamma = 2\ln\mathrm{ch}\psi + \frac{1}{2}\ln[(x^2-1)(1-y^2)] - \gamma.$$

积分上式, 得到

$$(x+y)^{(1+q_0)^2}(x-y)^{(1-q_0)^2}\mathrm{e}^{2\gamma} = M^4(x^2-1)^{1+q_0^2}. \tag{2.6.36}$$

把方程 (2.6.22) 变至椭球坐标系, 得到

$$\begin{aligned} 2m_0\frac{\partial A_3}{\partial x} &= -\frac{1}{k_0}\frac{\partial}{\partial x}(\chi^2\mathrm{th}\psi) + 2y\chi + (1-y^2)\frac{\partial\chi}{\partial y}, \\ 2m_0\frac{\partial A_3}{\partial y} &= -\frac{1}{k_0}\frac{\partial}{\partial y}(\chi^2\mathrm{th}\psi) + 2x\chi - (x^2-1)\frac{\partial\chi}{\partial x}. \end{aligned} \tag{2.6.37}$$

在我们讨论的情况下,

$$\chi = k_0(x+p_0+q_0y), \quad \mathrm{th}\psi = 2\left[1+\frac{1-y}{1+y}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{q_0}\right]^{-1} - 1.$$

积分 (2.6.37), 得到

$$\begin{aligned} \frac{2m_0}{k_0^2}A_3 = &-(x+p_0+q_0y)^2\mathrm{th}\psi + y(x^2+1) \\ &+ q_0x(y^2+1) + 2p_0xy + D_0. \end{aligned} \tag{2.6.38}$$

式中 D_0 是积分常数.

令

$$D_0 = 2q_0p_0, \quad p_0^2 + q_0^2 = 1, \quad k_0 = m_0(1-q_0^2)^{-1/2},$$
$$\sigma_0 = q_0m_0(1-q_0^2)^{-1/2},$$

变回 Schwarzschild 坐标

$$x = \frac{r-m_0}{k_0}, \quad y = \cos\theta,$$

便最后得到度规 (2.6.2) 和势 A_3 的具体形式

$$ds^2 = f^{-1}M^4N(dr^2 + Kd\theta^2) + f^{-1}K\sin^2\theta d\varphi^2 - fdt^2, \tag{2.6.39}$$

$$f = 4m_0^2KM^2[(r+\sigma_0\cos\theta)^2 - (r^2+2m_0r-\sigma_0^2)M^2]^{-2} \tag{2.6.40}$$

$$m_0A_3 = (\cos\theta - \text{th}\psi)(r+\sigma_0\cos\theta)^2 + \sigma_0(r+\sigma_0\cos\theta+m_0)\sin^2\theta. \tag{2.6.41}$$

式中

$$K = r^2 - 2m_0r - q_0^2m_0^2(1-q_0^2)^{-1},$$
$$M = \sin^2\frac{\theta}{2}\left[\frac{\sqrt{1-q_0^2}(r-m_0)-m_0}{\sqrt{1-q_0^2}(r-m_0)+m_0}\right]^{q_0/2}$$
$$+\cos^2\frac{\theta}{2}\left[\frac{\sqrt{1-q_0^2}(r-m_0)+m_0}{\sqrt{1-q_0^2}(r-m_0)-m_0}\right]^{q0/2}$$
$$N = \left[\frac{(1-q_0^2)K}{(1-q_0^2)K+m_0^2\sin^2\theta}\right]^{q_0^2}$$
$$\left[\frac{\sqrt{1-q_0^2}(r-m_0)-m_0\cos\theta}{\sqrt{1-q_0^2}(r-m_0)+m_0\cos\theta}\right]^{2q0}$$

我们发现, 当 $q_0 = 0$ 时, 度规 (2.6.39) 退化为 Schwarzschild 度规. 由渐近行为

$$f^{-1}M^4N \to \left(1+\frac{2m_0}{r}\right), \quad f^{-1}KM^4N \to r^2$$

可知, 当 $r \to \infty$ 时, 我们获得的度规趋近于 Schwarzschild 度规

$$ds^2 \approx \left(1+\frac{2m_0}{r}\right)dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2 - \left(1-\frac{2m_0}{r}\right)dt^2.$$

由此可知, 度规 (2.6.39) 是渐近平直的, 参量 m_0 应即为引力源的引力质量. 由函数 A_3 的渐近行为

$$A_3 \to -\frac{2}{3}m_0\sigma_0\frac{1}{2}\sin^2\theta$$

可知, 量

$$\sigma_0 = q_0 m_0 \sqrt{1 - q_0^2}$$

应该是单位源质量的磁矩.

我们获得的解描述具有磁荷和磁矩的中心质量的 Einstein-maxwell 场.

第3章　生成解定理

3.1　引　　言

广义相对论的发展在很大程度上取决于爱因斯坦场方程的严格解和它们的物理解释. 专家们一方面在寻求场方程的新的严格解, 另一方面尽量寻找一些变换, 从一个已知解生成一个新解.

由 Ernst 和 Kinnersley 等给出的定理, 成功地从场方程的一个辐射对称真空解生成一个新解, 因而使人们对辐射对称真空场方程的解特别感兴趣. 当然, 人们对这类场感兴趣的另一个重要原因是它们在天体物理方面具有重要意义. 本章将讨论 Ernst 等的生成技术, 给出场方程的另外一些解.

前面我们曾讨论过具有辐射对称性的静态度规 (Weyl 和 Levi-Civita 解), 将这些度规进行自然推广, 可以得到具有辐射对称性的稳态度规. Lewis 和 Van Stockum 给出了一个这样的稳态度规, 但是不满足渐近平直条件. Kerr 度规满足渐近条件. 在第 1 章中用复延拓方法得到了这一度规 (1.14 节), 又由直接解引力场方程的方法得到了这一度规 (1.15 节). 本章将用 Ernst 方法和孤立子方法给出它的解析推导.

在本章中, 除了讨论 Ernst 的生成技术以外, 还讨论 Kinnersley、Chandrasekhar 和 Eh lers 的生成技术以及参量变换技术, 最后还将较详细地讨论孤立子方法, 并用这些技术和方法获得一些新的严格解, 其中包括著名的 Kerr 解和 Tomimatsu-Sato 解.

3.2　轴对称度规

如果拉格朗日密度不含时间坐标 t 和方位坐标 φ, 则这一稳定系统具有辐射对称性. 在经典场论中这包含角动量守恒定律: $J = \partial\mathscr{L}/\partial\varphi$ 对于坐标变换

$$t' = -t, \quad \varphi' = -\varphi \tag{3.2.1}$$

是不变量. 因此, 所寻求的线元应不含有项 $\mathrm{d}x^1\mathrm{d}\varphi, \mathrm{d}x^2\mathrm{d}\varphi, \mathrm{d}t\mathrm{d}x^1$ 和 $\mathrm{d}t\mathrm{d}x^2$. 这样的线元可以写为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2 =& g_{00}\mathrm{d}t^2 + g_{11}\mathrm{d}{x^1}^2 + g_{22}\mathrm{d}{x^2}^2 + g_{33}\mathrm{d}{x^3}^2 \\ &+ g_{03}\mathrm{d}t\mathrm{d}\varphi + 2g_{12}\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2.\end{aligned} \tag{3.2.2}$$

式中度规张量的各分量均不依赖于 t 和 φ, 且 x^1 和 x^2 是两个渐近类空坐标. 由于 Weyl 张量在二维空间中恒等于零 (见 F.9), 所以面

$$\mathrm{d}s_{11}^2 = g_{11}\mathrm{d}x^{1^2} + 2g_{12}\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2 + g_{22}\mathrm{d}x^{2^2} \tag{3.2.3}$$

是共形平直的. 和静态的情况一样, 存在变换

$$\begin{aligned} x'^1 &= x'^1(x^1, x^2), \\ x'^2 &= x'^2(x^1, x^2), \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

使线元 (3.2.3) 变为对角形式

$$\mathrm{d}s_{11}^2 = -\mathrm{e}^{\mu}(\mathrm{d}x'^{1^2} + \mathrm{d}x'^{2^2}). \tag{3.2.5}$$

式中 $\mu = \mu(x'^1, x'^2)$. 这一变换不影响 t 和 φ 分量. 去掉撇号, (3.2.2) 成为

$$\mathrm{d}s^2 = g_{00}\mathrm{d}t^2 + 2g_{03}\mathrm{d}t\mathrm{d}\varphi - \mathrm{e}^{\mu}(\mathrm{d}x^{1^2} + \mathrm{d}x^{2^2}) + g_{33}\mathrm{d}\varphi^2. \tag{3.2.6}$$

(3.2.6) 是最一般的辐射对称稳态度规. 当 $g_{03} = 0$ 时上式退化为静态度规.

我们将 (3.2.6) 写成形式

$$\mathrm{d}s^2 = V\mathrm{d}t^2 - 2W\mathrm{d}t\mathrm{d}\varphi - \mathrm{e}^{\mu}\mathrm{d}x^{1^2} - \mathrm{e}^{\mu}\mathrm{d}x^{2^2} - X\mathrm{d}\varphi^2. \tag{3.2.7}$$

式中 V, W 和 X 只是 x^1 和 x^2 的函数.

由 (3.2.7) 可得

$$\begin{aligned} \sqrt{-g} &= \rho\mathrm{e}^{\mu}, \\ \rho &\equiv VX + W^2. \end{aligned} \tag{3.2.8}$$

注意到

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2} = \rho^{-2}X\frac{\partial^2}{\partial t^2} - 2\rho^{-2}W\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial\varphi} - e^{-\mu}\frac{\partial^2}{\partial x^{1^2}} - e^{-\mu}\frac{\partial^2}{\partial x^{2^2}} - \rho^{-2}V\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}, \tag{3.2.9}$$

可以得到 $g^{\mu\nu}$ 的表达式, 从而可写出 $\Gamma^{\mu}_{\nu\sigma}$ 和 $R_{\mu\nu}$ 的表达式. 代入场方程 $R_{\mu\nu} = 0$, 得到所寻求的关于 V, W 和 X 的真空引力场方程

$$2\rho_{,11} + (\rho_{,1}\mu_{,1} - \rho_{,2}\mu_{,2}) + \frac{1}{2\rho}[(V_{,1}X_{,1} + W_{,1}^2) - (V_{,2}X_{,2} + W_{,2}^2)] = 0, \tag{3.2.10}$$

$$-2\rho_{,22} + (\rho_{,1}\mu_{,1} - \rho_{,2}\mu_{,2}) + \frac{1}{2\rho}[(V_{,1}X_{,1} + W_{,1}^2) - (V_{,2}X_{,2} + W_{,2}^2)] = 0, \tag{3.2.11}$$

$$(\rho^{-1}V_{,i})_{,i}+\frac{V}{2\rho}[\rho^{-2}(V_{,i}X_{,i}+W_{,i}W_{,i})+2\nabla^2\mu]=0, \tag{3.2.12}$$

$$(\rho^{-1}X_{,i})_{,i}+\frac{X}{2\rho}[\rho^{-2}(V_{,i}X_{,i}+W_{,i}W_{,i})+2\nabla^2\mu]=0, \tag{3.2.13}$$

$$(\rho^{-1}W_{,i})_{,i}+\frac{W}{2\rho}[\rho^{-2}(V_{,i}X_{,i}+W_{,i}W_{,i})+2\nabla^2\mu]=0, \tag{3.2.14}$$

式中脚标 $i=1,2$; 两个脚标重复表示取和; ∇^2 是二维拉普拉斯算符

$$\nabla^2\equiv\frac{\partial^2}{\partial x^{1^2}}+\frac{\partial^2}{\partial x^{2^2}}.$$

由 (3.2.10) 减去 (3.2.11), 得到

$$\nabla^2\rho=0, \tag{3.2.15}$$

即 ρ 为调和函数. 为了简化场方程, 引入典型的柱坐标 (ρ,z), 令

$$x^1=\rho,\quad x^2=z. \tag{3.2.16}$$

式中 ρ 是方程 (3.2.15) 的一个任意解. 上式使方程 (3.2.10) 和 (3.2.11) 成为全同方程. 将 (3.2.16) 代入 (3.2.10), 得到

$$\mu_{,1}=-\frac{1}{2\rho}[(V_{,1}X_{,1}+W_{,1}^2)-(V_{,2}X_{,2}+W_{,2}^2)]. \tag{3.2.17}$$

用 V 乘 (3.2.13), 用 W 乘 (3.2.14), 然后相加, 得到

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\rho}\rho_{,1}^2\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho}\rho_{,2}^2\right)-\frac{1}{\rho}(V_{,i}X_{,i}+W_{;i}W_{,i})+2\rho\nabla^2\mu=0.$$

上式左端前两项显然为零, 故有

$$\nabla^2\mu=\frac{1}{2\rho^2}(V_{,i}X_{,i}+W_{,i}W_{,i}) \tag{3.2.18}$$

将上式代入 (3.2.12)~(3.2.14) 消去 μ, 得到

$$V_{;ii}-\rho^{-1}V_{,1}=-\rho^{-2}V(V_{,i}X_{;i}+W_{,i}W_{,i}), \tag{3.2.19}$$

$$X_{,ii}-\rho^{-1}X_{;1}=-\rho^{-2}X(V_{,i}X_{;i}+W_{,i}W_{,i}), \tag{3.2.20}$$

$$W_{,ii}-\rho^{-1}W_{,1}=-\rho^{-2}W(V_{,i}X_{;i}+W_{,i}W_{,i}). \tag{3.2.21}$$

将 (3.2.17) 代入 (3.2.18), 考虑到 (3.2.19)~(3.2.21), 得到

$$\mu_{,22}=-\frac{1}{2\rho}(X_{,1}V_{,22}+X_{;12}V_{,2}+X_{,22}V_{,1}+X_{,2}V_{,12}+2W_{,1}W_{,22}+2W_{,12}W_{,2}), \tag{3.2.22}$$

积分得

$$\mu_{,2} = -\frac{1}{\rho}(V_{,1}X_{,2} + V_{,2}X_{,1} + 2W_{;1}W_{,2}). \tag{3.2.23}$$

由 (3.2.23) 和 (3.2.17) 可确定 μ, 积分常数由渐近平直条件确定.

考虑到 (3.2.8), 可用两个函数 f 和 ω 代替 V, X 和 W

$$\begin{aligned} V &= f, \\ V &= \omega f, \\ X &= f^{-1}\rho^2 - \omega^2 f, \end{aligned} \tag{3.2.24}$$

代入 (3.2.7) 得到线元的表达式

$$\mathrm{d}s^2 = f(\mathrm{d}t - \omega \mathrm{d}\varphi)^2 - f^{-1}[\mathrm{e}^{2\gamma}(\mathrm{d}\rho^2 + \mathrm{d}z^2) + \rho^2 \mathrm{d}\varphi^2], \tag{3.2.25}$$

$$f^{-1}\mathrm{e}^{2\gamma} = \mathrm{e}^{\mu}. \tag{3.2.26}$$

线元 (3.2.25) 称为巴巴别特鲁 (Papapetrou) 度规.

将 (3.2.24) 代入 (3.2.10)~(3.2.14), 得到场方程

$$\begin{aligned} \gamma_{,1} =& \frac{1}{4\rho}[f^{-2}\rho^2(f_{,1}^2 - f_{;2}^2) - 2\omega(\omega_{,1}f_{,1} - \omega_{,2}f_{,2}) \\ &- (\omega_{,1}f + \omega f_{,1})^2 + (\omega_{,2}f + \omega f_{,2})^2], \end{aligned} \tag{3.2.27}$$

$$\gamma_{,2} = \frac{1}{2\rho}[\rho^2 f^{-2} f_{,2}f_{,1} + \omega(\omega_{,2}f_{,1} - \omega_{,1}f_{,2}) - (\omega_{,1}f + \omega f_{,1})(\omega_{,2}f + \omega f_{,2})], \tag{3.2.28}$$

$$f\left(f_{,11} + f_{,22} + \frac{f_{,1}}{\rho}\right) = (f_{,1}^2 + f_{,2}^2) + f^4\rho^{-2}(\omega_{,1}^2 + \omega_{,2}^2), \tag{3.2.29}$$

$$f^2\left(\omega_{,11} + \omega_{,22} - \frac{\omega_{,1}}{\rho}\right) + 2f(f_{,1}\omega_{,1} + f_{,2}\omega_{,2}) = 0. \tag{3.2.30}$$

由最后两个方程得到启发, 我们可以引入和平直空间中算符 ∇ 形式相同的算符

$$\begin{aligned} \nabla &= \hat{\boldsymbol{\rho}}\frac{\partial}{\partial\rho} + \hat{\boldsymbol{z}}\frac{\partial}{\partial z}, \\ \nabla^2 &= \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}, \\ \nabla\cdot\boldsymbol{A} &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\rho) + \frac{\partial A}{\partial z}. \end{aligned}$$

从而将 (3.2.29) 和 (3.2.30) 表示为

$$f\nabla^2 f = \nabla f\cdot\nabla f + \rho^{-2}f^4\nabla\omega\cdot\nabla\omega, \tag{3.2.31}$$

$$\nabla\cdot(\rho^{-2}f^2\nabla\omega) = 0. \tag{3.2.32}$$

解这两个方程, 确定函数 f 和 ω, 代入前两个方程 (3.2.27) 和 (3.2.28) 中的任意一个, 便可求出 γ, 从而获得场方程的解 (3.2.25).

3.3 Ernst 方程

场方程 (3.2.32) 表明存在一个矢势 A, 它满足

$$\rho^{-2} f^2 \nabla\omega = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{A}. \tag{3.3.1}$$

由于 $\nabla\omega$ 垂直于半径方向 $\hat{\boldsymbol{n}}$, 于是有

$$(\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \hat{\boldsymbol{n}} = 0. \tag{3.3.2}$$

$$\frac{\partial A_z}{\partial \rho} = \frac{\partial A_\rho}{\partial z}, \tag{3.3.3}$$

此式表明存在一函数 $F(\rho, x, \varphi)$

$$A_0 = \frac{\partial F}{\partial \rho},$$
$$A_z = \frac{\partial F}{\partial z}.$$

令 $\Psi = \dfrac{\partial F}{\partial \phi} - \rho A_\phi$, 我们得到

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \frac{1}{\rho}\left(\hat{\boldsymbol{\rho}}\frac{\partial \Psi}{\partial z} - \hat{\boldsymbol{z}}\frac{\partial \Psi}{\partial \rho}\right). \tag{3.3.4}$$

将上式代入 (3.3.1) 得

$$\nabla\omega = \rho f^{-2} \hat{\boldsymbol{n}} \times \nabla\Psi. \tag{3.3.5}$$

Ψ 称为扭 (twist) 势. 为了得到 Ψ 满足的方程, 作矢量积 $\hat{\boldsymbol{n}}\times$(3.3.5), 得到

$$\rho^{-1} f^{-2} \hat{\boldsymbol{n}} \times \nabla\omega = -\nabla\Psi. \tag{3.3.6}$$

注意到 $\nabla \cdot (\rho^{-1}\hat{\boldsymbol{n}} \times \nabla\omega) = 0$, 可得

$$\nabla \cdot (f^{-2}\nabla\Psi) = 0, \tag{3.3.7}$$

此即势 Ψ 满足的方程.

引入复势

$$\mathscr{E} = f + \mathrm{i}\Psi, \tag{3.3.8a}$$

可将场方程 (3.2.31) 和 (3.2.32) 合写为一个复方程

$$(R_e\mathscr{E})\nabla^2\mathscr{E} = \nabla\mathscr{E} \cdot \nabla\mathscr{E}. \tag{3.3.9}$$

现在我们证明此方程与 (3.2.31)~(3.2.32) 等价. 将方程 (3.3.5) 代入 (3.2.31), 得到

$$f\nabla^2 f = \nabla f \cdot \nabla f - \nabla\Psi \cdot \nabla\Psi.$$

由 $\mathscr{E}$ 的定义式可知, 上式即

$$f\nabla^2 f + 2\mathrm{i}\nabla\Psi\cdot\nabla f = \nabla\mathscr{E}\cdot\nabla\mathscr{E}.$$

将 (3.3.7) 展开后代入上式, 便得到 (3.3.9).

引入新的复势 ζ

$$\mathscr{E} = \frac{\zeta-1}{\zeta+1}, \tag{3.3.8b}$$

方程 (3.3.9) 可改写为 ζ 的方程

$$(\zeta\zeta^*-1)\nabla^2\zeta = 2\zeta^*\nabla\xi\cdot\nabla\zeta. \tag{3.3.10}$$

式中 ζ^* 为 ζ 的复共轭. 此方程称为**恩斯特方程**.

由 (3.3.8)、(3.3.6)、(3.2.31) 和 (3.2.32), 可以确定度规函数 f,ω 和 γ 与复势 ζ 的关系

$$f = \mathrm{Re}\frac{\zeta-1}{\zeta+1}, \tag{3.3.11}$$

$$\nabla\omega = \frac{2\rho}{(\zeta^*\zeta-1)^2}\mathrm{Im}[(\zeta^*-1)^2\hat{\boldsymbol{n}}\times\nabla\zeta], \tag{3.3.12}$$

$$\frac{\partial\gamma}{\partial\rho} = \frac{\rho}{(\zeta^{\bar{a}}\zeta-1)^2}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\rho}\frac{\partial\zeta^*}{\partial\rho} - \frac{\partial\zeta}{\partial z}\frac{\partial\zeta^*}{\partial z}\right), \tag{3.3.13}$$

$$\frac{\partial\gamma}{\partial z} = \frac{2\rho}{(\zeta^{\bar{a}}\zeta-1)^2}\mathrm{Re}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\rho}\frac{\partial\zeta^*}{\partial z}\right). \tag{3.3.14}$$

为了解方程的方便, 我们将方程 (3.3.11)~(3.3.14) 变换到椭球坐标系中. 作变换

$$\rho = k(x^2-1)^{1/2}(1-y^2)^{1/2}, \tag{3.3.15}$$

$$z = kxy,$$

或者

$$x = \frac{1}{2k}\{[(z+k)^2+\rho^2]^{1/2} + [(z-k)^2+\rho^2]^{1/2}\},$$
$$y = \frac{1}{2k}\{[(z+k)^2+\rho^2]^{1/2} - [(z-k)^2+\rho^2]^{1/2}\}. \tag{3.3.16}$$

式中 k 为任意常数. 在椭球坐标系中, 算符 ∇ 和 ∇^2 表示为

$$\nabla = \frac{k}{(x^2-y^2)^{1/2}}\left[\hat{\boldsymbol{x}}(x^2-1)^{1/2}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\boldsymbol{y}}(1-y^2)^{1/2}\frac{\partial}{\partial y}\right],$$
$$\nabla^2 = \frac{k^2}{x^2-y^2}\left[\frac{\partial}{\partial x}(x^2-1)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}(1-y^2)\frac{\partial}{\partial y}\right]. \tag{3.3.17}$$

方程 (3.3.13) 和 (3.3.14) 表示为

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\gamma}{\partial x} =& \frac{1-y^2}{(\zeta\zeta^*-1)^2(x^2-y^2)}\left[x(x^2-1)\frac{\partial\zeta}{\partial x}\frac{\partial\zeta^*}{\partial x} - x(1-y^2)\right.\\
&\left.\times\frac{\partial\zeta}{\partial y}\frac{\partial\zeta^*}{\partial y} - y(x^2-1)\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\frac{\partial\zeta^*}{\partial y}+\frac{\partial\zeta}{\partial y}\frac{\partial\zeta^*}{\partial x}\right)\right],\\
\frac{\partial\gamma}{\partial y} =& \frac{x^2-1}{(\zeta\zeta^*-1)^2(x^2-y^2)}\left[y(x^2-1)\frac{\partial\zeta}{\partial x}\frac{\partial\zeta^*}{\partial x} - y(1-y^2)\right.\\
&\left.\times\frac{\partial\zeta}{\partial y}\frac{\partial\zeta^*}{\partial y} - x(1-y^2)\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\frac{\partial\zeta^*}{\partial y}+\frac{\partial\zeta}{\partial y}\frac{\partial\zeta^*}{\partial x}\right)\right],
\end{aligned}
\tag{3.3.18}
$$

当 $\dfrac{\partial\zeta}{\partial x}$ 是纯实数,$\dfrac{\partial\zeta}{\partial y}$ 是纯虚数时, 令 $\zeta=\dfrac{u+\mathrm{i}v}{m+\mathrm{i}n}, A=u^2+v^2-m^2-n^2$, 得到

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\gamma}{\partial x} =& \frac{x(1-y^2)}{A^2(x^2-y^2)}\left[(x^2-1)\left(\frac{\partial u}{\partial x}m-\frac{\partial v}{\partial x}n-y\frac{\partial m}{\partial x}+v\frac{\partial n}{\partial x}\right)^2\right.\\
&\left.-(1-y^2)\left(\frac{\partial u}{\partial y}n-\frac{\partial v}{\partial y}m-u\frac{\partial n}{\partial y}-v\frac{\partial m}{\partial y}\right)^2\right],
\end{aligned}
\tag{3.3.19}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\gamma}{\partial y} =& \frac{y(x^2-1)}{A^2(x^2-y^2)}\left[(x^2-1)\left(\frac{\partial u}{\partial x}m-\frac{\partial v}{\partial x}n-u\frac{\partial m}{\partial x}+v\frac{\partial n}{\partial x}\right)^2\right.\\
&\left.-(1-y^2)\left(\frac{\partial u}{\partial y}n+\frac{\partial v}{\partial y}m-u\frac{\partial n}{\partial y}-v\frac{\partial m}{\partial y}\right)^2\right].
\end{aligned}
\tag{3.3.20}
$$

上二式直接积分, 得到

$$
\mathrm{e}^{2\gamma}=C\frac{A}{(x^2-y^2)^a}. \tag{3.3.21}
$$

式中 C 为积分常数. C 和 α 由边界条件 ($x\to\infty$ 时 $\mathrm{e}^{2\gamma}\to1$) 确定.

上面诸方程在以后的讨论中经常要用到.

下面讨论恩斯特方程的常相解. 引入代换

$$
\zeta=-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\coth\psi,\quad \psi\in\mathbf{R}, \tag{3.3.22}
$$

代入恩斯特方程, 可以得到

$$
\nabla^2\psi=0. \tag{3.3.23}
$$

我们设法求得 ψ, 便得到了势 ζ 和 $\mathscr{E}$, 进而得到度规函数 f,ω 和 γ.

取椭球坐标, 用分离变量法解 (3.3.23). 令 $\psi(x,y)=X(x)Y(y)$, 方程 (3.3.23) 分解为两个勒让德 (Legendre) 方程, 一般解表示为

$$
\psi=\sum_{l=0}^{\infty}[\alpha_lP_l(x)+b_lQ_l(x)][c_lP_l(y)+d_lQ_l(y)]. \tag{3.3.24}
$$

式中

$$P(x)=\frac{1}{2^l l!}\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}(x^2-1)^l,$$

$$Q_l(y)=\frac{1}{2^l l!}\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}y^l}\left[(y^2-1)^l\ln\frac{y+1}{y-1}\right]-\frac{1}{2}P_l(y)\ln\frac{y+1}{y-1}; \tag{3.3.25}$$

当 $x\to\infty$ 时有

$$P_t(x)\approx x^l,\quad Q_l(y)\approx 0. \tag{3.3.26}$$

沿对称轴应有 $\psi(x,+y)=\psi(x,-y)$, 所以 (3.3.24) 中的常数 $d_l=0$. 在无限远处, 对于任意的 y, 应有 $\zeta|_{x\to\infty}=\infty$, 因而 $\psi\to 0$, 所以 $\alpha_l=0$. 于是 (3.3.24) 成为

$$\psi=\sum_{l=1}^{\infty}b_l Q_l(x)P(y). \tag{3.3.27}$$

代入 (3.3.22) 得到常相解. 现在由渐近平直条件得到 $\alpha=0$, 即 ζ 为实数. 设 $\psi=-\coth\psi$, 则有 $\zeta=\psi\cos\alpha+\mathrm{i}\psi\sin\alpha$. 代入 (3.3.11) 得

$$f=1-\frac{2(\psi\cos\alpha+1)}{\psi^2+2\psi\cos\alpha+1}.$$

由渐近平直条件和场源质量不为零的要求, 线元中项 $f\mathrm{d}t^2$ 应与 Schwarzschild 线元中对应项 $\left(-\frac{2m}{r}\right)$ 有同样渐近行为, 所以, 当 $x\to\infty$ 时应有 $\Psi\approx r$(此处 r 为球坐标). 又由 (3.3.12) 得到

$$\nabla\omega=\frac{2r}{(\Psi^2-1)^2}(-\Psi^2+\Psi\cos\alpha+1)\sin\alpha(\hat{\boldsymbol{n}}\times\nabla\Psi).$$

代入 $\Psi\approx r$, 得 $\nabla\omega\approx-2r^{-1}\sin\alpha$, 从而有 $\omega\approx-2\sin\alpha\ln r$. 由 (3.2.25) 可知, 渐近平直条件要求 $\omega\approx 0$, 所以有 $\alpha\approx 0$.

我们讨论一个极简单的解, 即 (3.3.27) 中 $l=0$ 项对应的解:

$$\psi=\frac{1}{2}\delta\ln\frac{x+1}{x-1}. \tag{3.3.28}$$

式中 $\delta\equiv b_0$. 由此得

$$\zeta=\frac{(x+1)^\delta+(x-1)^\delta}{(x+1)^\delta-(x-1)^\delta}. \tag{3.3.29}$$

代回 (3.3.11), 得到

$$f=\frac{(x-1)^\delta}{(x+1)^\delta}. \tag{3.3.30}$$

由 (3.3.18) 得

$$\mathrm{e}^{2\gamma}=\frac{(x^2-1)^\delta}{(x^2-y^2)^\delta}. \tag{3.3.31}$$

ζ 为实数, 由 (3.3.12) 知

$$\omega = 0. \tag{3.3.32}$$

采用椭球坐标常常是比较方便的. 巴巴别特鲁度规 (3.2.25) 在椭球坐标中具有形式

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 =& f(\mathrm{d}t - \omega \mathrm{d}\varphi)^2 - k^2 f^{-1}\left[\mathrm{e}^{2\gamma}(x^2 - y^2)\left(\frac{\mathrm{d}x^2}{x^2 - 1}\right.\right. \\ & \left.\left. + \frac{\mathrm{d}y^2}{1 - y^2}\right) + (x^2 - 1)(1 - y^2)\mathrm{d}\varphi^2\right]. \end{aligned} \tag{3.3.33}$$

由于 Schwarzschild 度规是辐射对称的, 所以必存在 $\{f, \omega, \gamma\}$ 的一组解, 使之由 (3.3.33) 可以变到 Schwarzschild 度规

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)\mathrm{d}t^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2 - r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\varphi^2). \tag{3.3.34}$$

我们来寻找这一变换

$$x = x(r), \quad y = y(\theta). \tag{3.3.35}$$

由于方位坐标和时间坐标不变, 必有 $g'_{00} = g_{00}, g'_{33} = g_{33}, g'_{03} = g_{03}$, 因此

$$f = 1 - \frac{2m}{r}, \tag{3.3.36}$$

$$k^2 f^{-1}(x^2 - 1)(1 - y^2) = r^2 \sin^2\theta, \tag{3.3.37}$$

$$\omega = 0.$$

由此得

$$(x^2 - 1)(1 - y^2) = \frac{1}{k^2}\left(1 - \frac{2m}{r}\right) r^2 \sin^2\theta.$$

根据 $x = x(r)$ 和 $y = y(\theta)$, 得到 $y = \cos\theta$. 从而有 $k^2(x^2 - 1) = r^2 - 2mr$, 故知 $x = \dfrac{r}{m} - 1 (k = m)$. 变换的具体形式是

$$\begin{aligned} x &= \frac{r}{m} - 1, \\ y &= \cos\theta. \end{aligned} \tag{3.3.38}$$

由 (3.3.36) 和 (3.3.38) 知

$$f = \frac{x - 1}{x + 1}. \tag{3.3.39}$$

(3.3.38) 就是由椭球坐标到球坐标的变换.

3.4 Curzon 解

在柱坐标系中解方程 (3.3.23), 可得到一个特别简单的解:

$$\psi = m(\rho^2 + z^2)^{-1/2}. \tag{3.4.1}$$

式中 m 为一常数. 可以证明, 这个解可以写成 (3.3.24) 的形式. 将上式代入 (3.3.22) 和 (3.3.11) 可求得

$$f = \exp[-2m(\rho^2 + z^2)^{-1/2}]. \tag{3.4.2}$$

代入 (3.2.27) 和 (3.2.28), 积分得

$$\gamma = -\frac{m^2}{2}\frac{\rho^2}{(\rho^2 + z^2)^2}. \tag{3.4.3}$$

由于 $(\rho^2 + z^2)^{1/2} = r$, 我们可以由 $r \to \infty$ 时 f 的渐近形式与 Schwarzschild 解比较确定常数 m 的意义. 当 $r \to \infty$ 时将这里 f 的表达式展开并与 Schwarzschild 度规中的 $g_{00} = 1 - \dfrac{2m}{r}$ 比较, 可知 m 即为源质量. 于是得到一度规

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2 =& \exp\left[-\frac{2m}{(\rho^2 + z^2)^{1/2}}\right]\mathrm{d}t^2 - \exp\left[\frac{2m}{(\rho^2 + z^2)^{1/2}}\right] \\ &\times\left\{\exp\left[-\frac{m^2\rho^2}{(\rho^2 + z^2)^2}\right](\mathrm{d}\rho^2 + \mathrm{d}z^2) + \rho^2\mathrm{d}\varphi^2\right\}.\end{aligned} \tag{3.4.4}$$

这一度规称为 Curzon 度规.

变换到球坐标系, 由 (3.3.39) 有

$$\begin{aligned}\rho &= (r^2 - 2mr)^{1/2}\sin\theta, \\ z &= (r - m)\cos\theta.\end{aligned} \tag{3.4.5}$$

于是得到球坐标系中的 Curzon 度规:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2 =& \exp\left[-\frac{2m}{(r^2 - 2mr + m^2\cos^2\theta)^{1/2}}\right]\mathrm{d}t^2 \\ &- \exp\left[\frac{2m}{(r^2 - 2mr + m^2\cos^2\theta)^{1/2}}\right] \\ &\{\exp\left[-\frac{m^2(r^2 - 2mr)\sin^2\theta}{2(r^2 - 2mr + m^2\cos^2\theta)^2}\right] \times (r^2 - 2mr) \\ &+ (m^2\sin^2\theta)\left(\frac{\mathrm{d}r^2}{r^2 - 2mr} + \mathrm{d}\theta^2\right) + (r^2 - 2mr)\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2\}.\end{aligned} \tag{3.4.6}$$

3.5 由 Ernst 方程直接得到的几个解

恩斯特方程的一个重要优点是用标准解析方法导出 Kerr 度规. 恩斯特发现, 线性组合

$$\zeta = px - \mathrm{i}qy, \tag{3.5.1}$$

$$p^2 + q^2 = 1. \tag{3.5.2}$$

是恩斯特方程 (3.3.10) 的一个严格解, 变到 Bayer-Lindquist 坐标后恰是通常的 Kerr 度规.

由方程 (3.3.11),(3.3.12),(3.3.21) 和 (3.5.1) 得到

$$f=\frac{p^2x^2+q^2y^2-1}{(px+1)^2+q^2y^2}, \tag{3.5.3}$$

$$\omega=\frac{2q(1-y^2)(px+1)}{p^2x^2+q^2y^2-1}, \tag{3.5.4}$$

$$\mathrm{e}^{2\gamma}=\frac{p^2x^2+q^2y^2-1}{p^2(x^2-y^2)}. \tag{3.5.5}$$

从而得到度规

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2=&k^2\left\{\frac{p^2x^2+q^2y^2-1}{(px+1)^2+q^2y^2}\left[\mathrm{d}t-\frac{2q(1-y^2)(px+1)}{p^2x^2+q^2y^2-1}\mathrm{d}\varphi\right]^2\right.\\&-\frac{(px+1)^2+q^2y^2}{p^2}\left(\frac{\mathrm{d}x^2}{x^2-1}+\frac{\mathrm{d}y^2}{1-y^2}\right)\\&\left.-\frac{(px+1)^2+q^2y^2}{p^2x^2+q^2y^2-1}(x^2-1)(1-y^2)\mathrm{d}\varphi^2\right\}.\end{aligned} \tag{3.5.6}$$

由椭球坐标向 Boyer-Lindquist 坐标的变换表示为

$$px+1=\frac{r}{m},\quad qy=\frac{a}{m}\cos\theta,\quad \varphi'=\varphi,\quad t'=t. \tag{3.5.7}$$

式中

$$p=\frac{k}{m},\quad q=\frac{a}{m},\quad k=(m^2-a^2)^{1/2}.$$

(3.5.7) 将线元 (3.5.6) 变为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2=&\mathrm{d}t^2-(r^2+a^2\cos^2\theta)\left(\mathrm{d}\theta^2+\frac{\mathrm{d}r^2}{r^2+a^2-2mr}\right)\\&-(r^2+a^2)\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2-\frac{2mr}{r^2+a^2\cos^2\theta}(\mathrm{d}t-a\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi)^2.\end{aligned} \tag{3.5.8}$$

这正是通常形式下的 Kerr 度规 (1.14.12).

Tomimatsu 和 Sato 寻找恩斯特方程的形如

$$\zeta=\frac{\alpha(x,y;p,q,\delta)}{\beta(x,y;p,q,\delta)} \tag{3.5.9}$$

的解, 其中 δ 是整数, α 和 β 分别是关于 x 和 y 的 δ^2 次和 (δ^2-1) 次复多项式, p 和 q 是两个实参量且满足 $p^2+q^2=1$.

对应于 δ = 1, 2, 3, 4 的显式解都已找到. δ = 1 时 $\zeta = px + \mathrm{i}qy$, 前面已指出它导致 Kerr 度规. δ = 2 时, 有

$$\zeta = \frac{p^2x^4 + q^2y^4 - 1 - 2\mathrm{i}pqxy(x^2 - y^2)}{2px(x^2-1) + 2\mathrm{i}qy(1-y^2)}. \tag{3.5.10}$$

代入方程 (3.3.11),(3.3.12),(3.3.19) 和 (3.3.20), 得到

$$f = \frac{A}{B}, \tag{3.5.11}$$

$$\omega = \frac{2mq}{A}(1-y^2)C, \tag{3.5.12}$$

$$\mathrm{e}^{2\gamma} = \frac{A}{p^{2b}(x^2-y^2)^{b^2}}. \tag{3.5.13}$$

式中

$$\begin{aligned} A \equiv & p^4(x^2-1)^4 + q^4(1-y^2)^4 - 2p^2q^2(x^2-1)(1-y^2) \\ & \times [2(x^2-1)^2 + 2(1-y^2)^2 + 3(x^2-1)(1-y^2)], \end{aligned} \tag{3.5.14}$$

$$\begin{aligned} B \equiv & [p^2(x^4-1) - q^2(1-y^4) + 2px(x^2-1)]^2 \\ & + 4q^2y^2[px(x^2-1) + (px+1)(1-y^2)]^2, \end{aligned} \tag{3.5.15}$$

$$\begin{aligned} C \equiv & -p^3x(x^2-1)[2(x^4-1) + (x^2+3)(1-y^2)] \\ & - p^2(x^2-1)[4x^2(x^2-1) + 3(x^2+1)(1-y^2)] \\ & + q^2(px+1)(1-y^2)^3. \end{aligned} \tag{3.5.16}$$

由 (3.5.11)~(3.5.13) 构成的解称为 Tomimatsu-Sato 度规. $\delta = 3, 4$ 的解已由 Kinnersley 和 Chitre 等 (1978) 获得.

3.6 Ernst 生成解定理和几个生成解

恩斯特建立了一种由已知解生成新解的方法. 恩斯特方程的每一个解 ζ_0 乘以一个相因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ 将构成一个新解

$$\zeta = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\zeta_0. \tag{3.6.1}$$

现在考虑由 Schwarzschild 解生成的解. 由 (3.3.40), (3.3.30) 和 (3.3.29) 可知, Schwarzschild 解对应于 $\zeta_0 = x$. 代入 (3.6.1), 有

$$\zeta = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}x. \tag{3.6.2}$$

令 $\zeta=\cos\alpha, \lambda=\sin\alpha$, 连同上式代入 (3.3.8a) 和 (3.3.8), 得到

$$f=1-\frac{2(\zeta x+1)}{x^2+2\zeta x+1}, \tag{3.6.3}$$

$$\Psi=\frac{2\lambda x}{x^2+2\zeta x+1}. \tag{3.6.4}$$

将上二式代入 (3.3.5), 得到

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial\omega}{\partial y}=-2k\lambda. \tag{3.6.5}$$

积分此式, 得到

$$\omega=-2k\lambda y. \tag{3.6.6}$$

式中 k 为场方程中出现的任意常数. 将 (3.6.3) 和 (3.6.4) 代入 (3.3.19) 和 (3.3.20), 积分得到

$$\mathrm{e}^{2\gamma}=\frac{x^2-1}{x^2-y^2}. \tag{3.6.7}$$

变换到 boyer-Lindquist 坐标, 令

$$x=\frac{r-m}{k}, \quad y=\cos\theta, \tag{3.6.8}$$

取

$$k^2=m^2+l^2,$$

得到度规

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2=&\left[1-\frac{2(mr+l^2)}{r^2+l^2}\right](\mathrm{d}t-2l\sin\theta\mathrm{d}\varphi)^2\\&-\left[1-\frac{2(mr+l^2)}{r^2+l^2}\right]^{-1}\mathrm{d}r^2-(r^2+l^2)(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2).\end{aligned} \tag{3.6.9}$$

此解即 NUT-Taub(Bewman-Unti-Tamburina and Taub) 度规. 当 $l=0$ 时, 此解退化为 Schwarzschild 度规. 由于 $r\to\infty$ 时 $g_{t\phi}$ 不等于零, 故 $l\neq 0$ 的解不是渐近平直的.

Demianski 和 Newman 用 Kerr 解生成了一个新解. 对应的相变换为

$$\zeta=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}(px+qy), \tag{3.6.10}$$

令 $\zeta=\cos\alpha, \lambda=\sin\alpha$, 得到

$$f=1-2\frac{p\zeta x-q\lambda y+1}{p^2x^2+2p\zeta x+q^2y^2-2q\lambda y}, \tag{3.6.11}$$

$$\varPsi = 2\frac{q\zeta y + p\lambda x}{p^2x^2 + 2p\zeta x + q^2y^2 - 2q\lambda y}. \tag{3.6.12}$$

代入 (3.3.5), 得到关于 ω 的方程

$$\frac{\partial\omega}{\partial x} = -\frac{2kq}{p}\frac{1-y^2}{A}\{\zeta p[(px+1)^2 - q^2y^2] + 2p^2x(1-\zeta-q\lambda y)\}, \tag{3.6.13}$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial y} = -\frac{2kq}{p}\frac{x^2-1}{A}\left[2p^2y(\zeta px - q\lambda y + 1) + \frac{p^2}{q}\lambda A\right], \tag{3.6.14}$$

$$A \equiv p^2x^2 + q^2y^2 - 1. \tag{3.6.15}$$

积分, 得到 ω 的表达式

$$\omega = -2\frac{kq}{p} - \frac{1-y^2}{A}(q\lambda y - p\zeta x - 1) - 2\frac{k}{p}\lambda y. \tag{3.6.16}$$

从而得到

$$\mathrm{e}^{2\gamma} = \frac{p^2x^2 + q^2y^2 - 1}{p^2(x^2 - y^2)}. \tag{3.6.17}$$

下面变换到 Boyer-Lindquist 坐标. 作变换 (3.6.8), 并取

$$\begin{gathered} p = \frac{k}{(m^2+l^2)^{1/2}}, \quad q = \frac{\alpha}{(m^2+l^2)^{1/2}}, \\ \zeta = \frac{m}{(m^2+l^2)^{1/2}}, \quad \lambda = \frac{l}{(m^2+l^2)^{1/2}}, \\ k = m^2 + l^2 - \alpha^2, \end{gathered} \tag{3.6.18}$$

得到度规

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 = &\left(1 - 2\frac{mr + l^2 - \alpha l\cos\theta}{r^2 + \alpha^2\cos^2\theta + l^2 - 2\alpha l\cos\theta}\right) \\ &\times \left[\mathrm{d}t - \left(2\alpha\sin\theta\frac{mr + l^2 - \alpha l\cos\theta}{r^2 - 2mr + \alpha^2 - l^2} - 2l\cos\theta\right)\mathrm{d}\varphi\right]^2 \\ &- (r^2 + \alpha^2\cos^2\theta + l^2 - 2\alpha l\cos\theta)\left(\frac{\mathrm{d}r^2}{r^2 - 2mr + \alpha^2 + l^2} + \mathrm{d}\theta^2\right) \\ &- \frac{(r^2 + \alpha^2\cos^2\theta + l^2 - 2\alpha l\cos\theta)(r^2 - 2mr + \alpha^2 - l^2)}{r^2 - 2mr + \alpha^2 - l^2} \\ &\times \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2. \end{aligned} \tag{3.6.19}$$

这一度规称为 Demianski-Newman 度规. 当其中参量 $l = 0$ 时, 此度规退化为 Kerr 度规 (3.5.8);$\alpha = 0$ 时退化为 NUT-Taub 度规 (3.6.9).

3.7 Geroch-Kinnersley 生成解定理

前节中讨论的相变换可由一个已知解产生一个新解. 对应的引力场方程的两个解同属于辐射对称解. 这表明引力场存在一种内部对称性. Geroch(1971) 发现, 相变换是场方程更大的协变群的一个特例. Kinnersley 等 (1978) 将 Geroch 的工作推广到含电磁场的情况. 他研究了存在一个类时 Killing 矢量时爱因斯坦-麦克斯韦场方程的对称性, 证明了这些方程具有一个和 SU(2,1) 同构的对称群, 其中某些变换只引起规范变换, 其余的变换则可用来产生场方程的新的解族; 从而提出了一种新的生成技术 (G-K 生成技术).

引入复麦克斯韦张量

$$\overline{F}_{\mu\nu} \equiv F_{\mu\nu} + \mathrm{i}\tilde{F}_{\mu\nu}. \tag{3.7.1}$$

式中 $F_{\mu\nu}$ 是麦克斯韦张量. 在无源区域, 麦克斯韦方程为

$$\overline{F}_{[\mu\nu;\sigma]} = 0. \tag{3.7.2}$$

引入复矢势 $\overline{A}$, 定义为

$$\overline{F}_{\mu\nu} \equiv \overline{A}_{\nu,\mu} - \overline{A}_{\mu;\nu}. \tag{3.7.3}$$

式 (3.7.2) 即为 $\overline{A}_\mu$ 存在的可积性条件.

如果 $\overline{F}_{\mu\nu}$ 所在的空–时是稳定的, 即存在一类时 Killing 矢量, 则必存在一个坐标系, 使所有可观测的物理量均不依赖于时间坐标. 这时辐射对称线元可表示为

$$\mathrm{d}s^2 = f(\mathrm{d}t + w_i \mathrm{d}x^i)^2 - f^{-1} h_{ik} \mathrm{d}x^i \mathrm{d}x^k. \tag{3.7.4}$$

式中 f, w_i, h_{ik} 均不含 t; 通过适当的规范变换, 也可使 $\overline{A}_\mu$ 不含时间. 线元 (3.7.4) 与巴巴别特鲁度规 (3.2.25) 是一致的.

所有场方程均可写成度规张量为 h_{ik} 的三维空间 H 中的方程. 令 ∇ 表示三维空间 H 中的协变导数算符, 我们定义一个扭矢量

$$\tau \equiv f^2 \nabla \times \boldsymbol{w} + \mathrm{i}(\varPhi^* \nabla \varPhi - \varPhi \nabla \varPhi^*). \tag{3.7.5}$$

式中 $\varPhi$ 为复电磁势. 可以证明, 只要知道 $\overline{A}_\mu$ 的第零分量 $\overline{A}_0$ 就足够了, 故可令

$$\varPhi = \overline{A}_0. \tag{3.7.6}$$

利用爱因斯坦方程的第 $(0i)$ 分量

$$G_{0i} = 8\pi T_{0i}, \tag{3.7.7}$$

可以证明

$$\nabla \times \boldsymbol{\tau} = 0 \tag{3.7.8}$$

和电动力学中的情况类似, 此式表明存在一个标量“扭势” Ψ, 它由下式定义:

$$\tau = \nabla \Psi. \tag{3.7.9}$$

定义一个复引力标势——恩斯特势

$$\mathscr{E} \equiv f - \Phi\Phi^* + \mathrm{i}\Psi, \tag{3.7.10}$$

其中右端第一项属于引力场, 第二项属于电磁场, 第三项是“扭势”.

一旦给定了 h_{ik}, 则恩斯特势 $\mathscr{E}$ 便可完全确定度规张量, 即确定引力场. 麦克斯韦方程和其余的爱因斯坦方程均可用 $\mathscr{E}$ 和 Φ 的方程代替. 这些方程是

$$f\nabla^2\mathscr{E} = (\nabla\mathscr{E} + 2\Phi^*\nabla\Phi)\cdot\nabla\mathscr{E}, \tag{3.7.11}$$

$$f\nabla^2\Phi = (\nabla\mathscr{E} + 2\Phi^*\nabla\Phi)\cdot\nabla\Phi. \tag{3.7.12}$$

还可以确定三维空间 H 的曲率张量

$$f^2R^{(3)}_{ik} = \frac{1}{2}\mathscr{E}_{,(i\mathscr{E}^*_{,k})} + \Phi\mathscr{E}_{,(i\Phi^*_{,k})} + \Phi^*\mathscr{E}^*_{,(i\Phi_{,k})} - (\mathscr{E}+\mathscr{E}^*)\Phi_{,(i\Phi^*_{,k})}. \tag{3.7.13}$$

三维度规 h_{ik} 具有很大的任意性, 只要能保证上式是曲率张量即可.

为了显示出场方程 (3.7.11)~(3.7.13) 的对称性, 可用三个复标量场 u, v 和 w 代替 $\mathscr{E}$ 和 Φ

$$\mathscr{E} = \frac{u-w}{u+w}, \quad \Phi = \frac{v}{w+u}. \tag{3.7.14}$$

由于三个函数 (u, v, w) 描述两个量 $(\mathscr{E}, \Phi)$, 我们选取 w 满足任意条件, 使 u 和 v 的方程尽量简单些. 为此, 将 (3.7.14) 代入 (3.7.11) 和 (3.7.12), 得到

$$\begin{aligned}
(uu^* + vv^* - ww^*)\nabla^2 u &= 2(u^*\nabla u + v^*\nabla_v - w^*\nabla_w)\cdot\nabla_u,\\
(uu^* + vv^* - ww^*)\nabla^2 v &= 2(u^*\nabla u + v^*\nabla_v - w^*\nabla_w)\cdot\nabla_v,\\
(uu^* + vv^* - ww^*)\nabla^2 w &= 2(u^*\nabla_u + v^*\nabla_v - w^*\nabla_w)\cdot\nabla_w.
\end{aligned} \tag{3.7.15}$$

我们引入一抽象的复三维空间 M, 具有不定度规

$$\eta_{pq} = \mathrm{diag}(1, 1, -1); \tag{3.7.16}$$

将场 u, v, w 视为此空间中一矢量的分量

$$Y^p = (u, v, w). \tag{3.7.17}$$

这就是说, 空间 M 中的每一点 (电磁场和引力场) 决定空间 M 中的一个矢量, 式 (3.7.14) 中只含有 u, v 和 w 的比值, 因此它们的归一化并无意义, 实际上只要关心空间 M 中的射线而不是矢量. 用 (3.7.17) 可将 (3.7.15) 写成矢量形式

$$Y_p Y^p \nabla^2 Y^q = 2Y_p^* \nabla Y^p \cdot \nabla Y^q. \tag{3.7.18}$$

空间 H 的曲率张量 (3.7.13) 表示为

$$R_{ik} = (Y_p^* Y^p)^{-2} V_{q(iV_k^q)^*}. \tag{3.7.19}$$

式中

$$V_i^p \equiv Y_q^* Y_{s,i} \mathscr{E}^{pqs}. \tag{3.7.20}$$

考虑在空间 M 内作一常数幺正变换, 即线性变换

$$Y'^p = A_q^p Y^q, \tag{3.7.21}$$

$$Y_p'^* Y'^p = Y_p^* Y^p, \tag{3.7.22}$$

且 A_q^p 不是空间 H 中位置的函数. 由 (3.7.19) 和 (3.7.20) 可知, R_{ij} 在空间 M 中是一标量, 因而具有确定值. 我们也可以假定 h_{ik} 的值确定. 在这样的情况下, 方程 (3.7.18) 中的算符 ∇ 是作为空间 M 中的矢量变换的; 若 Y^p 满足此方程, 则 Y'^p 也是作为矢量变换的. 这样, 如果 (Y^p, h_{ik}) 确定一个稳态 Einstein-Maxwell 场方程的解, 则 (Y'^p, h_{ik}) 也是一个稳态解.

空间 M 中全部幺正变换 A_q^p 组成的变换群记为 $U(2,1)$. 由于我们感兴趣的是空间 M 中的射线而不是矢量, 所以给 Y^p 的分量加上一个普通的相因子是无关紧要的. 因此, 我们可以只考虑 $SU(2, 1)$ 子群. 为了分析的方便, 我们用 8 个实参量 (如"欧拉角") 来细致地表示出最普遍的 $SU(2,1)$ 矩阵. 这在 $SU(2)$ 甚至在 $SU(3)$ 中都是相当明显的, 因为根据欧拉定理, 任何有限转动均为绕某一固定轴的转动. 但是不定度规的出现要求我们考虑一些不同情况. 如在 Minkowski 空间就有一些例外的"零转动", 必须对它们单独处理. 最简单的办法是考查变换矩阵 (A_q^p) 的本征值问题. 对于幺正矩阵, 通常的结果是, 本征矢构成完备正交系, 且所有本征值都是么模的. 但是当出现零本征矢的时候, 这条规则就有例外了. 对应于零本征矢的本征值是没有任何限制的, 而且两个零本征矢不必正交. 对于 $SU(2,1)$ 矩阵, 只能有下列可能性:

(1) 两个类空本征矢, 一个类时本征矢;

(2) 一个类空本征矢, 两个不同的零本征矢;

(3) 一个类空本征矢, 一个 (二重) 零本征矢;

(4) 一个 (三重) 零本征矢.

考虑以下 5 类简单的 $SU(2,1)$ 变换:

(Ⅰ)
$$\begin{aligned}&(u+w)\to(u+w),\\&v\to v'+\alpha(u+w),\\&(u-w)\to(u-w)-2a^*v-aa^*(u+w);\end{aligned}\tag{3.7.23}$$

(Ⅱ)
$$\begin{aligned}&(u+w)\to(u+w),\\&v\to v,\\&(u-w)\to(u-w)+\mathrm{i}\alpha(u+w);\end{aligned}\tag{3.7.24}$$

(Ⅲ)
$$\begin{aligned}&(u+w)\to b(u+w),\\&v\to(b^*/b)v,\\&(u-v)\to(1/b^*)(u-w);\end{aligned}\tag{3.7.25}$$

(Ⅳ)
$$\begin{aligned}&(u+w)\to(u+w)+\mathrm{i}\beta(u-w),\\&v\to v,\\&(u-w)\to(u-w);\end{aligned}\tag{3.7.26}$$

(Ⅴ)
$$\begin{aligned}&(u+w)\to(u+w)-2c^*v-cc^*(u-w),\\&v\to v+c(u-w),\\&(u-w)\to(u-w).\end{aligned}\tag{3.7.27}$$

式中 a,b 和 c 是任意复参量, α 和 β 是任意的实参量. (3.7.23)~(3.7.27) 表示相应类型的任意 $SU(2,1)$ 矩阵. 为了表示矩阵 (A), 我们首先将它的某一本征矢转到一标准位置, 作进一步转动时这一本征矢固定不动. 然后将它转回初始位置.

对于情况 (1), 使矩阵 (A) 的某一类空本征矢与 v 重合, 写作

$$A=(\mathrm{I}\cdot\mathrm{V})\cdot(\mathrm{III}\cdot\mathrm{II}\cdot\mathrm{IV})\cdot(\mathrm{I}\cdot\mathrm{V})^{-1}.\tag{3.7.28}$$

对于情况 (2)、(3)、(4), 至少有一个零本征矢, 使之与 $(u-w)$ 重合. 矩阵 (A) 的形式为

$$A=(\mathrm{I}\cdot\mathrm{II})\cdot(\mathrm{III}\cdot\mathrm{IV}\cdot\mathrm{V})\cdot(\mathrm{I}\cdot\mathrm{II})^{-1}.\tag{3.7.29}$$

只要由一个解出发, 其对称类的所有解均可由 (3.7.28) 或 (3.7.29) 得到.

现在讨论这些 $SU(2,1)$ 变换对物理过程的影响. 由 (3.7.10) 和 (3.7.14) 可得

$$f=\frac{uu^*+vv^*-ww^*}{(u+w)(u^*+w^*)}.\tag{3.7.30}$$

属于 (I), (II) 类的 $SU(2,1)$ 矩阵具有特别简单的效应, 因为它们保持 $(u+w)$ 不变, 因而也保持 f 不变. 对于情况 (I) 有

$$\Phi \to \Phi + a, \quad \mathscr{E} \to \mathscr{E} - 2a^*\Phi - a^*a, \tag{3.7.31}$$

对于情况 (II) 有

$$\Phi \to \Phi, \quad \mathscr{E} \to \mathscr{E} + \mathrm{i}\alpha, \tag{3.7.32}$$

$$f \to f, \quad \tau \to \tau;$$

这两类变换既不改变电磁场, 也不改变空间几何性质. 它们分别对应于电磁规范变换和引力规范变换.

在 (III) 类变换下有

$$\mathscr{E} \to (bb^*)^{-1}\mathscr{E}, \quad \Phi \to (b^*b^{-2})\Phi. \tag{3.7.33}$$

当 $bb^*=1$ 时, 变换为一个“二重旋转”, 它将电场变换为磁场, 将磁场变换为电场, 但不影响空间几何性质. 如果选取 $bb \neq 1$, 则由 (3.7.33) 可得

$$\mathrm{d}s^2 \to (bb^*)^{-1}\mathrm{d}s^2. \tag{3.7.34}$$

这显然是一个均匀共形变换. 对于真空或只存在零质量场的情况, 这种变换往往导致场方程的新解.

(IV) 类变换将静态真空场变换为稳态场. 这类变换是 Ehlers(1959) 发现的.

(V) 类变换不属于真空的情况, 对应于 Harrison(1968) 发现的变换.

上述 G-K 生成技术的步骤可总结如下: 给定一个稳态爱因斯坦–麦克斯韦场方程的解之后, 由度规确定 f, w, h_{ik}, 然后由已知的电磁场确定 Φ, 再代入 (3.7.5),(3.7.9) 和 (3.7.10) 确定 Ψ 和 $\mathscr{E}$. 生成的 5 参量解族可由 (3.7.28) 和 (3.7.29) 直接得出〔或相继应用 (3.7.23)~(3.7.27)〕. 本节所述的变换 (3.7.23)~(3.7.29) 也可用 $\mathscr{E}$ 和 Φ 的变换式重复表示出来.

Ernst,Geroch 和 Kinnersley 的工作使严格解的研究大大向前迈进了一步.

作为 G-K 生成解定理的应用, 我们给出一类辐射对称稳态真空场的新解.

按照巴巴别特鲁度规 (3.2.25) 和场方程 (3.2.27)~(3.2.32), 作代换

$$\varepsilon_1 = \rho f^{-1} + \omega, \quad \varepsilon_2 = \rho f^{-1} - \omega, \tag{3.7.35}$$

可将场方程 (3.2.31) 和 (3.2.32) 改写为

$$(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\nabla^2\varepsilon_1 = 2(\nabla\varepsilon_1)^2, \tag{3.7.36}$$

$$(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\nabla^2\varepsilon_2=2(\nabla\varepsilon_2)^2, \tag{3.7.37}$$

直接代入可以证明, 式

$$\rho^{-1}\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial\rho}(\varepsilon_1+\varepsilon_2)=(\nabla\varepsilon_1)^2, \tag{3.7.38}$$

$$\nabla^2\left(\rho^{-1}\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial\rho}\right)=0 \tag{3.7.39}$$

满足场方程 (3.7.36)~(3.7.37).

设 $(\varepsilon_1^0,\varepsilon_2^0)$ 是方程 (3.7.36)~(3.7.37) 的一组解, 根据 G-K 定理

$$\varepsilon_1=\frac{-a+b\varepsilon_1^0}{b-a\varepsilon_1^0},\quad \varepsilon_2=\frac{a+b\varepsilon_2^0}{b+a\varepsilon_2^0} \tag{3.7.40}$$

也是场方程 (3.7.36)~(3.7.37) 的一组解. 这样, 我们可以由下列各式获得一类新解:

$$f=2A\rho\left(\frac{-B+C\varepsilon_1^0}{C-B\varepsilon_1^0}+\frac{B+C\varepsilon_2^0}{C+B\varepsilon_2^0}\right)^{-1}, \tag{3.7.41}$$

$$\omega=A\left(\frac{-B+C\varepsilon_1^0}{C-B\varepsilon_1^0}+\frac{B+C\varepsilon_2^0}{C+B\varepsilon_2^0}\right), \tag{3.7.42}$$

$$\nabla^2\left(\rho^{-1}\frac{\partial\varepsilon_1^0}{\partial\rho}\right)=0, \tag{3.7.43}$$

$$\varepsilon_2^0=(\nabla\varepsilon_1^0)^2\left(\rho^{-1}\frac{\partial\varepsilon_1^0}{\partial\rho}\right)^{-1}-\varepsilon_1^0, \tag{3.7.44}$$

式中 A,B,C 为任意常数; 度规系数 γ 可由 f 和 ω 求得 [见 (3.2.27~3.2.28)]. 选择 (3.7.43) 的解, 使生成解满足 $\rho\to\infty, z\to\infty$ 时的渐近条件. 所获得的这一类解是与各种已知解不同的一类新解.. 应用 3.10 节中的技术, 还可以由这类解生成 Einstein-Maxwell 场方程的一类新解.

3.8 强磁场中的旋转双荷黑洞解

本节由 Kerr-Newman-Kasuya 度规 (1.14.11) 生成爱因斯坦–麦克斯韦场方程的新解. 在新解中含有描述任意强度的外磁场参量 B_0.

在 Boyer-Lindquist 坐标中, Kerr-Newman-Kasuya 度规可表示为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2=&\left\{1-\frac{2Mr-(e^2+q^2)}{\varSigma}\right\}\mathrm{d}t^2-\frac{\varSigma}{\varDelta}\mathrm{d}r^2-\varSigma\mathrm{d}\theta^2\\&-\left\{\frac{[2mr-(e^2+q^2)]a^2\sin^2\theta}{\varSigma}+(r^2+a^2)\right\}\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2\end{aligned}$$

$$+\frac{2a\sin^2\theta}{\Sigma}\left[2mr-(e^2+q^2)\right]\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}t. \tag{3.8.1}$$

式中

$$\Sigma=r^2+a^2\cos^2\theta,\quad \Delta=r^2+a^2+e^2+q^2-2mr,\quad a=\frac{J}{m},$$

m,e 和 q 分别表示源的质量、电荷和磁荷.

巴巴别特鲁度规 (3.2.25) 可写为

$$\mathrm{d}s^2=(\mathrm{d}\varphi-\omega\mathrm{d}t)^2-\frac{1}{f}(2P^{-2}\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\zeta^*+\rho^2\mathrm{d}t^2), \tag{3.8.2}$$

式中 ζ 是子空间中的复坐标,P,ρ 和 ω 是实函数. 考虑到 (3.7.4) 和 (3.8.2), 由 (3.7.5) 和 (3.7.9) 得到

$$\mathrm{i}\nabla\varPsi=\varPhi\nabla\varPhi^*-\varPhi^*\nabla\varPhi-\frac{f^2}{\rho}\nabla\omega. \tag{3.8.3}$$

式中 $\varPsi$ 为扭势, ∇ 为三维空间的协变导数算符

$$\nabla\equiv\Delta^{1/2}\frac{\partial}{\partial\gamma}+\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial\theta}. \tag{3.8.4}$$

由 (3.7.10) 可将爱因斯坦 - 麦克斯韦方程 (3.7.11) 和 (3.7.12) 改写为

$$(\mathrm{Re}\mathscr{E}+|\varPhi|^2)\nabla^2\mathscr{E}=(\nabla\mathscr{E}+2\varPhi^*\nabla\varPhi)\nabla\mathscr{E}, \tag{3.8.5}$$

$$(\mathrm{Re}\mathscr{E}+|\varPhi|^2)\nabla^2\varPhi=(\nabla\mathscr{E}+2\varPhi^*\nabla\varPhi)\nabla\varPhi. \tag{3.8.6}$$

由已知的电磁场和已知的度规 (3.8.1) 可以得到复电磁势 $\varPhi$ 和复引力势 (恩斯特势)ξ 的表达式:

$$\varPhi=\left(\frac{ae\sin^2\theta}{r+\mathrm{i}a\cos\theta}-q\cos\theta\right)-\mathrm{i}\left(\frac{aq\sin^2\theta}{r+\mathrm{i}a\cos\theta}+e\cos\theta\right), \tag{3.8.7}$$

$$\begin{aligned}\mathscr{E}=&-(r^2+a^2)\sin^2\theta-(e^2+q^2)\cos^2\theta+2mai\cos\theta(3-\cos^2\theta)\\&-\frac{2a}{r+\mathrm{i}a\cos\theta}\sin^2\theta[ma\sin^2\theta+\mathrm{i}(e^2+q^2)\cos\theta].\end{aligned} \tag{3.8.8}$$

对 $\mathscr{E}$ 和 $\varPhi$ 作变换

$$\mathscr{E}'=\Lambda^{-1}\mathscr{E},\quad \varPhi'=\Lambda^{-1}\left(\varPhi-\frac{1}{2}B_0\mathscr{E}\right). \tag{3.8.9}$$

式中 $B_0=\mathrm{const},\Lambda$ 的表达式取为

$$\Lambda=1+B_0\varPhi-\frac{1}{4}B_0^2\mathscr{E}$$

$$
\begin{aligned}
=&1+\frac{B_0ea\sin^2\theta}{r+\mathrm{i}a\cos\theta}-B_0q\cos\theta+\frac{B_0^2}{4}\Big[(r^2+a^2)\sin^2\theta\\
&+(e^2+q^2)\cos^2\theta+\frac{2a^2m\sin^4\theta}{r+\mathrm{i}a\cos\theta}\Big]\\
&-\frac{\mathrm{i}B_0}{4}\left[2am\cos\theta(3-\cos^2\theta)-\frac{2a(e^2+q^2)\cos\theta\sin^2\theta}{r+\mathrm{i}a\cos\theta}\right]\\
&-\mathrm{i}B_0\left(\frac{aq\sin^2\theta}{r+\mathrm{i}a\cos\theta}+e\cos\theta\right).
\end{aligned}
\tag{3.8.10}
$$

类似地, 将 (3.8.10),(3.8.6) 和 (3.8.8) 代入 (3.8.9), 得到 $\mathscr{E}'$ 和 Φ' 的表达式. 在变换 (3.8.9) 下, $P'=P,\rho'=\rho$. 由 (3.7.10) 和 (3.8.8) 可知 f 和 ω 的变换为

$$
f'=\mathrm{Re}\mathscr{E}'+\Phi'\Phi'^{*}=\Lambda\Lambda^{*}f,
\tag{3.8.11}
$$

$$
\nabla\omega'=\Lambda\Lambda^{*}\nabla\omega+\frac{\rho}{f}(\Lambda^{*}\Delta\Lambda-\Lambda\Delta\Lambda^{*}).
\tag{3.8.12}
$$

显然, f' 的表达式可由前面诸式求出. 我们的任务是解方程 (3.8.12), 求出 ω', 这样便求出了新解. 在求 ω' 之前, 先求出电磁场的表达式.

在局部洛伦兹系中, 电磁场表示为

$$
H_r'+\mathrm{i}E_r'=\frac{\Phi'_{,\theta}}{C^{1/2}\sin\theta},\quad H_\theta'+\mathrm{i}E_\theta'=-\frac{\Delta^{1/2}\Phi'_{,r}}{C^{1/2}\sin\theta},
\tag{3.8.13}
$$

式中

$$
A\equiv(r^2+a^2)^2-\Delta a^2\sin^2\theta.
$$

由 (3.8.9) 和 (3.8.10) 有

$$
\begin{aligned}
\Phi'_{,r}&=\frac{1}{\Lambda^2}\left[\left(1+\frac{1}{4}B_0^2\mathscr{E}\right)\Phi_{,r}-\frac{1}{2}B_0\left(1+\frac{1}{2}B_0\Phi\right)\mathscr{E}_{,r}\right],\\
\Phi'_{,\theta}&=\frac{1}{\Lambda^2}\left[\left(1+\frac{1}{4}B_0^2\mathscr{E}\right)\Phi_{,\theta}-\frac{1}{2}B_0\left(1+\frac{1}{2}B_0\Phi\right)\mathscr{E}_{,\theta}\right].
\end{aligned}
\tag{3.8.14}
$$

将 (3.8.8), (3.8.9) 和 (3.8.10) 代入 (3.8.13) 和 (3.8.14), 得到

$$
\begin{aligned}
H_r'+\mathrm{i}E_r'=&\frac{1}{\Lambda 2C^{1/2}}\bigg\{\bigg[q+\frac{2ae\cos\theta}{r+\mathrm{i}a\cos\theta}+\mathrm{i}e-\frac{2\mathrm{i}aq\cos\theta}{r+\mathrm{i}a\cos\theta}\\
&+\frac{(q+\mathrm{i}e)a^2\sin^2\theta}{(r+\mathrm{i}a\cos\theta)^2}\bigg]\bigg[1-\frac{B_0^2}{4}((r^2+a^2)\sin^2\theta\\
&+(e^2+q^2)\cos^2\theta-2ma\mathrm{i}\cos\theta(3-\cos^2\theta)\\
&+\frac{2ma^2\sin^4\theta+2\mathrm{i}a(e^2+q^2)\sin^2\theta\cos\theta}{r+\mathrm{i}a\cos\theta})\bigg]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+B_0\left[1-\left(\frac{B_0}{2}q+\frac{\mathrm{i}}{2}B_0e\right)\cos\theta+\frac{(e-\mathrm{i}q)B_0\alpha\sin^2\theta}{2(r+\mathrm{i}\alpha\cos\theta)}\right]\\
&\times[(r^2+a^2-e^2-q^2)\cos\theta+3mai\sin^2\theta\\
&+\frac{\alpha}{r+\mathrm{i}a\cos\theta}\left(2\cos\theta+\frac{\mathrm{i}a\sin^2\theta}{r+\mathrm{i}a\cos\theta}\right)(ma\sin^2\theta+\mathrm{i}(e^2+q^2)\cdot\cos\theta)\\
&+\frac{a\sin\theta}{r+\mathrm{i}a\cos\theta}(ma\sin^2\theta-\mathrm{i}(e^2+q^2)\sin\theta)]\bigg\},
\end{aligned}
\tag{3.8.15}
$$

$$
\begin{aligned}
H'_\theta+\mathrm{i}E'_\theta=&\frac{\Delta^{1/2}}{\Lambda^2C^{1/2}}\left\{\frac{(e-\mathrm{i}q)a\sin\theta}{(r+\mathrm{i}a\cos\theta)^2}\right.\\
&\times\Big[1-\frac{B_0^2}{4}(r^2+\alpha^2)\sin^2\theta+(e^2+q^2)\cos^2\theta-2mai\cos\theta(3-\cos^2\theta)\\
&+\frac{2a\sin^2\theta}{r+\mathrm{i}a\cos\theta}(ma\sin^2\theta+\mathrm{i}(e^2+q^2)\cos\theta)\Big]\\
&-B_0\left[1-\frac{B_0}{2}(q+\mathrm{i}e)\cos\theta+\frac{B_0a(e-\mathrm{i}q)\sin^2\theta}{2(r+\mathrm{i}a\cos\theta)}\right]\Big[r\sin\theta\\
&\left.-\frac{a\sin\theta}{(r+\mathrm{i}a\cos\theta)^2}(ma\sin^2\theta+\mathrm{i}(e^2+q^2)\cos\theta)\Big]\right\}.
\end{aligned}
\tag{3.8.16}
$$

(3.8.15) 和 (3.8.16) 是新解中电磁场的严格表达式, 当 $B_0=0$, $q=0$ 时, 此式恰与 Kerr-Newman 场的对应表达式相同.

下面求引力场的表达式. 比较 (3.8.1) 和 (3.8.2) 有

$$
\begin{aligned}
&f=-\frac{C\sin^2\theta}{\Sigma},\quad P=\frac{1}{C^{1/2}\sin\theta},\\
&\rho=\Delta^{1/2},\quad \omega=(2mr-e^2-q^2)\frac{\alpha}{C},\\
&\mathrm{d}\zeta=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\Delta^{1/2}}+\mathrm{i}\mathrm{d}\theta\right).
\end{aligned}
\tag{3.8.17}
$$

将此式中的 f,ω 和 (3.8.4) 代入 (3.8.12), 得到

$$
\begin{aligned}
\omega'_{,r}=&-\frac{\Delta_{1/2}q}{r}B_0^3\sin\theta\cos\theta-\frac{6\alpha m}{r^4}+\frac{2eB_0}{r^2}\\
&+\frac{1}{2}(eB_0^2+amB_0^4)(1+\cos^2\theta)-\frac{1}{8}amB_0^4\sin^4\theta,
\end{aligned}
\tag{3.8.18}
$$

$$
\begin{aligned}
\omega'_{,\theta}=&-\frac{2\Delta_{1/2}qB_0}{r^2}-\frac{1}{2}\Delta^{1/2}qB_0^3(1+\cos^2\theta)\\
&-\frac{\Delta}{r}eB_0^3\sin\theta\cos\theta-\frac{\Delta}{2r}amB_0^4\sin\theta\cos\theta(3-\cos^2\theta).
\end{aligned}
\tag{3.8.19}
$$

可以发现, 当 $q \ll e = -2B_0J$ 时, (3.8.18) 和 (3.8.19) 恰好满足

$$\omega'_{,r\theta} = \omega'_{,\theta r}, \tag{3.8.20}$$

即 $\omega'_{,r}\mathrm{d}r + \omega'_{,\theta}\mathrm{d}\theta$ 为全微分. 此时积分, 得到

$$\begin{aligned}\omega'(r,\theta) =& -\frac{2eB_0}{r} + \frac{eB_0^3 r}{2} + \frac{amB_0^4 r}{2} + \frac{2am}{r^3} \\ & - \frac{1}{8r}\Delta amB_0^4 \sin^4\theta + \frac{1}{8}\Delta eB_0^3 \sin^2\theta \\ & + \frac{1}{4r}\Delta amB_0^4 \sin^2\theta + \text{const.}\end{aligned} \tag{3.8.21}$$

由 (3.8.7)~(3.8.11) 可以得到 f' 的表达式. 于是得到新的度规

$$\mathrm{d}s^2 = \Lambda\Lambda^*\left(\frac{\Sigma}{\Delta}\mathrm{d}r^2 + \Sigma\mathrm{d}\theta^2 - \frac{\Sigma}{C}\Delta\mathrm{d}t^2\right) + \frac{C\sin^2\theta}{\Sigma\Lambda\Lambda^*}(\mathrm{d}\varphi - \omega'\mathrm{d}t)^2. \tag{3.8.22}$$

式中 ω' 已由 (3.8.21) 确定.

可以证明, 当 $B_0 = 0$ 时, (3.8.21) 退化为 Kerr-Newman 度规; 当 $a = 0$ 时, 退化为 Ernst 解 (不转动的情况), 故知 B_0 的物理意义是外磁场强度.

3.9 Chandrasekhar 生成解定理

Chandrasekhar(1978) 用两个实函数代替 Ernst 的复函数, 对辐射对称稳态真空场方程进行了重新描述. 这种描述有很多优越性. 他以一个普遍的形式选取线元, 直接导出了 Kerr 度规. 这一工作提供了一种由已知解产生新解的生成技术.

把辐射对称线元写成

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{e}^{2\nu}\mathrm{d}t^2 - \mathrm{e}^{2\psi}(\mathrm{d}\varphi - \omega\mathrm{d}t)^2 - \mathrm{e}^{2u_2}\mathrm{d}{x^2}^2 - \mathrm{e}^{2u_3}\mathrm{d}{x^3}^2. \tag{3.9.1}$$

式中坐标 (φ, x^2, x^3) 为球坐标 (φ, r, θ). 假设场是稳态的, ν, ψ, ω, u_2, 和 u_3 只是 x^2 和 x^3 的函数. 经过适当的变换, 可将 (3.9.1) 变为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2 =& (\Delta\delta)^{1/2}\left[\chi\mathrm{d}t^2 + \chi^{-1}(\mathrm{d}\varphi - \omega\mathrm{d}t)^2\right] \\ & + \Delta^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{u_2+u_3}(\mathrm{d}r^2 + \Delta\mathrm{d}\theta^2).\end{aligned} \tag{3.9.2}$$

此时场方程可简化为

$$\frac{1}{2}(X+Y)\left[(\Delta X_{,r})_{r} + (\delta X_{,u})_{,u}\right] = \Delta X_{,r}^2 + \delta X_{,u}^2, \tag{3.9.3}$$

$$\frac{1}{2}(X+Y)\left[(\Delta y_{,r})_{,r} + (\delta y_{,u})_{,u}\right] = \Delta y_{,r}^2 + \delta y_{,u}^2. \tag{3.9.4}$$

式中

$$X \equiv \chi + \omega, \quad y \equiv \chi - \omega, \quad u \equiv \cos\theta,$$
$$\Delta^{1/2} \equiv \mathrm{e}^{u_3 - u_2}, \quad \delta \equiv 1 - u^2, \quad \chi \equiv \exp(-\psi + \nu). \tag{3.9.5}$$

这一表述的优点是不必先假定正则坐标具有柱对称性.

为了便于生成新解, 我们作变换

$$X = \frac{1+F}{1-F}, \quad Y = \frac{1+G}{1-G}, \tag{3.9.6}$$

$$\eta = \frac{r-m}{(m^2-a^2)^{1/2}}, \quad \Delta = (m^2-a^2)(\eta^2-1). \tag{3.9.7}$$

容易看出, 式中 η 和 u 与椭球坐标系中的空间坐标 x 和 y 是一致的. 可以把方程 (3.9.3) 和 (3.9.4) 写成下面的形式:

$$\begin{aligned}&(1-FG)\{[(x^2-1)F_{,x}]_{,x} + [(1-y^2)F_{,y}]_{,y}\}\\ =& -2G[(x^2-1)F_{,x}^2 + (1-y^2)F_{,y}^2],\end{aligned} \tag{3.9.8}$$

$$\begin{aligned}&(1-FG)\{[(x^2-1)G_{,x}]_{,x} + [(1-y^2)G_{,y}]_{,y}\}\\ =& -2F[(x^2-1)G_{,x}^2 + (1-y^2)G_{,y}^2].\end{aligned} \tag{3.9.9}$$

这样, 一旦获得了关于 F 和 G 的方程 (3.9.8) 和 (3.9.9) 的解, 便得到了度规 (3.9.2). 可以由 Chandrasekhar 表述得到一类新解. Bonnor(1979) 已经证明, 方程 (3.9.8) 和 (3.9.9) 的解也属于稳态辐射对称的电真空场. Chandrasekhar 通过简单的观察, 从恩斯特方程得出了 (3.9.8)~(3.9.9) 的解.

如果恩斯特方程的解可写成

$$\xi = f(x,y,\lambda) + \mathrm{i}\lambda\phi(x,y,\lambda), \tag{3.9.10}$$

$$\lambda = \mathrm{const.}$$

的形式, 便可以把 (3.9.8)~(3.9.9) 分成两个独立的方程. 实际上, Tomimatsu-Sato 解, Kinnersley 和 Chitre 解都可以化为 (3.9.10) 的形式.

将 (3.3.17) 代入恩斯特方程 (3.3.10), 得到椭球坐标中的恩斯特方程

$$\begin{aligned}&(1-\xi\xi^*)\{[(x^2-1)\xi_{,x}]_{,x} + [(1-y^2)\xi_{,y}]_{,y}\}\\ =& -2\xi^*[(x^2-1)\xi_{,x}^2 + (1-y^2)\xi_{,y}^2].\end{aligned} \tag{3.9.11}$$

按 (3.9.10), 将 $\xi = f + \mathrm{i}\lambda\phi$ 代入 (3.9.11), 分开实部和虚部, 得到

$$(1-f^2-\lambda^2\phi^2)\{[(x^2-1)f_{,x}]_{,x} + [(1-y^2)f_{,y}]_{,y}\}$$

$$
\begin{aligned}
&= -2f[(x^2-1)(f_{,x}^2-\lambda^2\phi_{,x}^2)+(1-y^2)(f_{,y}^2-\lambda^2\phi_{,y}^2)] \\
&\quad -4\lambda^4\phi[(x^2-1)f_{,x}\phi_{,x}+(1-y^2)f_{,y}\phi_{,y}],
\end{aligned} \tag{3.9.12a}
$$

$$
\begin{aligned}
&(1-f^2-\lambda^2\phi^2)\{[(x^2-1)\phi_{,x}]_{,x}+[(1-y^2)\phi_{,y}]_{,y}\} \\
&= -4f[(x^2-1)f_{,x}\phi_{,x}+(1-y^2)f_{,y}\phi_{,y}] \\
&\quad +2\phi[(x^2-1)(f_{,x}^2-\lambda^2\phi_{,x}^2)+(1-y^2)(f_{,y}^2-\lambda^2\phi_{,y}^2)].
\end{aligned} \tag{3.9.12b}
$$

类似地, 把 F 和 G 写成 $F=f'+k\phi'$ 和 $G=f'-k\phi'(k=\text{const})$, 方程 (3.9.8)~(3.9.9) 便成为两个独立的方程

$$
\begin{aligned}
&(1-f'^2+k^2\phi'^2)\{[(x^2-1)f'_{,x}]_{,x}+[(1-y^2)f'_{,y}]_{,y}\} \\
&= -2f'[(x^2-1)(f'_{,x}+k^2\phi'^2_{,x})+(1-y^2)(f'^2+k^2)] \\
&\quad +4k^2\phi'[(x^2-1)f'_{,x}\phi'_{,x}+(1-y^2)f'_{,y}\phi'_{,y}],
\end{aligned} \tag{3.9.13a}
$$

$$
\begin{aligned}
&(1-f'^2+k^2\phi'^2)\{[(x^2-1)k\phi'_{,x}]_{,x}+[(1-y^2)k\phi'_{,y}]_{,y}\} \\
&= -4kf'[(x^2-1)f'_{,x}\phi'^2_{,x}+(1-y^2)f'_{,y}\phi'_{,y}] \\
&\quad +2k\phi'[(x^2-1)(f'^2_{,x}+k^2\phi'^2_{,x}+(1-y^2)f'^2_{,a}+k^2\phi'_{,a})].
\end{aligned} \tag{3.9.13b}
$$

比较表明, 两对方程 (3.9.12) 和 (3.9.13) 是相互关联的. 解任何一对, 均可获得场方程的解. 比较上面两对方程可以发现, 将 f 和 ϕ 中的所有 (iq) 换成 k, 我们便得到 f' 和 ϕ'; 由它们就能构成 F 和 G

$$F=f'+q\phi', \tag{3.9.14}$$

$$G=f'-q\phi'. \tag{3.9.15}$$

下面我们讨论 Bonnor 给出的一种生成技术. 首先, 把辐射对称线元表示成 Bonnor(1979) 的形式

$$\mathrm{d}s^2=\mathrm{e}^\lambda(\mathrm{d}u^2+\mathrm{d}\theta^2)+a^{-2}\varDelta^2\mathrm{d}\varphi^2+a^2\mathrm{d}t^2. \tag{3.9.16}$$

式中 $x'\equiv u, x^2\equiv\theta, x^3\equiv\varphi$; $\lambda,\varDelta,\alpha$, 只是 u 和 θ 的函数. 我们要解的引力场方程是

$$R_{\mu\nu}=2F_\mu^\alpha F_{\nu\alpha}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}. \tag{3.9.17}$$

Maxwell 方程为

$$R_{\mu\nu;\tau}+F_{\tau\nu;\mu}+F_{\tau\mu;\nu}=0, \tag{3.9.18}$$

$$F^{\mu\nu}_{;\nu}=0. \tag{3.9.19}$$

在静电问题中所有的场变量都不依赖时间 ($t \equiv x^0$). 令 4-矢量 A_μ 为

$$A_\mu = \delta_\mu^0 \phi(x^i), \quad i = 1, 2, 3. \tag{3.9.20}$$

则 (3.9.18) 自然满足; 式中 ϕ 为静电势. 可以证明, 场方程的全部解由下面两个方程确定:

$$R_{00} = 2F_0^{\alpha} F_{0\alpha} - \frac{1}{2} g_{00} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}, \tag{3.9.21}$$

$$F^{0\nu}_{;\nu} = 0. \tag{3.9.22}$$

令

$$X = \alpha + \phi, \quad Y = \alpha - \phi, \tag{3.9.23}$$

可将 (3.9.21)~(3.9.22) 写为

$$(X + Y)\nabla^2 X = 2\nabla X \nabla X, \tag{3.9.24}$$

$$(X + Y)\nabla^2 Y = 2\nabla Y \nabla Y. \tag{3.9.25}$$

这两个方程与 Chandrasekhar 给出的两个方程 (3.9.8)~(3.9.9) 完全等效. 实际上, 引入椭球坐标

$$\eta = \cos hu, \quad u = \cos\theta, \tag{3.9.26}$$

作代换 (3.9.6), 把 X 和 Y 换成 F 和 G, 上面两个方程便成为 (3.9.8)~(3.9.9).

我们从 Kinnersley 和 Chitre(1978) 给出的稳态辐射对称解出发. 此解按恩斯特符号表示为

$$\xi = \frac{(x^4 - 1) - 2\mathrm{i}\beta xy(x^2 + y^2 - 2) - \beta^2(x^2 - y^2)^2}{2x(x^2 - 1) + 2\mathrm{i}\beta y(x^2 - y^2)}. \tag{3.9.27}$$

式中 $\beta = \text{const}$. 按前面说明的 Chandrasekhar 生成技术, 得到

$$F = \frac{(x^4 - 1) - 2\beta xy(x^2 + y^2 - 2) + \beta^2(x^2 - y^2)^2}{2x(x^2 - 1) + 2\beta y(x^2 - y^2)}, \tag{3.9.28}$$

$$G = \frac{(x^4 - 1) + 2\beta xy(x^2 + y^2 - 2) + \beta^2(x^2 - y^2)^2}{2x(x^2 - 1) - 2\beta y(x^2 - y^2)}. \tag{3.9.29}$$

采用变换 (Chand,1978)

$$X \to X(1 + C'X), \tag{3.9.30}$$

$$Y \to Y/(1 - C'Y),$$

可以得到单极解, 由 C-B 技术得

$$\alpha = \frac{1}{2}\frac{(a_2 - a_1)(1 - FG)}{a_1 a_2 + a_1^2 G + a_2^2 F + a_1 a_2 FG}, \tag{3.9.31}$$

$$\phi = \frac{1}{2}\frac{2a_1 G + 2a_2 F + (a_1 + a_2)(1 + FG)}{a_1^2 G + a_2^2 F + a_1 a_2(1 + FG)} \tag{3.9.32}$$

式中 a_1 和 a_2 为任意常数;

$$a_1 = c' + 1, \quad a_2 = c' - 1.$$

c' 是 (3.9.30) 中的任意常数. 将 (3.9.28)~(3.9.29) 代入 α 和 ϕ 的表达式, 其中含的任意常数可由变换 $t = (\text{const})^{-1}t'$ 和 $\phi = (\text{const})\phi'$ 消掉. 式 (3.9.17)~(3.9.19) 中 ϕ 总是以导数形式出现的, 所以可以在 ϕ 的表达式中引入另一常数. 这样, 便可保证在空间无限远处 α^2 为么模的和 ϕ 为零. α 和 ϕ 的渐近展开式为

$$\alpha = 1 - \frac{1}{x}\frac{2(a_1^2 + a_2^2)}{a_1 a_2(1 + \beta^2)} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) + \cdots, \tag{3.9.33}$$

$$\phi = -\frac{1}{x}\frac{4(a_1 + a_2)}{(1 + \beta^2)a_1 a_2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) + \cdots, \tag{3.9.34}$$

用变换

$$x = \frac{1}{l}\left(r - \frac{m}{2}\right), \quad y = \text{const}. \tag{3.9.35}$$

可将 (3.9.33)~(3.9.34) 表示为球坐标的形式, 其中 l 和 m 是常量. 上面获得的新解是渐近平直的 3 参量解, 3 个参量是 (c', l, β). 此解描述一个带有电 (磁) 荷、偶极矩的孤立质量源的外部场. 场源的荷质比为

$$\frac{e}{m} = \frac{2c'}{(c'^2 + 1)}. \tag{3.9.36}$$

当 $c' = 0$ 时, 此解退化为 2 参量的偶极子解.

根据本节说明的生成技术, 我们再由 Tomimatsu-Sato 解生成一个新解. 重复用本节的方法, 由 T-S 解可得

$$F = \frac{(p^2x^2 - q^2y^4 - 1) - 2pqxy(x^2 - y^2)}{2px(x^2 - 1) + 2qy(y^2 - 1)}, \tag{3.9.37}$$

$$G = \frac{(p^2x^2 - q^2y^4 - 1) + 2pqxy(x^2 - y^2)}{2px(x^2 - 1) - 2qy(y^2 - 1)}. \tag{3.9.38}$$

经过同样冗长的但是直接的计算, 得到

$$\alpha = \frac{a_2 - a_1}{2}\frac{c^2 - \mathrm{d}^2 - a^2 + b^2}{a_1 a_2(c^2 - \mathrm{d}^2 + a^2 - b^2)}$$

$$+(a_1^2+a_2^2)(ac+b\mathrm{d})+(a_1^2-a_2^2)(bc+a\mathrm{d})$$
$$\times(a_1+a_2)(c^2-\mathrm{d}^2+a^2-b^2)+2(a_1+a_2)(ac+bd) \quad (3.9.39)$$

$$\phi=\frac{1}{2}\frac{2(a_1-a_2)(bc+ad)}{a_1a_2(c^2-d^2+a^2-b^2)}+(a_1^2-a_2^2)(ac+a\mathrm{d})+(a_1^2+a_2^2)(bc+bd) \quad (3.9.40)$$

式中

$$a=p^2x^4-q^2y^4-1,\quad b=2pqxy(x^2-y^2),$$
$$c=2px(x^2-1),\quad d=2qy(y^2-1), \quad (3.9.41)$$

$$a_1=c'+1,\quad a_2=c'-1,$$

c' 即 (3.9.36) 中的常数.

α 和 ϕ 的渐近展开式为

$$\alpha=1-\frac{1}{px}\frac{2(a_1^2+a_2^2)}{a_1a_2}-\frac{1}{p^2x^2}\frac{4qy(a_1^2-a_2^2)}{a_1a_2}+\cdots, \quad (3.9.42)$$

$$\phi=-\frac{1}{px}\frac{(a_1+a_2)(a_1^2-a_2^2)}{a_1a_2}+o\left(\frac{1}{p^2x^2}\right)+\cdots. \quad (3.9.43)$$

为了使 α 和 ϕ 在空间无限远处是渐近平直的，在得到 (3.9.39)~(3.9.40) 的过程中对 ϕ 进行了适当的的变换并附加了任意常数. 作变换 (3.9.35), 变至球坐标即可明显看出, 所得到的解是渐近平直的, 而且描述偶极子的场. 荷质比与 (3.9.36) 相同. 这就是说, 分别由 Kinnersley-Chitre 解和 T-S 解生成的两个电真空解具有相同的荷质比.

3.10　参量变换方法

Bonnor 由 Kerr 稳态真空解经过与上节类似的参量变换生成了一个爱因斯坦-麦克斯韦场方程的电真空解. 这一方法称为参量变换技术. Wang(1984) 用这一技术由 Tomimatsu-Sato 解生成了一个电磁真空解. 后来这一技术又被用来获得更复杂的解. 本节给出它的另一表述.

对已知的某一稳态度规

$$\mathrm{d}s^2=\mathrm{e}^{\mu}(\mathrm{d}t-\omega\mathrm{d}\varphi)^2-\mathrm{e}^{-u}[\mathrm{e}^{2v}(\mathrm{d}\rho^2+\mathrm{d}z^2)+\rho^2\mathrm{d}z^2] \quad (3.10.1)$$

中的某个常量进行适当变换, 便可获得新的稳态电磁真空度规

$$\mathrm{d}s^2=\mathrm{e}^{2\delta}\mathrm{d}t^2-\mathrm{e}^{-2\delta}[\mathrm{e}^{2v}(\mathrm{d}\rho^2+\mathrm{d}z^2)+\rho^2\mathrm{d}\varphi^2]. \quad (3.10.2)$$

在椭球坐标系中, 与 (3.10.1) 对应的引力场方程组可以写为下面两个方程:

$$(x^2-1)u_{,11}+(1-y^2)u_{,22}+2xu_{,1}-2yu_{,2} = -\mathrm{e}^{-2u}[(x^2-1)\psi_{,1}^2+(1-y^2)\psi_{,2}^2], \quad (3.10.3a)$$

$$(x^2-1)\psi_{,11}+(1-y^2)\psi_{,22}+2x\psi_{,1}-2y\psi_{,2} = 2[(x^2-1)u_{,1}\psi_{,1}+(1-y^2)u_{,2}\psi_{,2}]. \quad (3.10.3b)$$

式中 u 是 (3.10.1) 中的度规系数, ψ 为扭势.

与 (3.10.2) 对应的电磁真空场方程组在椭球坐标系中可以写成下面一对方程:

$$\begin{aligned}
&(x^2-1)\delta_{,11}+(1-y^2)\delta_{,22}+2x\delta_{,1}-2y\delta_{,2} \\
=&\mathrm{e}^{-2\delta}[(x^2-1)\psi_{,1}^2+(1-y^2)\phi_{,2}^2], \qquad (3.10.4a)\\
&(x^2-1)\phi_{,11}+(1-y^2)\phi_{,22}+2x\phi_{,1}-2y\phi_{,2} \\
=&2[(x^2-1)\delta_{,1}\phi_{,1}+(1-y^2)\delta_{,2}\phi_{,2}]. \qquad (3.10.4b)
\end{aligned}$$

式中 δ 是 (3.10.2) 中的度规系数, ϕ 为静电势.

比较 (3.10.3) 和 (3.10.4) 可以发现, 除符号不同外, 形式完全相同. 所以, 只要作相应的参量变换即可由已知解 (3.10.1) 得到新解 (3.10.2). 用这一技术, 由 Kinnersley 和 Chitre(1978) 的稳态解出发, 可生成一新解

$$\mathrm{e}^{\delta} = 1-\frac{4D}{E}, \quad \phi = 4\beta y\frac{F}{E}. \qquad (3.10.5)$$

式中

$$\begin{aligned}
D \equiv& x(x^2-1)\left[(x+1)^2(x^2-1)+\beta^2(x^2-y^2)\right] \\
&+2\beta^2y^2(x^2-y^2)(x+1)(x^2-2x+y^2), \\
E \equiv& \left[(x+1)^2(x^2-1)+\beta^2(x^2-y^2)\right]^2 \\
&-4\beta^2y^2(x+1)^2(x^2-2x+y^2)^2, \qquad (3.10.6)\\
F \equiv& (x^2-y^2)\left[(x+1)^2(x^2-1)+\beta^2(x^2-y^2)^2\right] \\
&+2x(x^2-1)(x+1)(x^2-2x+y^2).
\end{aligned}$$

这是一个新解, 它描述渐近平直静态偶极子的场.

用 (3.9.35) 变至球坐标, 作渐近展开, 得到 [见度规 (3.9.16)]

$$\mathrm{e}^{2\alpha} = 1-\frac{1}{r}\frac{8l}{1-\beta^2}+\frac{1}{r^2}\frac{4l\left[8l-m(1+\beta^2)\right]}{(1+\beta^2)^3}+o\left(\frac{1}{r^3}\right)+\cdots, \qquad (3.10.7)$$

$$\phi = \frac{4\beta(3+\beta^2)l^2}{(1+\beta^2)^2}\frac{\cos\theta}{r^2}+o\left(\frac{1}{r^3}\right)+\cdots.$$

因此, 这一新解描述一个质量为 $4l(1+\beta^2)$、偶极矩为 $\dfrac{4\beta(3+\beta^2)l^2}{(1+\beta^2)^2}$ 的源的外部场. 当 $\beta=0$ 时, 静电势 $\phi=0$, 退化为 $\delta=2$ 的爱因斯坦场方程的 Weyl 静态解. 此解在极轴 $(x=1, y=\pm1)$ 方向有奇异性.

在这里我们指出一个有趣的情况. 直接从 Kerr 解出发, 按 (3.9.11) 和 (3.9.15) 的规则取

$$F=-px-qy, \tag{3.10.8}$$

$$G=-px+qy.$$

在静电势 ϕ 的展开式中不含单极 (电荷或磁荷) 项. 但是将变换 (3.9.30) 用于 (3.10.8) 却得到了单极解, 其展开式为

$$\alpha=1-\frac{2(1+c'^2)}{1-c'^2}\frac{1}{px}-\frac{2}{p^2x^2}+\frac{4c'}{1-c'^2}\frac{qy}{p^2x^2}+\frac{q^2y^2}{p^2x^2}+\cdots, \tag{3.10.9}$$

$$\phi=1-\frac{4c'}{1-4c'}\frac{1}{px}-\frac{1}{p^2x^2}\left[2qy\frac{1+3c'^2}{c'(c'^2-1)}+\frac{2(1+c'^2)}{c'^2-1}\right]+\cdots.$$

求得荷质比为

$$\frac{e}{m}=\frac{2c'}{1+c'^2}. \tag{3.10.10}$$

这一新解可能与 Bonnor 解有某种联系.

3.11 Ehlers-Bonnor 生成解定理

Ehlers 曾经证明, 由爱因斯坦引力场方程的任意一个静态外部解, 都可以生成一个新的稳态外部解. 设已知的度规为 $g_{\mu\nu}$, 则生成的外部解为

$$g'_{\mu\nu}=\cos\mathrm{h}2U(\mathrm{e}^{2U}g_{\mu\nu}+\xi_\mu\xi_\nu)-(\cos\mathrm{h}2U)^{-1}u_\mu u_\nu, \tag{3.11.1}$$

$$\varepsilon_{\mu\nu\tau\lambda}U^{i\tau}\xi^\lambda=u_{[\mu j\nu]},\quad u_\sigma\xi^\sigma=-1,\quad \mathrm{e}^{2U}=-\xi_\sigma\xi^\sigma.$$

式中 ξ^μ 是类时 Killing 矢量. 在静场中一定存在一个矢量场 $\boldsymbol{u}$, 它满足条件

$$u_{\mu;\nu}=-\dot{u}_\mu u_\nu,\quad \ddot{u}_{[\mu}u_{\nu]}=0,\quad u^\sigma u_\sigma=-1. \tag{3.11.2}$$

以上“一点”表示 ∇_u. 由此式和 $U_{,\mu}\xi^\mu=0$ 可知关于 u_μ 的方程是可积的.

在此基础上, Bonnor(1979) 证明了, 由一个爱因斯坦场方程的静态真空解, 可以生成一个静态电磁真空解.

设度规

$$\mathrm{d}\bar{s}^2=\bar{g}_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu=e^U\mathrm{d}x^{0^2}-\mathrm{e}^{-U}h_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j \tag{3.11.3}$$

满足真空静态引力场方程 $\bar{R}_{\mu\nu}=0$, 则借助于辅助度规

$$\mathrm{d}s^2=g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu=\mathrm{d}x^{02}-h_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j. \tag{3.11.3a}$$

可以证明, 下面的生成解描述真空爱因斯坦–麦克斯韦场

$$\mathrm{d}\tilde{s}^2=\tilde{g}_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu\equiv\mathrm{e}^\zeta\mathrm{d}x^{0^2}-\mathrm{e}^{-\zeta}h_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j, \tag{3.11.4}$$

$$\mathrm{e}^\zeta=[16\pi(A^2+B^2)]^{-1}\left[\mathrm{sh}\left(\frac{1}{2}U+C\right)\right]^{-2} \tag{3.11.5}$$

$$F_{ij}=A\epsilon_{ijk}U^{jk}, \tag{3.11.6}$$

$$F_{oi}=B\mathrm{e}^\zeta U_{;i}=-F_{io}. \tag{3.11.7}$$

式中 A, B 和 C 为任意常数, 且

$$\epsilon_{ijk}\equiv(-g)^{1/2}\varepsilon_{ijk}. \tag{3.11.8}$$

U 满足下式:

$$R_{ik}+\frac{1}{2}U_{;i}U_{;k}=0,\quad U^{ji}_{;k}\equiv(g^{i\lambda}U_{;\lambda})_{jk}=0, \tag{3.11.9}$$

式中分号表示关于度规 (3.11.3a) 的协变微分.

下面证明生成解 (3.11.4)~(3.11.9) 确实满足场方程

$$\tilde{R}_{\mu\nu}=8\pi\left(F^\sigma_\mu F_{\sigma\nu}-\frac{1}{4}\tilde{g}_{\mu\nu}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\right), \tag{3.11.10}$$

$$F_{\mu\nu|\tau}+F_{\nu\tau|\mu}+F_{\tau\mu|\nu}=0, \tag{3.11.11}$$

$$F^{\mu\nu}_{\ |\nu}=0. \tag{3.11.12}$$

式中指标的上升和下降由 $\tilde{g}^{\mu\nu}$ 和 $\tilde{g}_{\mu\nu}$ 完成, $F_{\mu\nu|\tau}$ 表示 $F_{\mu\nu}$ 关于 $g_{\alpha\beta}$ 取协变微分.

注意到

$$\tilde{g}^{\alpha\beta}\tilde{g}_{\beta\lambda}=\delta^\alpha_\lambda,\quad g^{\alpha\beta}g_{\beta\lambda}=\delta^\alpha_\lambda, \tag{3.11.13}$$

由度规 (3.11.3) 和 (3.11.4) 得到

$$\begin{gathered}\tilde{g}^{ik}=\mathrm{e}^\zeta g^{ik},\\ \tilde{g}^{oi}=g^{oi}=0,\\ \tilde{g}^{oo}=\mathrm{e}^{-\zeta};\end{gathered} \tag{3.11.14}$$

$$\tilde{\Gamma}^i_{jk}=\tilde{\Gamma}^i_{jk}-\frac{1}{2}\delta^i_j\xi_{;k}=\frac{1}{2}\delta^i_k\xi_{;j}+\frac{1}{2}g_{jk}\xi^{;i},$$

$$\tilde{\Gamma}^o_{oi} = \frac{1}{2}\xi_{;i}, \tag{3.11.15}$$

$$\tilde{\Gamma}^i_{oo} = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2\zeta}\xi^{;i},$$

$$\tilde{\Gamma}^{o2}_{i} = \tilde{\Gamma}^i_{io} = \tilde{\Gamma}^o_{oo} = 0.$$

由此, 可将场方程 (3.11.10) 化为

$$\begin{aligned}\tilde{R}_{ik} \equiv & R_{ik} + \frac{1}{2}\xi_{;i}\xi_{;k} - \frac{1}{2}g_{ik}\xi^{;\lambda}_{;\lambda}\\ =& 8\pi(\mathrm{e}^{\xi}g^{ab}F_{ib}F_{ka} + \alpha^{-\xi}F_{oi}F_{ok}\\ & - \frac{1}{4}g_{ik}\mathrm{e}^{\xi}g^{am}g^{bn}F_{mn}F_{ab} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\zeta}g_{ik}g^{ab}F_{oa}F_{ab}),\end{aligned} \tag{3.11.16}$$

$$\tilde{R}_{oi} \equiv 8\pi\mathrm{e}^{\zeta}g^{ab}F_{ia}F_{ab} = 0, \tag{3.11.17}$$

$$\tilde{R}_{oo} \equiv \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2\zeta}\xi^{;a}_{;a} = 4\pi\mathrm{e}^{\zeta}\left(g^{ab}F_{oa}F_{ab} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2\zeta}g^{ab}g^{mn}F_{am}F_{bn}\right). \tag{3.11.18}$$

将 (3.11.4)~(3.11.9) 直接代入, 容易证明 (3.11.16)~(3.11.18) 成立, 即生成解满足场方程 (3.11.10).

由 (3.11.4)~(3.11.5), 可将场方程 (3.11.11) 的左端化为

$$F_{ij|k} + F_{jk|i} + F_{ki|j} = F_{ij;k} + F_{kj;i} + F_{ki;j} \tag{3.11.19}$$

和

$$F_{oi|j} + F_{ij|o} + F_{jo|i} = F_{oi;j} + F_{jo;i}. \tag{3.11.20}$$

由 (3.11.6) 和 (3.11.7) 可知, 上二式右边均为零 (注意到 $\eta_{ijkl;l} = 0$). 于是证明了生成解满足场方程 (3.11.11). 同理可证, 生成解也满足场方程 (3.11.12). 方程 (3.11.9) 是 $\bar{R}_{\mu\nu} = 0$ 的条件.

下面应用这一生成技术由 Weyl 解获得一新解. 可以把 Weyl 解写成 $\bar{g}_{\mu\nu}$

$$\mathrm{d}\bar{s}^2 = \mathrm{e}^U\mathrm{d}t^2 - \mathrm{e}^{-U}[\mathrm{e}^w(\mathrm{d}z^2 + \mathrm{d}\rho^2) + \rho^2\mathrm{d}\varphi^2], \tag{3.11.21}$$

其中 U 和 w 满足

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\rho^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial\rho} = 0, \tag{3.11.22}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \rho\frac{\partial U}{\partial\rho}\frac{\partial U}{\partial z}, \tag{3.11.23}$$

$$\frac{\partial w}{\partial\rho} = \frac{1}{2}\rho\left[\left(\frac{\partial U}{\partial\rho}\right)^2 - \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right]. \tag{3.11.24}$$

U 和 w 只含 ρ 和 z.

按上述生成技术, 生成的电磁解为

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{d}\tilde{s}^2 = \mathrm{e}^{\zeta}\mathrm{d}t^2 - \mathrm{e}^{-\zeta}[\mathrm{e}^{w}(\mathrm{d}z^2+\mathrm{d}\rho^2)+\rho^2\mathrm{d}\varphi^2],\\
&\mathrm{e}^{\xi} = [16\pi(A^2+B^2)]^{-1}\left[\sinh\left(\frac{1}{2}U+C\right)\right]^{-2},
\end{aligned}
\tag{3.11.25}
$$

$$
\begin{aligned}
&F_{13} = A\rho\frac{\partial U}{\partial \rho},\\
&F_{23} = -A\rho\frac{\partial U}{\partial z},\\
&F_{01} = B\mathrm{e}^{\xi}\frac{\partial U}{\partial z},\quad F_{02} = B\mathrm{e}^{\xi}\frac{\partial U}{\partial \rho}.
\end{aligned}
$$

式中 U 和 w 满足 (3.11.22)~(3.11.24); 坐标取为

$$
x^1 = z,\quad x^2 = \rho,\quad x^3 = \varphi,\quad x^0 = t. \tag{3.11.26}
$$

解 (3.11.25) 还可描述柱面电磁波.

令

$$
A = \mathrm{i}\alpha,\quad B = \mathrm{i}\beta,\quad U = V + 2\log\mathrm{i}.
$$

式中 α 和 β 是实常数, U 和 V 是 ρ 和 z 的函数. 作复变换

$$
Z = \mathrm{i}t,\quad T = \mathrm{i}z.
$$

则新解为

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{d}s^2 = \mathrm{e}^{w-\xi}\mathrm{d}T^2 - \mathrm{e}^{\xi}\mathrm{d}Z^2 - \mathrm{e}^{w-\xi}\mathrm{d}\rho^2 - \rho^2\mathrm{d}\varphi^2,\\
&\mathrm{e}^{\zeta} = [16\pi(\alpha^2+\beta^2)]^{-1}\left[\mathrm{ch}\left(\frac{1}{2}U+C\right)\right]^{-2},
\end{aligned}
\tag{3.11.27}
$$

$$
\begin{aligned}
&F_{12} = \beta\mathrm{e}^{\xi}\frac{\partial V}{\partial \rho},\quad F_{23} = \alpha\rho\frac{\partial V}{\partial T},\\
&F_{01} = -\beta\mathrm{e}^{\zeta}\frac{\partial V}{\partial T},\quad F_{03} = \alpha\rho\frac{\partial V}{\partial \rho}.
\end{aligned}
$$

式中 V 和 w 满足

$$
\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \rho} - \frac{\partial^2 V}{\partial T^2} = 0, \tag{3.11.28}
$$

$$
\frac{\partial w}{\partial T} = \rho\frac{\partial V}{\partial \rho}\frac{\partial V}{\partial T}, \tag{3.11.29}
$$

$$
\frac{\partial w}{\partial \rho} = \frac{1}{2}\rho\left[\left(\frac{\partial V}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right].
$$

这里, $V(\rho,T)$ 就是柱面波方程 (3.11.28) 的一个实解.

与前面的证明过程类似, 还可以证明一个生成解的定理.

定理　若已知一个真空解 $g_{\mu\nu}$(满足 $R_{\mu\nu}=0$), 则生成解为

$$\mathrm{e}^{\zeta}=\{C-[4\pi(A^2+B^2)]^{1/2}U\}^{-2},$$
$$F_{ij}=A\eta_{ijk}U_{;k}, \tag{3.11.30}$$

$$F_{0k}=B\mathrm{e}^{\zeta}U_{;k}=-F_{k0}$$

. 式中 A,B 和 C 为任意常数; U 满足

$$U_{;i}^{;i}=0.$$

用完全类似的推导可以证明 (3.11.30) 满足 E-M 场方程 (3.11.10)~(3.11.12).

现在我们对本节所述的生成技术进行一些必要讨论. 本节开头叙述的 Ehlers 证明的定理还可以换一种形式表述:

如果度规 $\tilde{g}_{\mu\nu}$[见 (3.11.3)] 满足真空引力场方程 $\bar{R}_{\mu\nu}=0$, 则生成解可表示为

$$\mathrm{d}\sigma^2=\mathrm{e}^{\mu}(\mathrm{d}x^0-u_i\mathrm{d}x^i)^2-\mathrm{e}^{-\mu}h_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j, \tag{3.11.31}$$

$$\mathrm{e}^{\mu}=A^{-1}[\mathrm{ch}(U+C)]^{-1}, \tag{3.11.32}$$
$$\frac{\partial u_i}{\partial x^k}-\frac{\partial u_k}{\partial x^i}=A_{\in ikl}U^{;l},$$

式中 U 是 (3.11.3) 中出现的函数, 它满足

$$R_{ik}+\frac{1}{2}U_{;i}U_{;k}=0,\quad U_{;i}^{;i}=0. \tag{3.11.33}$$

可证明此解描述稳态真空场.

将解 (3.11.31)~(3.11.33) 和 $B=0$ 时的解 (3.11.4)~(3.11.9) 比较, 我们发现二者形式相似, 前者描述稳态 (包括旋转场源的) 外部场, 后者描述静态外部纯磁真空场. 二者形式相似暗示了磁源引力场和旋转质量的引力场之间存在某种对应关系。

当方程 (3.11.9) 的特解已知, U 的具体形式确定时, 由前面的生成技术得到的一类解往往具有物理意义. 如果度规 (3.11.3) 具有辐射对称性, 则可求得 (3.11.9) 的通解; 生成解描述辐射对称的引力–电磁场, 是具有电场和磁场的复合解.

应指出，虽然 Weyl 解 (3.11.21) 是静态辐射对称外部场的通解, 但是生成解 (3.11.25) 却不是通解. 从物理的观点看, 这个生成解只含有一个调和函数 U, 它是用来引出电场、磁场和引力场三种场源的. 假设用 U 选择上述一种场源, 如电场, 则其他两种场源或者不存在或者与电场的相似. 例如我们选择 U 和任意常数使电

场的场源为点电荷, 则另外两种场源要么没有, 要么是点质量和磁荷, 不会出现具有磁偶极矩的点质量源.

由定理 (3.11.30) 得到的电磁场尽管在对称性方面没有受到限制, 但其物理内容是很特殊的. 在 (3.11.30) 中令 $A=0$, 场源就是一群粒子, 每个粒子的荷质比都相同, 于是作用于每个粒子上的引力和电场力相平衡.

3.12 孤立子方法

在度规张量 $g_{\mu\nu}$ 仅依赖于两个变量的情况下, 引力场方程的解法和散射问题相反. 稳态辐射对称引力场就属于这种情况. 解引力场方程的孤立子 (soliton) 方法是 20 世纪 70 年代末由苏联学者创造并发展起来的, 是一种十分简洁、优美的方法, 有广泛的应用价值。对于稳态辐射对称引力场，由一个初始解代入一组和引力场方程等效但简化了的微分方程, 求出孤立子 (极点) 解, 从而得到引力场方程的新解. 例如, 把平直空–时度规作为初始解, 用孤立子方法生成的 2-孤立子解即为 Kerr-NUT 解, 生成的一个最简单的 n–孤立子解描述场源为 $\frac{n}{2}$ 个 Schwarzschild 质量源和各阶质量多极矩的引力场. 这些 Schwarzschild 源很像由于平直空–时背景的“扰动”而形成的孤立子 (极点). 本章后几节将较详细地讨论这种生成新解的方法.

稳态辐射对称度规可写为

$$\mathrm{d}s^2 = g_{ab}\mathrm{d}x^a\mathrm{d}x^b + f(\mathrm{d}\rho^2+\mathrm{d}z^2), \tag{3.12.1}$$

式中 g_{ab} 和 f 都只含两个变量 ρ 和 z, 坐标 $(x^0,x^1,x^2,x^3)=(t,\varphi,\rho,z)$, 取号差为 $+2$, 拉丁字母 $a,b,c,d=1,2$, 分别对应于 t 和 $\varphi; i,j,k,l=1,2,3$, 对应于空间坐标，希腊字母取 $0,1,2,3$. 下面把矩阵 (g_{ab}) 写成 $g,(U_{ab})$ 写成 $U,\cdots\cdots$

不失一般性, 可以给矩阵 g 加上附加条件 (与号差 $+2$ 对应)

$$\det g = -\rho^2. \tag{3.12.2}$$

可以证明, 具有度规 (3.12.1) 和 (3.12.2) 的真空引力场方程可以分解为两组方程.

第一组用来确定 g

$$(\rho g_{,\rho}g^{-1})_{,\rho} + (\rho g_{,z}g^{-1})_{,z} = 0. \tag{3.12.3}$$

第二组由 (3.12.3) 给出的解 g 来确定 f

$$(\ln f)_{,\rho} = -\rho^{-1} + (4\rho)^{-1}Sp(U^2-V^2), \tag{3.12.4}$$

$$(\ln f)_{,z} = (2\rho)^{-1}Sp(UV). \tag{3.12.5}$$

式中

$$U\equiv \rho g_{,\rho}g^{-1},\quad V\equiv \rho g_{,z}g^{-1}. \tag{3.12.6}$$

3.13　矩阵 g 的 n-孤立子解

定义可对易的微分算符 D_1 和 D_2

$$D_1 \equiv \partial_z - \frac{2\lambda^2}{\lambda^2+\rho^2}\partial_\lambda, \quad D_2 \equiv \partial_\rho + \frac{2\lambda\rho}{\lambda^2+\rho^2}\partial_\lambda. \tag{3.13.1}$$

式中 λ 是不依赖于 ρ 和 z 的复参量. 这时可以将矩阵方程 (3.12.3) 的 L-A 偶以变量 ρ, z 表示出来 (Belinsky 和 Zakharov,1978)

$$D_1\psi = \frac{\rho V - \lambda U}{\lambda^2+\rho^2}\psi, \quad D_2\psi = \frac{\rho U + \lambda V}{\lambda^2+\rho^2}\psi. \tag{3.13.2}$$

所要求的矩阵 $g(\rho,z)$ 即为 $\lambda=0$ 时的 $\psi(\lambda,\rho,z)$

$$g(\rho,z) = \psi(0,\rho,z). \tag{3.13.3}$$

这样, 解引力场方程便归结为解方程 (3.12.3). 这一过程的程序是: 由场方程的一个已知解 g_0, 代入 (3.12.6) 求出 U_0, V_0, 再代入方程 (3.13.2) 积分, 求出一个初解 $\mu_0(\lambda,\rho,z)$; 然后令

$$\psi = \chi\psi_0, \tag{3.13.4}$$

代入 (3.13.2), 得到关于 χ 的方程

$$\begin{aligned} D_1\chi &= \frac{\rho V - \lambda U}{\lambda^2+\rho^2}\chi - \chi\frac{\rho V_0 - \lambda U_0}{\lambda^2+\rho^2}, \\ D_2\chi &= \frac{\rho U + \lambda V}{\lambda^2+\rho^2}\chi - \chi\frac{\rho U_0 + \lambda V_0}{\lambda^2+\rho^2}. \end{aligned} \tag{3.13.5}$$

解此方程求出 χ, 代回 (3.13.4) 和 (3.13.3), 便获得了引力场方程的新解 g.

为了保证 $g_{\mu\nu}$ 是实的而且是对称的, 应该给方程 (3.13.5) 加上适当的附加条件, 令

$$\bar{\chi}(\bar{\lambda}) = \chi(\lambda), \quad \bar{\psi}(\bar{\lambda}) = \psi(\lambda), \tag{3.13.6}$$

便可保证 $g_{\mu\nu}$ 是实的, 式中 $\bar{\lambda}$ 表示 λ 的复共轭. 令

$$g = \chi(-\rho^2/\lambda)g_0\tilde{\chi}(\lambda), \tag{3.13.7}$$

便可保证 $g_{\mu\nu}$ 是对称的, 式中 $\tilde{\chi}$ 表示 χ 的转置. 此外, (3.13.7) 和 (3.13.3) 相容, 必有

$$\chi(\infty) = I. \tag{3.13.8}$$

式中 I 是单位矩阵.

矩阵 $\chi(\lambda,\rho,z)$ 的 n-孤立子解给出这样的图像: 在参量 λ 的复平面内, 矩阵 χ 有 n 个孤立奇点 (极点). 这时 $\chi(\lambda,\rho,z)$ 具有形式

$$\chi = I + \sum_{k=1}^{n} \frac{R_k}{\lambda - \mu_k}. \tag{3.13.9}$$

式中矩阵 $R_k = R_k(\rho,z)$, 函数 $\mu_k = \mu_k(\rho,z)$.

将表达式 (3.13.9) 代入方程 (3.13.5) 和 (3.13.7) 便得到关于函数 $\mu_k(\rho,z)$ 和矩阵 $R_k(\rho,z)$ 的方程. 在 $\lambda=\mu_k$ 处, 式 (3.13.5) 的左端不应存在二阶极点, 按这一要求, 得到 μ_k 必须满足的方程

$$\mu_{k,z} + 2\mu_k^2(\mu_k^2+\rho^2)^{-1} = 0, \tag{3.13.10}$$

$$\mu_{k,\rho} - 2\rho\mu_k(\mu_k^2+\rho^2)^{-1} = 0.$$

以上两方程的解是二次代数方程

$$\mu_k^2 - 2(\omega_k - z)\mu_k - \rho^2 = 0 \tag{3.13.11}$$

的两个根, 式中 ω_k 是任意复常数.

这样, 每一个脚标 k(即对于每一个极点) 有一个任意常数 ω_k, 确定 $\mu_k(\rho,z)$ 的两个可能解

$$\mu_k = \omega_k - z \pm [(\omega_k - z)^2 + \rho^2]^{1/2}. \tag{3.13.12}$$

式 (3.13.9) 中的矩阵 R_k 是降秩了的, 其分量可写为

$$(R_k)_{ab} = n_a^{(k)} m_b^{(k)} \tag{3.13.13}$$

的形式. 二维矢量 $m_a^{(k)}$ 可以根据在点 $\lambda=\mu_k$ 处满足 (3.13.5) 直接求出, 然后由条件 (3.13.7) 便可确定 $n_a^{(k)}$. 结果, 矢量 $m_a^{(k)}$ 用已知矩阵 $\psi_0(\lambda,\rho,z)$ 表示, 其中 $\lambda=\mu_k$. 具体形式为

$$m_\alpha^{(k)} = m_{c0}^{(k)}[\psi_0^{-1}(\mu_k,\rho,z)]_{ca}. \tag{3.13.14}$$

式中 $m_{c0}^{(k)}$ 为任意常数, ψ_0^{-1} 表示 ψ_0 的逆矩阵, 重复指标无论在上方还是在下方均表示取和 (下同).

求出了 $m_\alpha^{(k)}$ 以后, $n_\alpha^{(k)}$ 由 n 阶线性代数方程组确定

$$\sum_{l=1}^{n} \Gamma_{kl} n_\alpha^{(l)} = \mu_k^{-1} m_c^{(k)} (g_0)_{ca}, \quad k=1,2,\cdots,n. \tag{3.13.15}$$

式中 Γ_{kl} 为对称矩阵

$$\Gamma_{kl} \equiv m_c^{(k)}(g_0)_{cb} m_b^{(l)} (\rho^2 + \mu_k\mu_l)^{-1}. \tag{3.13.16}$$

引入 Γ_{kl} 的逆矩阵 D_{kp}

$$\sum_{p=1}^{n} D_{kp}\Gamma_{pl} = \delta_{kl}, \tag{3.13.17}$$

则 (3.13.15) 改写为

$$n_a^{(k)} \equiv \sum_{l=1}^{n} D_{lk}\mu_l^{-1} N_\alpha^{(l)}, \tag{3.13.18}$$

式中

$$N_\alpha^{(k)} \equiv m_c^{(k)}(g_0)_{\alpha l}. \tag{3.13.19}$$

至此, 新解 g_{ab} 已完全确定. 由 (3.12.7),(3.12.8) 和 (3.12.13) 有

$$g = \psi(0) = \chi(0)\psi_0(0) = \chi(0)g_0 = \left(I - \sum_{k=1}^{n} R_k\mu_k^{-1}\right) g_0. \tag{3.13.20}$$

现在讨论 g_{ab} 的对称性和如何保证 g 是实矩阵的问题. 将 (3.13.13),(3.13.18) 和 (3.13.19) 代入矩阵 g 的表达式, 得到

$$g_{ab} = (g_0)_{ab} - \sum_{k,l=1}^{n} D_{kl}\mu_k^{-1}\mu_l^{-1} N_a^{(k)} N_b^{(l)}. \tag{3.13.21}$$

由上式明显看出 $g_{ab} = g_{ba}$. 只要所有函数 $\mu_k(\rho,z)$ 和解中所含有的任意常数都取实数, 即可保证 g_{ab} 是实数. 实际上, 初始解 $\psi_0(\lambda,\rho,z)$ 总满足 (3.13.6), 因此在点 $\lambda = \mu_k, \psi_0(\lambda)$ 是实数. 又由 (3.13.14) 可知, 任意常数 $m_{c0}^{(k)}$ 应该取实数. 假设函数 $\mu_k (k = 1, 2, \cdots)$ 中有一些是复数, 由 (3.13.6) 可知, 所有的复数必须以共轭对的形式出现: 每一个复极点 $\lambda = \mu$, 都应该对应一个与它共轭的极点 $\lambda = \overline{\mu}$. 假设有一对这样的极点 $\lambda = \mu_p$ 和 $\lambda = \mu_q$, $\mu_p = \overline{\mu}_q$. 由 (3.13.14) 有

$$m_\alpha^{(p)} = m_{c0}^{(p)}[\psi_0^{-1}(\mu_p,\rho,z)]_{ca},$$
$$m_a^{(q)} = m_{c0}^{(q)}[\psi_0^{-1}(\mu_q,\rho,z)]_{ca}.$$

只要把任意常数 $m_{c0}^{(p)}$ 和 $m_{c0}^{(q)}$ 取作共轭复数, 就可以保证矩阵 g 是实的. 由于 $\psi_0(\overline{\lambda}) = \bar{\psi}_0(\lambda)$, 所以此时矢量 $m_\alpha^{(p)}$ 和 $m_\alpha^{(q)}$ 也是共轭的. 因此我们可以构成一个规则: 为了保证矩阵 g 是实的, 必须这样选择 (3.12.14) 中的任意常数 $m_{c0}^{(k)}$, 使与实数极点 $\lambda = \mu_k$ 对应的矢量 $m_\alpha^{(k)}$ 是实数, 而与每一对共轭极点 $\lambda = \mu_p$ 和 $\lambda = \mu_q = \bar{\mu}_p$ 对应的矢量 $m_\alpha^{(p)}$ 和 $m_\alpha^{(q)}$ 是复数共轭的.

矩阵 g 除了满足对称性和实数的要求以外, 还应满足条件 (3.12.2). 计算矩阵 g 的行列式用 (3.13.21) 不方便, 我们采用另外的方式.

分析表明, 前面用 n-孤立子解描述的背景解 (初始解) 的扰动过程和下面要描述的一个一个地引入单孤立子的过程是等效的. 这过程的第一步是由背景矩阵 g_0 向包含一个孤立子的矩阵跃迁, 这对应于在矩阵 χ(即 χ_1) 中只有一个极点 $\lambda=\mu_1$. 由前面得到的一般结果, 很容易得到单孤立子解. 矩阵 $x_1(\lambda)$ 和它的逆 $x_1^{-1}(\lambda)$ 可写为

$$\chi_1 = I + (\mu_1^2+\rho^2)\mu_1^{-1}(\lambda-\mu_1)^{-1}P_1,$$
$$\chi_1^{-1} = I - (\mu_1^2+\rho^2)(\rho^2+\lambda\mu_1)^{-1}P_1, \tag{3.13.22}$$

式中矩阵 P_1 的表示式为

$$(P_1)_{ab} = m_c^{(1)}(g_0)_{ca}m_b^{(1)}/m_d^{(1)}(g_0)_{df}m_f^{(1)}. \tag{3.13.23}$$

由此还可得到 P_1 的一些性质

$$P_1^2=P_1, \quad \mathrm{Sp}P_1=1, \quad \det P_1=0. \tag{3.13.24}$$

函数 μ_1 和 $m_\alpha^{(1)}$ 由 (3.13.12) 和 (3.13.14) 确定, 我们得到

$$g_1=\chi_1(0)g_0=[I-(\mu_1^2+\rho^2)\mu_1^{-2}P_1]g_0. \tag{3.13.25}$$

由任意二阶矩阵 F 满足的一般关系式

$$\det(I+F)=1+\mathrm{Sp}F+\det F$$

和性质 (3.13.24), 得到

$$\det[I-(\mu_1^2+\rho^2)\mu_1^{-2}P_1]=-\rho^2\mu_1^{-2}, \tag{3.13.26}$$

因此

$$\det g_1=-\rho^2\mu_1^{-2}\det g_0. \tag{3.13.27}$$

第二步是把解 g_1 看作新的"初始解", 即背景度规, 再对它附加上一个与 $\lambda=\mu_2$ 对应的孤立子, 重复前面的程序. 为此, 先组成一个新的背景矩阵函数 $\psi=\chi_1\psi_0$, 取它的逆 ψ^{-1}(在点 $\lambda=\mu_2$), 然后求得对应的矢量 $m_\alpha^{(2)}$

$$m_\alpha^{(2)}=m_{c0}^{(2)}[\psi_1^{-1}(\mu_2,\rho,z)]_{ca},$$

并与 (3.13.23) 类似地构成 P_2

$$(P_2)_{ab}=m_c^{(2)}(g_1)_{ca}m_b^{(2)}/m_d^{(2)}(g_1)_{df}m_f^{(2)}.$$

P_2 具有和 P_1 同样的性质 (3.13.24).

为了构成矩阵 $\chi_2(\lambda)$, 只要将 (3.13.26) 中的脚标 $1 \to 2$. 我们得到 2- 孤立子解 g_2

$$g_2 = [I - (\mu_2^2 + \rho^2)\mu_2^{-2} P_2][I - (\mu_1^2 + \rho^2)\mu_1^{-2} P_1]g, \tag{3.13.28}$$

其中所有的 P_k 均满足条件

$$P_k^2 = P_k, \quad \mathrm{Sp}P_k = 1, \quad \det P_k = 0. \tag{3.13.29}$$

显然, 随着孤立子个数 k 的增多, 矩阵 P_k 的表达式越来越复杂. 因此, 这种求解的方法不如前面直接求 n-孤立子解的方法简便. 但是把解表示成 (3.13.28) 的形式对于计算行列式 $\det g$ 却很有利, 因为要计算 $\det g$ 只需用到 P_k 的性质 (3.13.29), 不需要知道 P_k 的具体形式, (3.13.28) 中每一个因子对 $\det g$ 的贡献都很容易算出, 结果得到

$$\det g = (-1)^n \rho^{2n} \left(\prod_{k=1}^{n} \mu_k^{-2} \right) \det g_0. \tag{3.13.30}$$

考虑到 (3.12.2), 由上式可以断定 n 必为偶数, 因为当 n 是奇数时将破坏度规的号差. 所以, 在物理空–时背景上, 静态辐射对称的孤立子只能成对地出现, 形成束缚的 2-孤立子态.

现在的任务是使 g 满足 (3.12.2), 这样的解我们称为物理解, 以 $g^{(\phi)}$ 表示. 由 (3.12.3) 可得

$$\rho^{-1}[\rho(\ln\det g)_{,\rho}]_{;\rho} + (\ln\det g)_{,zz} = 0.$$

根据上式容易证明, 满足方程 (3.12.3) 和条件 (3.12.2) 的 $g^{(\phi)}$ 可写为

$$g^{(\phi)} = -\rho(-\det g)^{\frac{1}{2}} g. \tag{3.13.31}$$

将 (3.13.30) 和 $\det g_0 = -\rho^2$ 代入 (3.13.21), 得到度规张量 $g^{(\phi)}$ 的表达式

$$g^{(\phi)} = -\rho^n \left(\sum_{k=1}^{n} \mu_k \right) g, \quad \det g^{(\phi)} = -\rho^2. \tag{3.13.32}$$

式中的 g 由 (3.13.21) 给出.

3.14 度规系数 f 的计算

计算度规系数 $\tilde{f}$ 可分两步进行: 第一步, 将 (3.13.21) 得到的非物理解 g 代入 (3.12.4) 和 (3.12.5), 然后求出 f. 第二步, 在 (3.12.4) 和 (3.12.5) 中将 g 换为 $g^{(\phi)}$, 从而得到 $f^{(\phi)}$.

与单孤立子解 (3.13.22)~(3.13.27) 对应的度规系数 f 以 f_1 表示, 按上面的程序计算, 得到

$$f_1 = C_1 f_0 \rho \mu_1^2 (\mu_1^2 + \rho^2)^{-1} \Gamma_{11}. \tag{3.14.1}$$

式中, C_1 是任意常数, f_0 是初始解 (背景度规系数), 与 g_0 对应, Γ_{11} 的表示式为

$$\Gamma_{11} = (\mu_1^2 + \rho^2)^{-1} m_c^{(1)} (g_0)_{cb} m_b^{(1)}, \tag{3.14.2}$$

矢量 $m_\alpha^{(1)}$ 由 (3.13.14) 得到 $(k = 1)$.

接着, 把 g_1 和 f_1 当作初始解, 重复上面的过程, 得到与 2-孤立子解 (极点 $\lambda = \mu_1$ 和 $\lambda = \mu_2$) 相对应的度规系数 f_2. 这一过程实际上只要作些代数运算, 积分只在由 $(g_0, f_1) \to (g_1, f_1)$ 的过程中用. 经过不复杂的代数运算, 得到

$$f_2 = C_2 f_0 \rho^2 \mu_1^2 \mu_2^2 (\mu_1^2 + \rho^2)^{-1} (\mu_2^2 + \rho^2)^{-1} (\Gamma_{11}\Gamma_{22} - \Gamma_{12}^2). \tag{3.14.3}$$

式中, C_2 是任意常数, f_0 即 (3.14.1) 中的背景解 Γ_{11} 和 Γ_{22}, Γ_{12} 即矩阵 (3.13.16) 的分量.

(3.14.1) 和 (3.14.3) 告诉我们, 在 n-孤立子的情况下, 度规系数 f 应具有形式

$$f_n = C_n f_0 \rho^n \left(\prod_{k=1}^{n} \mu_k^2 \right) \left[\prod_{k=1}^{n} (\mu_k^2 + \rho^2) \right]^{-1} \det \Gamma_{kl}. \tag{3.14.4}$$

式中 $k, l = 1, 2, \cdots, n$. 此式的证明我们在下节最后给出.

现在确定系数 $f_n^{(\phi)}$. 在式 (3.12.4) 和 (3.12.5) 中, 将 g 代之以 (3.13.32) 中的 $g^{(\phi)}$, 便得到 $f^{(\phi)}$. 首先由 (3.12.6) 和 (3.13.31) 得到 $U^{(\phi)}$ 和 $V^{(\phi)}$ 的表达式:

$$U^{(\phi)} = \rho g_{,\rho}^{(\phi)} g^{(\phi)-1} = U + \left[1 - \frac{1}{2} \rho (\ln\det g)_{,\rho} \right] I,$$

$$V^{(\phi)} = \rho g_{,z}^{(\phi)} g^{(\phi)-1} = V - \frac{1}{2} \rho (\ln\det g)_{,z} I.$$

将上式代入 (3.12.4) 和 (3.12.5) 中 (替换 U 和 V), 得到

$$f_n^{(\phi)} = f_n \rho^{1/2} Q^{-1}. \tag{3.14.5}$$

式中 f_n 是按 g 计算的度规系数 (3.14.4), 函数 Q 满足方程

$$(\ln Q)_{,z} = \frac{1}{4} \rho (\ln\det g)_{,\rho} (\ln\det g)_{,z},$$

$$(\ln Q)_{,\rho} = \frac{1}{8} \rho [(\ln\det g)_{,\rho}^2 - (\ln\det g)_{,z}^2].$$

在上式中代入 $\det g$ 的表达式 (3.13.30), 积分得

$$Q^{-1} = A\rho^{-(n^2+2n+1)/2}\left(\prod_{k=1}^{n}\mu_k\right)^{n-1} \times \left[\prod_{k=1}^{n}(\mu_k^2+\rho^2)\prod_{k,l=1}^{n}(\mu_k-\mu_l)^2\right]. \quad (3.14.6)$$

式中 A 为常数. 将 (3.14.6) 和 (3.14.4) 代入 (3.14.5), 得到物理的度规系数 $f_n^{(\phi)}$ 的明显表达式:

$$f_n^{(\phi)} = C_n^{(\phi)} f_0 \rho^{-n^2/2}\left(\prod_{k=1}^{n}\mu_k\right)^{n+1} \times \left[\prod_{k>l=1}^{n}(\mu_k-\mu_l)^2\right]^{-1}\det\Gamma_{kl}. \quad (3.14.7)$$

我们给出乘积 $\prod\limits_{k>l=1}^{n}(\mu_k-\mu_l)^2$ 的前几个表达式:

$$\begin{aligned}&\prod_{k>l=1}^{n}(\mu_k-\mu_l)^2\\ &=\begin{cases}1, & \text{当} n=1;\\ (\mu_2^2-\mu_1^2)^2, & \text{当} n=2;\\ (\mu_3-\mu_1)^2(\mu_3-\mu_2)^2(\mu_2-\mu_1)^2, & \text{当} n=3;\\ \vdots\end{cases}\end{aligned} \quad (3.14.8)$$

n-孤立子解的最后形式为

$$ds^2 = f_n^{(\phi)}(d\rho^2+dz^2) + g_{ab}^{(\phi)}dx^a dx^b. \quad (3.14.9)$$

式中 $f_n^{(\phi)}$ 由式 (3.14.7) 给出, $g_{ab}^{(\phi)}$ 由式 (3.13.32) 和 (3.13.21) 给出.

作为普遍方法 (孤立子方法) 的应用，下面我们由平直度规生成 2-孤立子解和 n-孤立子解, 它们将给出 Kerr-NUT 解和多个 Schwarzschild 源以及多极矩的解.

3.15 平直时空背景上的 2-孤立子解

本节中仍取号差为 (+2). 平直空–时度规可写为

$$ds^2 = -dt^2 + \rho^2 d\varphi^2 + d\rho^2 + dz^2, \quad (3.15.1)$$

即 $f_0 = 1, g_0 = \mathrm{diag}(-1, \rho^2)$; 显然有 $\det g_0 = -\rho^2$. 容易得到 $V_0 = 0, U_0 = \mathrm{diag}(0, 2)$. 代入 (3.13.2) 得到

$$\psi_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \rho^2 - 2z\lambda - \lambda^2, \end{pmatrix}, \quad (3.15.2)$$

显然满足条件 $\psi_0(0)=g_0$. 由此式和 (3.13.14)、(3.13.11), 容易得到

$$m_0^{(k)}=C_0^{(k)},\quad m_1^{(k)}=C_1^{(k)}\mu_k^{-1}. \tag{3.15.3}$$

式中 $C_0^{(k)}$ 和 $C_1^{(k)}$ 是任意常数. 再把所得各式代入 (3.13.16), 得到 Γ_{kl}

$$\Gamma_{kl}=[-C_0^{(k)}C_0^{(l)}+C_1^{(k)}C_1^{(l)}\mu_k^{-1}\mu_l^{-1}\rho^2](\rho^2+\mu_k\mu_l)^{-1}. \tag{3.15.4}$$

由 (3.13.19) 得到 $N_a^{(k)}$ 的表达式

$$N_0^{(k)}=-C_0^{(k)},\quad N_1^{(k)}=C_1^{(k)}\mu_k^{-1}\rho^2. \tag{3.15.5}$$

μ_k 由 (3.13.12) 给出. 至此, 我们已获得构成 $f^{(\phi)}$ 和 $g_{ab}^{(\phi)}$ 所需要的全部量.

引入两个新的任意常数 z_1 和 σ 代替 (3.13.11) 和 (3.13.12) 中的 w_1 和 w_2

$$w_1\equiv z_1+\sigma,\quad w_2\equiv z_1-\sigma, \tag{3.15.6}$$

引入坐标 r 和 θ 代替 ρ 和 z

$$\rho\equiv[(r-m)^2-\sigma^2]^{1/2}\sin\theta,\quad z-z_1=(r-m)\cos\theta. \tag{3.15.7}$$

式中 m 为任意常数. 由 (3.13.12) 可将 μ_k 用 r,θ 表示出来 (根号前取负号)

$$\mu_1=2(r-m+\sigma)\sin^2\frac{\theta}{2},\quad \mu_2=2(r-m-\sigma)\sin^2\frac{\theta}{2}. \tag{3.15.8}$$

由上式和 (2.15.5) 求出 $N_a^{(1)}$ 和 $N_a^{(2)}$, 由 (3.15.4) 求出 Γ_{kl} 和它们的逆矩阵 $D_{kl}(k,l=1,2)$, 然后由 (3.13.32) 和 (3.13.21) 求出 $g_{ab}^{(\phi)}$, 由 (3.14.7) 得到 $f_2^{(\phi)}$, 从而得到 $g_{\mu\nu}$. 再用一个简单的线性坐标变换, 便得到 Boyer-Lindguist 坐标中的 Kerr-NUT 度规.

为了变到 B-L 坐标系 (使 r 表示径向坐标), 我们令 (3.15.3) 中的任意常数满足条件

$$C_1^{(1)}C_0^{(2)}-C_0^{(1)}C_1^{(2)}=\sigma,\quad C_1^{(1)}C_0^{(2)}+C_0^{(1)}C_1^{(2)}=-m. \tag{3.15.9}$$

引入两个任意常数 a 和 b

$$C_1^{(1)}C_1^{(2)}-C_0^{(1)}C_0^{(2)}=-b,\quad C_1^{(1)}C_1^{(2)}+C_0^{(1)}C_0^{(2)}=a. \tag{3.15.10}$$

由上二式可得

$$\sigma^2=m^2-a^2-b^2. \tag{3.15.11}$$

最后得到度规 (3.14.9)

$$\mathrm{d}s^2=\omega\Delta^{-1}\mathrm{d}r^2+\omega\mathrm{d}\theta^2-\omega^{-1}\{(\Delta-a^2\sin^2\theta)\mathrm{d}\tau^2$$

$$
\begin{aligned}
&-[4\Delta b\cos\theta-4a\sin^2\theta(mr+b^2)]\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\varphi \\
&+[\Delta(a\sin^2\theta+2b\cos\theta)^2-\sin^2\theta(r^2+b^2+a^2)^2]\mathrm{d}\varphi^2\}.
\end{aligned}
\tag{3.15.12}
$$

式中

$$\tau=t+2a\varphi, \tag{3.15.13}$$

$$\omega\equiv r^2+(b-a\cos\theta)^2,\quad \Delta\equiv r^2-2mr+a^2-b^2. \tag{3.15.14}$$

此即Kerr-NUT 度规, 代入 $b=0$ 便得到 Kerr 度规. 这里, 只有 Kerr 解有物理意义 ($b=0$), $b\neq 0$ 时, (3.15.12) 不满足渐近平直条件.

在获得 (3.15.8) 时, 我们在 (3.13.12) 中对于 μ_1 和 μ_2 都取根号前为负号的情况, 如果对于 μ_1 和 μ_2, 根号前取不同符号, 不难证明, 也导致同一个度规.

现在我们用数学归纳法证明 (3.14.4).

设 (3.14.4) 当 $n=m$ 时成立, 只需证明当 $n=m+1$ 时成立. 假设从初始解〔背景度规〕g_n, f_n, ψ_n 引入 m 个孤立子, 生成了新解 $g_{n+m}, f_{n+m}, \psi_{n+m}, m$ 个孤立子对应于极点 $\lambda=\mu_{n+1}, \lambda=\mu_{n+2}, \cdots, \lambda=\mu_{n+m}$, 则有

$$f_{n+m}=C_{n+m}f_n\rho^m\left(\prod_{k=1}^m\mu_{n+m}^2\right)\left[\prod_{k=1}^m(\mu_{n+m}^2+\rho^2)\right]^{-1}D_{n+m}. \tag{3.15.15}$$

式中 $D_{n+m}=\det\Gamma_{n+k,n+l}(k,l=1,2,\cdots,m)$, 而

$$\Gamma_{n+k,n+l}=m_a^{(n+k)}(g_n)_{ab}m_b^{(n+1)}(\rho^2+\mu_{n+k}\mu_{n+l})^{-1}. \tag{3.15.16}$$

按 (3.13.14) 有

$$m_u^{(n+k)}=m_{e_0}^{(m+k)}[\psi_n^{-1}(\mu_{n+k},\rho,z)]_{ca}. \tag{3.15.17}$$

由 (3.13.4) 和 (3.13.3) 有

$$
\begin{aligned}
&\psi_n=[I+(\mu_n^2+\rho^2)\mu_n^{-1}(\lambda-\mu_n)^{-1}Pn]\psi_{n-1}, \\
&\psi_n^{-1}=\psi_{n-1}^{-1}[I-(\mu_n^2+\rho^2)(\rho^2+\lambda\mu_n)^{-1}P_n],
\end{aligned}
\tag{3.15.18}
$$

$$g_n=\psi_n(0)=[I-(\mu_n^2+\rho^2)\mu_n^{-2}P_n]g_{n-1}. \tag{3.15.19}$$

矩阵 P_n 由 (3.13.22) 得到

$$P_n=l^{(n)}(g_{n-1})l_{ab}^{(n)}/c_f^{(n)}(g_{n-1})_{fd}l_d^{(n)}. \tag{3.15.20}$$

式中 l_a 定义为

$$l_a^{(n)}\equiv m_{c0}^{(n)}[\psi_{n-1}^{-1}(\mu_n,\rho,z)]_{ca}, \tag{3.15.21}$$

$$l_a^{(n+k)}\equiv m_{c0}^{(n+k)}[\psi_{n-1}^{-1}(\mu_{n+k},\rho,z)]_{ca}. \tag{3.15.22}$$

由 (3.15.17), (3.15.18) 和 (3.15.20) 可得

$$m_a^{(n+k)} = l_a^{(n+k)} - E_{n,n}^{-1} E_{n,n+k} l_a^{(n)}. \tag{3.15.23}$$

式中

$$E_{n+\alpha,n+\beta} \equiv l_c^{(n+\alpha)} (g_{n-1})_{cb} l_b^{(n+\beta)} (\rho^2 + \mu_n + \alpha\mu_n + \beta)^{-1}, \quad \alpha, \beta = 0, 1, \cdots, m. \tag{3.15.24}$$

将 (3.15.23) 和 (3.15.19) 代入 (3.15.16) 中, 得到

$$\Gamma_{n+k,n+l} = E_{n+k,n+l} - E_{u,n}^{-1} E_{n,n+k} E_{n,n+l}. \tag{3.15.25}$$

由上式可得

$$\det E_{n+\alpha,n+\beta} = E_{n,n} \det \Gamma_{n+k,n+l}. \tag{3.15.26}$$

根据 (3.14.1) 和 (3.14.2) 有

$$f_n = C_n f_{n-1} E_{n,n} \rho \mu_n^2 (\mu_n^2 + \rho^2)^{-1}. \tag{3.15.27}$$

将此式代入 (3.15.15) 并利用 (3.15.26) 和 $D_{n+m} = \det \Gamma_{n+k,n+l}$, 我们得到

$$f_{n+m} = \text{const} \cdot f_{n-1} \rho^{m+1} \left(\prod_{\alpha=0}^{m} \mu_{n+\alpha}^2 \right) \times \left[\prod_{\beta=0}^{m} (\mu_{n+\beta}^2 + \rho^2) \right]^{-1} \det E_{n+\alpha,n+\beta}. \tag{3.15.28}$$

将 (3.15.24)、(3.15.21) 和 (3.14.22) 代入 (3.14.28) 便得到与 g_{n+m}, f_{n+m} 和 ψ_{n+m} 对应的 $(m+1)$-孤立子解 (3.14.4). 至此, 我们证明了式 (3.14.4) 的正确性.

3.16 平直时空背景上的 n-孤立子解

本节我们研究一种类型的 n-孤立子解及其一般性质. 取平直空–时度规.

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + \rho^2 \mathrm{d}\varphi^2 + \mathrm{d}\rho^2 + \mathrm{d}z^2 \tag{3.16.1}$$

为背景度规 (初始解), 引入偶数个孤立子 (极点 $\lambda = \mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n$), 生成新解. 函数 μ_k 成对出现, 以希腊字母 σ 标记, $\sigma = 1, 3, 5, \cdots, n-1$. 这样, 共有 $n/2$ 对极点 (μ_σ, μ^{a+1}).

为了使物理意义更明显, 首先研究矩阵 g 为对角的这一特殊情况 (静态 n-孤立子解). 为此, 设 (3.15.3) 中的所有任意常数 $C_0^{(k)} = 0$, 此时所有的 $m_0^{(k)} = 0$. 由 (3.13.15) 可得所有的 $n_0^{(k)} = 0$, 由 (3.13.13) 得到

$$R_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & n_1^{(k)} m_1^{(k)} \end{pmatrix}.$$

这表明 (3.13.28) 中的所有矩阵 P_k 具有形式

$$P_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

与 (3.13.29) 相符. 在这种情况下, 由 (3.13.28) 和 (3.13.32) 得到

$$g_{00}^{(\phi)} = \rho^{-n} \prod_{k=1}^{n} \mu_k, \quad g_{01}^{(\phi)} = 0, \quad g_{11}^{(\phi)} = -\rho^2 / g_{00}^{(\phi)}. \tag{3.16.2}$$

要由 (3.14.7) 求 $f_n^{(\phi)}$, 须先计算矩阵 Γ_{kl} 的行列式. 由于 (3.16.2) 很简单, 可以直接由 (3.12.4) 和 (3.12.5) 积分, 求得 $f_n^{(\phi)}$

$$f_n^{(\phi)} = \text{const} \cdot \rho^{(n^2+2n)/2} \left[\prod_{k>l=1}^{n} (\mu_k - \mu_l)^2 \right] \times \left(\prod_{k=1}^{n} \mu_k \right)^{1-n} \left[\prod_{k=1}^{n} (\mu_k^2 + \rho^2) \right]^{-1} \tag{3.16.3}$$

现在由 (3.13.11) 和 (3.13.12) 确定函数 μ_k. 对于每一对极点 μ_σ 和 $\mu_{\sigma+1}$, 我们取式中根号前相反的符号.

$$\begin{aligned} \mu_\sigma &= w_\sigma - z + [(w_\sigma - z)^2 + \rho^2]^{1/2}, \\ \mu_{\sigma+1} &= w_{\sigma+1} - z - [(w_{\sigma+1} - z)^2 + \rho^2]^{1/2}. \end{aligned} \tag{3.16.4}$$

引入新的任意常数 z_σ 和 m_σ 代替 ω_σ 和 $\omega_{\sigma+1}$

$$\omega_\sigma = z_\sigma - m_\sigma, \quad \omega_{\sigma+1} = z_\sigma + m_\sigma. \tag{3.16.5}$$

对于每一对极点, 引入一对函数 $r_\sigma(\rho, z)$ 和 $\theta_\sigma(\rho, z)$, 作为它们的“径坐标”和“角坐标”. 这 $\left(\frac{n}{2}\right)$ 对函数由下式定义:

$$\begin{aligned} \rho &= [r_\sigma(r_\sigma - 2mr_\sigma)]^{1/2} \sin\theta\sigma, \\ z - z_\sigma &= (r_\sigma - m_\sigma)\cos\theta\sigma. \end{aligned} \tag{3.16.6}$$

这时由 (3.16.4) 得

$$\begin{aligned} \mu_\sigma &= 2(r_\sigma - 2m_\sigma)\sin^2\frac{\theta_\sigma}{2}, \\ \mu_{\sigma+1} &= -2(r_\sigma - 2m_\sigma)\cos^2\frac{\theta_\sigma}{2}. \end{aligned} \tag{3.16.7}$$

将上式代入 (3.16.2), 得到

$$g_{00}^{(\phi)} = -\left(1 - \frac{2m_1}{r_1}\right)\left(1 - \frac{2m_3}{r_3}\right)\cdots\left(1 - \frac{2m_{n-1}}{r_{n-1}}\right). \tag{3.16.8}$$

当 n=2(2-孤立子解), 式中只有一个因子, 即 Schwarzschild 度规的 g_{00}. 这时由 (3.16.3) 求得 $f_2^{(\phi)}$, **得到的 $g_{\mu\nu}$ 恰为 Schwarzschild 度规**. 这一结果表明, 如果在 §3.15 的 2-孤立子解的一般形式中, 取任意常数满足条件 $C_0^{(1)} = C_0^{(2)} = 0$($\mu_k$ 式中根号前取相反的符号), 便可由 Kerr-NUT 解退化为 Schwarzschild 解.

为了分析 $g_{00}^{(\phi)}$ 的物理意义, 必须选择径向坐标. 原则上 $r_\sigma(\rho, z)$ 中的任何一个都可以作为径向坐标. 但最自然的选择应该使引力势在远离系统的展开式中不含偶极矩. 由 (3.16.8) 可知, 引力势 U 由下式给出:

$$2U = 1 - \left(1 - \frac{2m_1}{r_1}\right)\left(1 - \frac{2m_3}{r_3}\right)\cdots\left(1 - \frac{2m_{n-1}}{r_{n-1}}\right). \tag{3.16.9}$$

设"真空的"径向坐标和极角坐标由下式确定:

$$\rho = [r(r-2m)]^{1/2}\sin\theta, \quad z - z_0 = (r-m)\cos\theta. \tag{3.16.10}$$

上式与 (3.16.6) 形式相同, 但是引入了新的常数 m 和 z_0. 由 (3.16.10) 和 (3.16.6) 可以求出 r_σ 和 θ_σ, 并且可以按 r^{-1} 展开 (当 $r \to \infty$, 在一级近似下得到 $r_\sigma = r, \theta_\sigma = \theta$). 将这些展开式代入 (3.16.9), 由不存在偶极矩这一要求便可以确定 m 和 z_0. 用这一方法得到

$$m = \sum_{\sigma=1}^{n-1} m_\sigma, \quad z_0 = \left(\sum_{\sigma=1}^{n-1} m_\sigma z_\sigma\right)\Big/\sum_{\sigma=1}^{n-1} m_\sigma, \tag{3.16.11}$$

$$2U = 2mr^{-1} + Q(3\cos^2\theta - 1)r^{-3} + \cdots.$$

式中 Q 为系统的四极矩. 当 $n = 4$ 时 (4-孤立子解), 有

$$Q = m_1 m_3[(z_1 - z_3)^2 - m^2](m_1 + m_3)^{-1}.$$

这些结果表明, 静态 n-孤立子解是在渐近平直空-时中的局部扰动. 对于远处观察者, 这样的场可以看作是由具有辐射对称性的 $n/2$ 个 Schwarzschild 质量源 (位于局部) 所产生的外部场. 这些源质量中第 σ 个具有质量 m_σ, 位于 z_σ 处. 这些场源质量的质心公式和经典力学中的相同. 系统的四极矩也由常量 m_σ 和 z_σ 表示.

如果场源绕对称轴旋转, 则矩阵 $g^{(\phi)}$ 不是对角的, $g_{01}^{(\phi)} \neq 0$. 在 $n = 2$ 的特殊情况下, 场源由静止过渡到绕对称轴转动, 对应于由 Schwarzschild 度规过渡到克尔度规.

3.17 两个 Kerr 解的叠加

前一节研究了以平直空-时度规为背景度规, 引入 $\left(\frac{n}{2}\right)$ 对孤立子所获得的一类 n-孤立子解的一般性质. 本节将对 4-孤立子解的结构作进一步的分析. 为了讨论的方便, 我们将某些符号和相应的表述作一些简化.

在 3.14 节中, 我们给出了由已知解 $g_0^{(\phi)}$ 生成新解 $g_u^{(\phi)}$ 的一般方法. 新解依赖于 n 个任意常数 w_k 和 n 个矢量 $C_k=(A_k,B_k)$[即矢量 $m_a^{(k)}$]. 极点 μ_k 为方程

$$\mu_k^2+2(w_k-z)\mu_k-\rho^2=0 \tag{3.17.1}$$

的一个根. 度规系数 f 的表达式为

$$f=C\rho^{-n^2/2}\left(\prod_{k=1}^{n}\mu_k\right)^{n+1}\left[\prod_{k>l=1}^{n}(\mu_k-\mu_l)^2\right]^{-1}\det\Gamma_{kl}. \tag{3.17.2}$$

取背景度规为 (3.15.1) 时, Γ_{kl} 的表达式为 (3.15.4)

$$\Gamma_{kl}=\frac{-A_kA_l+\rho^2B_kB_l\mu_k^{-1}\mu_l^{-1}}{\rho^2+\mu_k\mu_l}\quad (\text{对}k,l\text{不取和}). \tag{3.17.3}$$

此时不难证明, g_{ab} 可表示为

$$g_{ab}=\rho^{-n}\left(\prod_{k=1}^{n}\mu_k\right)\det\Gamma_{\alpha\beta}^{ab}/\det\Gamma_{ij}. \tag{3.17.4}$$

式中 $\Gamma_{\alpha\beta}^{ab}$ 是由矩阵 Γ_{kl}“扩展”得到的 $(n+1)\times(n+1)$ 矩阵, 定义如下:

$$\begin{aligned}&\Gamma_{kl}^{ab}=\Gamma_{kl},\quad k,l=1,2,\cdots,n,\\&\Gamma_{kn+1}^{01}=\Gamma_{kn+1}^{00}=\Gamma_{n+1k}^{00}=\mu_k^{-1}A_k,\quad k=1,2,\cdots,n,\\&\Gamma_{n+1k}^{01}=\Gamma_{kn+1}^{11}=\Gamma_{n+1k}^{11}=\rho^2\mu_k^{-1}B_k,\quad k=1,2,\cdots,n.\end{aligned} \tag{3.17.5}$$

孤立子的个数 n 为偶数时, 生成解才具有物理意义 (具有正确的号差). 在 2-孤立子的情况下, §3.15 给出了 Kerr-NUT 解族. 这一解族包含的参量有质量 m、比角矩 a、物体的位置 z_0 和 NUT 参量 b(“磁体质量”). 这些参量和实常数 $w_1,w_2,(A_1,B_1),(A_2,B_2)$ 之间的关系可以表示为

$$\begin{aligned}&m=(w_1-w_2)/2\cos(\alpha_1-\alpha_2),\\&a=m\sin(\alpha_1-\alpha_2)=\frac{1}{2}(w_1-w_2)\tan(\alpha_1-\alpha_2),\\&b=m\sin(\alpha_1+\alpha_2),\\&\alpha_i\equiv\arctan(A_i/B_i).\end{aligned} \tag{3.17.6}$$

仅当 $b=0$ 时新解才是渐近平直的. 我们设 $w_1>w_2,\quad 0\leqslant A_i<B_i,0\leqslant\alpha_i<\dfrac{\pi}{4}$. 仅当 $\alpha_2=-\alpha_1=\arctan(A/B)$ 时才有 $b=0$. 这时有

$$m=(w_1-w_2)(B^2+A^2)/2(B^2-A^2),$$

$$a = AB(w_1 - w_2)/(B^2 - A^2). \tag{3.17.7}$$

由上述诸式可见, 孤立子参量取实数值时, 新解描述慢速转动情况: $a < m$. 下面只研究这种情况.

我们要研究的 4-孤立子解对应于两个物理状态, 分别由两组参量确定:

(1) $w_4 = -w_1, w_3 = -w_2, w_1 > |w_2|, C_1 = C_3 = (A, B), C_2 = C_4 = (-A, B)$;

(2) $w_4 = -w_1, w_3 = -w_2, w_1 > |w_2|, C_1 = C_4 = (A, B), C_2 = C_3 = (-A, B)$. 对于所研究的情况 $(n = 4)$, μ_k 的表达式 (3.13.12) 中根号前的正负号应这样选取: 当 $k =$ 奇数时取负号, k 为偶数时取正号; 其他的选择都不能生成有物理意义的解.

情况 (1) 的解是两个克尔解的非线性叠加, 两个场源物体具有相同的质量和相同的转矩 (3.17.7). 情况 (2) 的两个场源物体的质量相同而转矩异号. 下面我们分析这些解在不同区域的行为.

(i) 在无限远处, 由 (3.17.4) 和 (3.175), 当 $r = \sqrt{\rho^2 + z^2} \to \infty$ 时, $g_{00} = -1 + o(r^{-1}), g_{01} = \alpha + \beta z/r + o(r^{-1}), g_{11} = \rho^2[1 + o(r^{-1})]$. 参量 β 与 Kerr-NUT 解族中的 NUT 参量 b 相似, 渐近平直条件要求 $\beta = 0$. 由 (3.17.4) 和 (3.17.5) 可以得到 α 和 β 的表达式. 情况(1): $\alpha = 4AB(w_1 - w_2)/(B^2 - A^2), \beta = 0$; 情况 (2): $\alpha = 0, \beta = \left[\dfrac{(A^2 + B^2)^2}{4w_1w_2} + \dfrac{(B^2 - A^2)}{(w_1 - w_2)^2}\right]^{-1} AB(A^2 + B^2)\left(\dfrac{1}{w_1} + \dfrac{1}{w_2}\right)$. 在情况 (2) 中, $\beta = 0$ 导致 $A = 0$ 或 $B = 0$, 此时由 (3.17.7) 知 $a = 0$, 即不旋转, 即情况 (2) 与渐近平直条件矛盾. 下面我们只研究情况 (1).

作变换 $t' = t - \nu p, \varphi' = \varphi$. 式中 $\nu \equiv 4AB(w_1 - w_2)/(B^2 - A^2)$. 为了得到渐近平直解, 应有 $f \to 1$, 由此确定 (3.17.2) 中的常数 C

$$C = 2^{12} w_1^2 w_2^2 (w_1 - w_2)^4/(B^2 - A^2)^4.$$

保留 $\dfrac{M}{r}$ 阶项, 得到度规 g_{ab} 的表达式

$$g_{00} = -1 + \frac{2M}{r} + o(r^{-2}), \quad M = (w_1 - w_2)(B^2 + A^2)/(B^2 - A^2) = 2m, \tag{3.17.8}$$

$$g_{01} = -\frac{4Ma}{r}\frac{\rho^2}{r^2} + o(r^{-2}), \quad a = \frac{AB(w_1 - w_2)}{B^2 - A^2}.$$

由上式可知, 系统的质量 M 等于两个物体质量之和, 系统的转矩等于二物体转矩之和 $(Ma = 2ma)$.

(ii) 在对称轴的外部区域 $(0 < \rho < \infty)$. 由 (3.17.2~3.17.4) 可以发现, 度规的奇异性只能出现在 $\rho = 0$ 和 $\det\Gamma_{ij} = 0$. 系统是辐射对称的, 可以认为对称轴外的奇异性位于平面 $z = 0$ 上. 这时 $\det\Gamma_{ij}$ 简化为

$$\begin{aligned}\det\Gamma_{ij}(\rho, 0) =& 16\rho^8 \mu_1^2 \mu_2^2 (\mu_1 + \mu_2)^4 (\rho^4 - \mu_1^2\mu_2^2)^{-4} \\ & \times (\rho^4 - \mu_1^4)^{-2}(\rho^4 - \mu_2^4)^{-2}[AB\mu_1^{-1}\mu_2^{-1}(\rho^4 - \mu_1^2\mu_2^2)\end{aligned}$$

$$-\rho(A^2+\rho^2B^2\mu_1^{-1}\mu_2^{-1})(\mu_1-\mu_2)]^2[AB\mu_1^{-1}\mu_2^{-1}$$
$$\times(\rho^4-\mu_1^2\mu_2^2)+\rho(A^2+\rho_2B^2\mu_1^{-1}\mu_2^{-1})(\mu_1-\mu_2)]^2. \quad (3.17.9)$$

上式可知 $\det\Gamma_{ij}\geqslant 0$.$\det\Gamma_{ij}=0$ 只可能使上式右端后两个因子等于零. 又因为

$$\mu_1\mu_2<0, \quad \mu_1-\mu_2<0,$$
$$|\mu_1\mu_2|=\rho^2\left|\frac{w_2+\sqrt{w_2^2+\rho^2}}{w_1+\sqrt{w_1^2+\rho^2}}\right|<\rho^2,$$

所以

$$F(k,\rho)\equiv k(\rho^4-\mu_1^2\mu_2^2)-\rho(k^2\mu_1\mu^2+\rho^2)(\mu_2-\mu_1)=0, k\equiv A/B.$$

$F(k,\rho)$ 是 k 的二次三项式, 二次项系数 $-\rho(\mu_1-\mu_2)\mu_1\mu_2<0.k=0$ 时有

$$F(0,\rho)=-\rho^2(\mu_2-\mu_1)<0.$$

$k=1$ 时有

$$F(1,\rho)=\rho^4-\mu_1^2\mu_2^2-\rho(\mu_1\mu_2+\rho^2)(\mu_2-\mu_1)=(\rho^2+\mu_1\mu_2)(\rho+\mu_1)(\rho-\mu_2).$$

由于

$$\rho^2+\mu_1\mu_2>0, \quad \rho+\mu_1=\omega_1+\rho-\sqrt{w_1^2+\rho^2}>0,$$

所以 $F(1,\rho)$ 的符号取决于 $\rho-\mu_2=\rho-w_2-\sqrt{w_2^2+\rho^2}$ 的符号, 即取决于 w_2 的符号. 因此

$$F(1,\rho)<0, \quad 当w_2>0,$$
$$F(1,\rho)>0, \quad 当w_2<0,$$

$w_2=0$ 时得到克尔解 $(M=2m, Ma=2ma)$.

考虑到 F 是 k 的二次函数, 由上面的分析可知, 当 $w_2>0$ 时, 在对称轴外的平面 $z=0$ 上 $\det\Gamma_{ij}\neq 0$, 度规没有奇点, 当 $w_2<0$ 时, 有奇点 (环)$\rho(a)$.

$$\rho(a)\to\infty, \quad 当a\to m,$$
$$\rho(a)\to 0, \quad 当a\to 0.$$

在奇点 $\rho(a)$, 曲率标量为无限大. 因此, $w_2<0$ 时的物理图像和 Tomimatsu-Sato 解的一样. 在我们所研究的解中令 $w_2\to w_1$, 便得到 T-S 解.

在平面 $z=0$ 以外, 在一般情况下 $\det\Gamma_{ij}$ 的恒正性没有证明. 但是如果 $w_2>0$, 则可以证明当 $k=A/B$ 的值足够小 (即转矩足够小) 时, 轴外不存在奇点.

(iii) 在轴附近的区域. 首先考虑 $w_2>0$ 的情况. 在轴上有五个不同区域, 如图 3-2 所示.

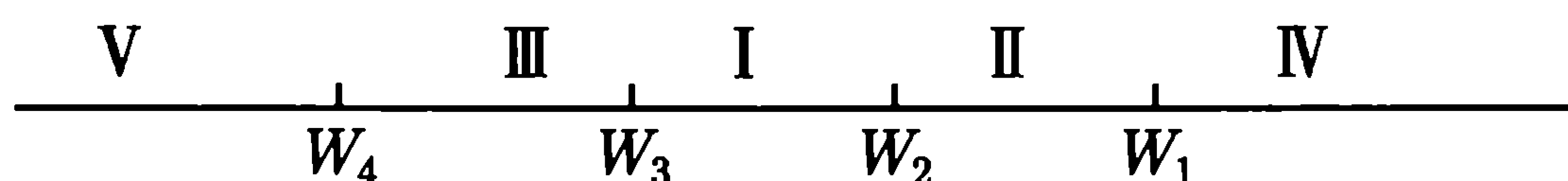


图 3-2

(a) 区域 I . 当 $z=\rho=0$ 时, 度规为

$$
\begin{aligned}
g_{00} &= -\frac{(A^2w_1-B^2w_2)^2}{(A^2w_2-B^2w_1)^2},\\
g_{01} &= 2AB\frac{(w_1-w_2)^2(A^2w_1-B^2w_2)(B^2+A^2)}{(A^2w_2-B^2w_1)^2(B^2-A^2)},\\
g_{11} &= -4A^2B^2\frac{(w_1-w_2)^4}{(A^2w^2-B^2w_1)^2}\left(\frac{B^2+A^2}{B^2-A^2}\right)^2.
\end{aligned}
$$

当 $A\neq 0$ 时,$g_{\varphi\varphi}=g_{11}<0$. 即在轴附近有一些闭合的类时曲线. 在这种情况下通过空间任何一点都有一类时的闭合环, 而且不可能用普通空间区域的单连通覆盖将闭合环打开. 因此, 因果条件被破坏. 即在区域 I 中度规是奇异的. 而且不允许从 $\rho>0$ 的区域延拓到区域 I 的邻域.

(b) 区域II . 度规系数 f 和 g_{ab} 有正常的行为, 并且 f, g_{00} 和 g_{11} 都是正的 (当 $z=w_k$, $\rho=0$ 时有 $g_{ab}=0$). 变换到建立在一个物体上的球坐标系 (r,θ)

$$
\rho=[(r-m)^2-\sigma^2]^{1/2}\sin\theta,\quad z=z_0+(r-m)\sin\theta.
$$

式中

$$
\sigma=\frac{1}{2}(w_1-w_2),\quad z_0=\frac{1}{2}(w_1+w_2),
$$

度规变为

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}s^2 =&\tilde{g}_{ab}(r,\theta)\mathrm{d}x^a\mathrm{d}x^b\\
&+\tilde{f}[(r-m)^2-\sigma^2\cos^2\theta]\left[\frac{\mathrm{d}r^2}{(r-m)^2-\sigma^2}+\mathrm{d}\theta^2\right],\\
\tilde{g}_{ab}(r,\theta) =&g_{ab}[\rho(r,\theta),z(r,\theta)],\\
\tilde{f}(r,\theta) =&f[\rho(r,\theta),z(r,\theta)].
\end{aligned}
$$

由 f 和 g_{ab} 的表达式可知, 在 $\rho=0$ 的领域内按 ρ 展开时, 展开式中只含 ρ 的偶次项, 所以在面 $(r-m)-\sigma=0$(与区域II对应的一段) 的邻域内, $\tilde{g}_{ab}$ 和 $\tilde{f}$ 是 r 和 θ 的解析函数. 这个面是零面.

区域III和区域II的情况相同.

区域IV和V中, $g_{00}\sim\rho_0, g_{01}\sim\rho^2, g_{11}\sim\rho^2, f\sim\rho^0$, 所以在这两个区域中度规是正常的. 这时由 (3.12.4)~(3.12.5) 可知 $\rho^2 f g_{11}^{-1}=\mathrm{const}=1$, 从而得到空–时是局部平直和正常的.

当 $w_2<0$(且转矩 $a\neq 0$) 时, 解的行为与 $w_2>0$ 时没有本质区别. 其中, 当 $z=0$, 有 $g_{11}=-(4B^2/A^2)(w_1-w_2)^2$, 即存在许多闭合的类时曲线. 我们指出, 当转矩 $a=0$ 时, 在区域 I 中, $w_2>0$ 和 $w_2<0$ 两种情况是根本不同的.

Sato 对 T-S 解性质的分析是不完全的 (Krame, 1980), 因为没有给出在区域 I 的轴上存在裸奇点的结论. 所谓裸奇点, 就是不被视界面包围的内禀奇点. 我们发现, 对于所讨论的旋转场源的所有解, 在对称轴上, 曲率标量都是正常的 (见第五篇).

在所研究的 4-孤立子解中, 包括一些渐近平直的、在轴外无奇点的解. 但是所有这些解 (除了在极限情况下得到的克尔度规) 在一段有限长的轴上都有裸奇点. 很自然地假设, 在所有 n-孤立子解中, 只有 2-孤立子解 (即 Kerr 度规) 没有裸奇点.

第四篇　广义相对论流体动力学

关于流体引力性质和状态的研究在物理学和天体物理学中都有重要意义. 近年来, 对于恒星的内部结构和演化, 引力坍缩过程和宇宙等离子体的研究都有长足进展. 其中涉及流体动力学和态方程的问题在某种程度上 (某些问题中) 采用了广义相对论的方法, 对一些物理过程给出更准确的描述, 揭示牛顿力学无法揭示的性质和效应. 对于中性流体、荷电流体和磁流体的动力学过程用广义相对论方法进行系统地描述显然是很必要的.

第 1 章　理想流体动力学

本章研究中性理想流体的情况, 给出广义相对论热力学方程、动力学方程和态方程.

1.1　热力学方程

理想流体的能量-动量张量为

$$T_{\mu v} = (\rho + \rho\pi + p)u_\mu u_v - pg_{\mu v}, \tag{1.1.1}$$

此处 ρ 表示固有质量密度 (在随动坐标系中), p 为各向同性压强, u_μ 是速度 4 维矢量. 将上式中指标 μ 上升并乘以 u^v, 缩并后得到

$$T^\mu_v u^v = \rho u^\mu. \tag{1.1.2}$$

由此可知, u^μ 是 T^μ_v 的类时本征矢, ρ 是相应的本征值. 式 (1.1.1) 中的

$$\rho + \rho\pi = \varepsilon \tag{1.1.3}$$

为能量密度, 其中 π 为**比内能**. π 可看作两个热力学变量 (如 ρ 和 p) 的函数

$$\pi = \pi(\rho, p), \tag{1.1.4}$$

这一函数的形式取决于流体的内部结构.

引入**比焓**

$$i \equiv \pi + \frac{p}{\rho}, \tag{1.1.5}$$

则 (1.1.1) 可改写为

$$T_{\mu v} = \rho(1 + i)u_\mu u_v - pg_{\mu v}. \tag{1.1.6}$$

在随动系中, 可像经典流体动力学那样定义温度 T 和**比熵**S

$$T\mathrm{d}S = \mathrm{d}\pi + pd(\rho^{-1}). \tag{1.1.7}$$

将 (1.1.5) 微分, 得到

$$\mathrm{d}i = \mathrm{d}\pi + pd(\rho^{-1}) + \rho^{-1}\mathrm{d}p,$$

代入上式得

$$T\mathrm{d}S = \mathrm{d}i - \rho^{-1}\mathrm{d}p. \tag{1.1.8}$$

1.2 流线方程

将能量–动量张量 (1.1.6) 代入守恒方程, 得到

$$T^{v}_{\mu;v} = [\rho(1+i)u^{v}]_{;v}u_{\mu} + \rho(1+i)u^{v}u_{\mu;v} - p_{,\mu} = 0 \tag{1.2.1}$$

用 u^{μ} 乘以上式, 缩并, 得到连续性方程

$$u^{\mu}T^{v}_{\mu;v} = [\rho(1+i)u^{v}]_{;v} - u^{\mu}p_{,\mu} = 0 \tag{1.2.2}$$

由 (1.2.1) 和 (1.2.2) 可得

$$\rho(1+i)u^{v}u^{\mu}_{;v} = (g^{\mu v} - u^{v}u^{\mu})p_{,v}, \tag{1.2.3}$$

这就是流体流线的微分方程. 流线是四维矢量场 u^{μ} 的矢量线.

如果流体的运动是等熵的, $S = \text{const}$, 则由 (1.1.8) 有 $\mathrm{d}p = \rho \mathrm{d}i$, 流体方程 (1.2.3) 化为

$$(1+i)u^{v}u^{\mu}_{;v} = (g^{v\mu} - u^{v}u^{\mu})i_{,v} \tag{1.2.4}$$

引入正标量 f 代替比焓 i

$$f \equiv 1+i, \tag{1.2.5}$$

流线方程可写为

$$u^{v}u^{\mu}_{;v} = (g^{v\mu} - u^{v}u^{\mu})\frac{f_{,v}}{f}. \tag{1.2.6}$$

现在我们证明, 在等熵情况下, 流线 (1.2.6) 是共形空–时 $\mathrm{d}\tilde{s}^2 = f\mathrm{d}s^2$ 中的短程线. 引入量

$$\begin{aligned} v_{\mu} &= fu_{\mu}, \quad \widetilde{g}_{\mu v} = f^{2}g_{\mu v}, \\ v_{\mu} &= fu_{\mu}, \quad \widetilde{v}_{\mu} = f^{-1}u_{\mu}, \end{aligned} \tag{1.2.7}$$

$\widetilde{v}^{\mu}$ 是在度规 $\widetilde{g}_{\mu v}$ 中与 v_{μ} 对应的逆变矢量. 由此可得

$$\begin{aligned} v_{\mu;\widetilde{v}} &\equiv v_{\mu,v} - \widetilde{\Gamma}^{\alpha}_{\mu v}v_{\alpha} \\ &= v_{\mu;v} - \frac{1}{f}f_{,v}v_{\mu} - \frac{1}{f}f_{,\mu}v_{v} + \frac{1}{f}f_{,\alpha}v^{\alpha}g_{\mu v}, \end{aligned}$$

即

$$v_{\mu;\widetilde{v}} = fu_{\mu;v} - u_{v}f_{;\mu} + u^{\alpha}f_{,\alpha}g_{\mu v}.$$

用 $\tilde{v}^{v} = f^{-1}u^{v}$ 乘以上式并缩并得到

$$\tilde{v}^{v}v_{\mu;\tilde{v}} = u^{v}u_{\mu;v} - f^{-1}f_{,\mu} + f^{-1}f_{,v}u_{v}u_{,\mu}$$

即

$$\tilde{v}v_{\mu;\tilde{v}} = u^v u_{\mu;v} - (g_\mu^v - u^v u_\mu) f^{-1} f_{;v}. \tag{1.2.8}$$

将 (1.2.6) 代入上式, 得到 $\tilde{v}^v v_{\mu;\tilde{v}} = 0$. 由 (1.2.7) 可知

$$\tilde{v}_\mu \equiv \tilde{g}_{\mu v}\tilde{v}^v = f^2 g_{\mu v}(f^{-1}u^v) = f u_\mu = v_\mu, \tag{1.2.9}$$

$$\tilde{v}_\mu \tilde{v}^\mu = f u_\mu f^{-1} u^\mu = 1.$$

所以有 $\tilde{v}^v \tilde{v}_{\mu;\tilde{v}} = 0$, 即流线为空–时 $\tilde{g}_{\mu v}$ 中的短程线.

现在我们回到一般情况下的流线方程 (1.2.3). 除引入标量 $f = 1 + i$ 以外, 再引入一个矢量 v^μ

$$v^\mu \equiv f u^\mu, \quad v_\mu \equiv f u_\mu. \tag{1.2.10}$$

标量 f 和比焓 i 等价, 称为**流体指数**, 矢量 v^μ 称为**流矢量**.

方程 (1.2.3) 可写为

$$\rho f u^v u_{\mu;v} - (g_\mu^v - u^v u_\mu) p_{,v} = 0. \tag{1.2.11}$$

由 (1.1.8) 有

$$\frac{\mathrm{d}p}{\rho} = \mathrm{d}f - T\mathrm{d}S, \tag{1.2.12}$$

代入 (1.2.11) 得

$$u^v u_{\mu;v} - (g_\mu^v - u^v u_\mu)(f^{-1} f_{,v} - f^{-1} T S_{,v}) = 0. \tag{1.2.13}$$

和前面类似地, 引入度规 $\mathrm{d}\tilde{s}^2 = f^2 \mathrm{d}s^2$, 由 (1.2.8) 可将流线方程改写为

$$v^v v_{\mu;\tilde{v}} + (g_\mu^v - u^v u_\mu) f T S_{,v} = 0. \tag{1.2.14}$$

1.3 守恒方程

由 (1.2.12) 和 $f = 1 + i$, 可将连续性方程 (1.2.2) 写为

$$f(pu^v)_{,v} + \rho T u^v S_{,v} = 0. \tag{1.3.1}$$

由于 f, ρ, T 都是正的, 所以由

$$u^v S_{,v} \geqslant 0 \tag{1.3.2}$$

得到

$$(pu^v)_{;v} \leqslant 0 \tag{1.3.3}$$

如果沿着流线比熵 S= const, 即

$$u^v S_{,v} = 0, \tag{1.3.4}$$

我们就说流体的运动是**局部绝热**的, 这等价于

$$(\rho u^v)_{;v} = 0, \tag{1.3.5}$$

即固有密度 ρ 是守恒的. 下面我们认为 (1.3.4) 和 (1.3.5) 成立, 否则流体的运动是不稳定的.

流体的旋度张量定义为

$$\Omega_{\mu v} \equiv v_{v,\mu} - v_{\mu,v}. \tag{1.3.6}$$

我们有

$$\tilde{v}^v \Omega_{v\mu} = \tilde{v}^v (v_{\mu;\tilde{v}} - v_{v;\tilde{\mu}}) = \tilde{v}^v v_{\mu;\tilde{v}}. \tag{1.3.7}$$

由上式和 (1.3.4), 可将流线方程 (1.2.14) 写为

$$\tilde{v}^v \Omega_{\mu v} = -Tf^{-1} S_{,\mu},$$

或者

$$v^v \Omega_{\mu v} = -TfS_{,\mu}, \tag{1.3.8}$$

这就是用旋度张量表示的流线方程. 对上式取协变微分, 再进行简单组合, 可以得到广义相对论中的 Helmholtz 方程

$$v^\rho \Omega_{\mu v;\rho} + v^\rho_{;v} \Omega_{\rho\mu} + v^\rho_{;u} \Omega_{v\rho} = (Tf)_{,\mu} S_{,v} - (Tf)_{,v} S_{,\mu}. \tag{1.3.9}$$

1.4　不可压缩相对论热力学流体

1. **特征方程**

在引力场的情况下, 设引力波的波前为超曲面 $\varphi = 0$. 引力波的传播速度为 c. 由零短程线方程

$$g_{\mu v} \frac{\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^v}{\mathrm{d}\lambda \mathrm{d}\lambda} = 0$$

可知, 引力波波前传播方程为

$$g^{\mu v} \varphi_{,\mu} \varphi_{,v} = 0. \tag{1.4.1}$$

方程 (1.4.1) 是引力场方程的特征方程.

流体动力学波可由守恒方程 (1.3.5)

$$(\rho u^v)_{;v} = \rho u^v_{;v} + u^v \rho_{,v} = 0 \tag{1.4.2}$$

和流线方程 (1.2.13)

$$fu^v u^\mu_{;v} - (g^{\mu v} - u^\mu u^v)(f_{,v} - TS_{,v}) = 0 \tag{1.4.3}$$

确定. 由数学中的偏微分方程理论可知, 方程 (1.4.2) 和方程 (1.4.3) 的特征方程为

$$\begin{vmatrix} \varphi_{,v} & u^v \rho \rho'_f \varphi_{,v} \\ f u^\mu \varphi_{,\mu} & -(g^{\mu v} - u^\mu u^v)\varphi_{,\mu} \end{vmatrix} = 0$$

即

$$\left[g^{\mu v} - (1 - \frac{f\rho'_f}{\rho})u^\mu u^v\right]\varphi_{,v}\varphi_{,\mu} = 0. \tag{1.4.4}$$

式中

$$\rho'_f \equiv \frac{\partial \rho}{\partial f}.$$

这些结果在第 2、第 3 章中将是有用的.

2. 不可压缩的热力学流体

如果流体动力学波的速度等于 c, 则称流体是不可压缩的. 比较 (1.4.4) 和 (1.4.1) 可知, 当 $\rho(f, S)$ 满足条件

$$r \equiv \frac{f\rho'_f}{\rho} = 1 \tag{1.4.5}$$

时热力学流体动力学波的速度等于 c. 积分此式可以发现, (1.4.5) 成立的充分且必要条件是

$$\rho = F(S)f. \tag{1.4.6}$$

在这一条件下, 我们讨论流体的压强. 由 (1.3.4) 和 (1.2.12) 得到

$$\frac{\partial p}{\partial f} = \rho = F(S)f.$$

由此可知存在一个函数 $G(S)$, 使

$$p = \frac{1}{2}F(S)f^2 - G(S). \tag{1.4.7}$$

由 (1.1.5)、(1.1.3) 和 (1.2.5) 有

$$\varepsilon + p = \rho f, \tag{1.4.8}$$

从而得

$$\varepsilon - p = \rho f - 2p = 2G(S). \tag{1.4.9}$$

反过来, 假设 $\varepsilon - p$ 只依赖于 S, 即 $\rho f - 2p$ 只依赖于 S, 对 f 求微商, 得到

$$f\rho'_f + \rho - 2p'_f = 0$$

由于 $p'_f = \rho$, 所以有

$$f\rho'_f - \rho = 0,$$

即流体是不可压缩的. 于是我们证明了一个定理:

相对论热力学流体不可压缩的充分且必要条件是 $\varepsilon - p$ 只依赖于 S.

现在讨论热力学量沿流线的变化情况. 由 (1.4.6) 可得

$$u^v \left(\frac{\rho}{f}\right)_{,v} = 0, \tag{1.4.10}$$

即 ρ/f 沿流线是一常数. 将 (1.4.10) 代入连续性方程 $(\rho u^v)_{,v} = 0$, 得到

$$(fu^v)_{;v} = 0. \tag{1.4.11}$$

反之, 如果此式成立, 则有 $f_{;v}u^v + fu^v_{,v} = 0$, 考虑到 $(\rho u^v)_{;v} = 0$, 得到

$$(f\rho'_f - \rho)u^v f_{,v} = 0. \tag{1.4.12}$$

由此可知, 热力学流体或者是不可压缩的, 或者所有热力学量沿流线都是常数.

如果相对论热力学流体的旋度张量 $\Omega_{\mu v}$ 的所有分量都等于零, 则称这种流体的运动是无旋的. 将 $\Omega_{\mu v} = 0$ 代入 (1.3.8), 可知 $S = \text{const}$, 即无旋运动一定是等熵的. 可以证明, 此命题的逆命题也是正确的: 等熵流动一定是无旋的.

第 2 章　荷电流体动力学

本章前两节研究零电导率的荷电理想流体, 2.3 节以后研究磁流体. 有电磁场存在时引力场方程和能量–动量张量可表示为

$$R_{\mu v} - Rg_{\mu v} = kT_{\mu v},$$
$$T_{\mu v} = \rho f u_\mu u_v - p g_{\mu v} + E_{\mu v},$$

其中

$$E_{\mu v} = \frac{1}{4} g_{\mu v}(F_{\alpha\beta} f^{\alpha\beta}) - F_{\mu\sigma} f_v^\sigma,$$
$$g^{\mu v} E_{\mu v} = 0.$$

2.1　荷电流体运动方程和热力学方程

由 Maxwell 方程

$$f^{\mu v}_{;v} = 4\pi J^\mu \tag{2.1.1}$$

经过简单的运算可以得到 (见第一篇 4.4 节)

$$E^v_{\mu;v} = 4\pi J^v F_{v\mu}. \tag{2.1.2}$$

上式右端是力密度. 能量–动量张量 $T_{\mu v}$ 表达式中的热力学量 f 仍由比焓确定

$$f = 1 + i, \tag{2.1.3}$$

固有温度 T 和比熵仍由下式确定:

$$T\mathrm{d}S = \mathrm{d}i - \rho^{-1}\mathrm{d}p. \tag{2.1.4}$$

在一般情况下, 电流 J^μ 由运流电流和传导电流组成

$$J^\mu = \rho_e u^\mu + \sigma u_v f^{vv}. \tag{2.1.5}$$

式中 ρ_e 为固有电荷密度 (即随动系中的电荷密度), σ 是流体的电导率. 我们研究 $\sigma = 0$ 的情况, 此时有

$$J^\mu = \rho_e u^\mu. \tag{2.1.6}$$

电荷守恒方程表示为

$$(\rho_e u^\mu)_{;\mu} = 0. \tag{2.1.7}$$

2.2 连续性方程和流线方程

由能量-动量张量的表达式和 (2.1.2), 可将守恒方程写为

$$0 = T^v_{\mu;v} = (\rho f u^v)_{;v} u_\mu + \rho f u^v u_{\mu;v} - p_{,\mu} + J^v F_{v\mu}. \tag{2.2.1}$$

将 (2.1.6) 代入上式, 再用 u^μ 缩并, 得到**连续性方程**

$$T^v_{\mu;v} u^\mu = (\rho f u^v)_{;v} - u^v p_{,v} = 0. \tag{2.2.2}$$

利用 (2.1.3~4), 上式可写为

$$f(\rho u^v)_{;v} + \rho T u^v S_{,v} = 0. \tag{2.2.3}$$

如果运动是**局部绝热**的

$$u^v S_{,v} = 0, \tag{2.2.4}$$

则有

$$(\rho u^v)_{;v} = 0, \tag{2.2.5}$$

即**物质密度守恒**. 由 (2.1.7) 和 (2.2.5) 可以得到

$$u^v \left[\ln\left(\frac{\rho_e}{\rho}\right)\right]_{,v} = 0. \tag{2.2.6}$$

因此 ρ_e/ρ 沿流线为常数. 下面我们假设流体是均匀带电的, 即在所研究的空 - 时区域内到处都有 $k \equiv \rho_e/\rho = \text{const}$.

将连续性方程 (2.2.2) 和 (2.1.6) 代入 (2.2.1), 得到

$$\rho f u^v u^\mu_{;v} = (g^{\mu v} - u^\mu u^v) p_{,v} - \rho_e u^v f^\mu_v.$$

而 $p_{;v} = \rho f_{,v} - \rho T S_{,v}$, 所以上式可写为

$$f u^v u^\mu_{;v} = (g^{\mu v} - u^\mu u^v)(f_{,v} - T S_{,v}) - k u^v f^\mu_v, \tag{2.2.7}$$

这就是**流线方程**. 这一方程表明, 如果流体的运动是等熵的, 则流线是积分 $\left(\int f\mathrm{d}s + k\mathrm{d}\psi\right)$ 的极值曲线. 式中 ψ 是电磁势.

在一般情况下, 我们仍可引入度规 $\mathrm{d}\tilde{s}_2 = f^2 \mathrm{d}s^2$ 和流矢量 v_μ:

$$v_\mu = f u_\mu, \quad v^u = f u^\mu. \tag{2.2.8}$$

仍然令

$$\tilde{v}^\mu = f^{-1} u^\mu.$$

由 (1.2.8), 可将流线方程 (2.2.7) 写为

$$\tilde{v}^{v} v_{\mu;\tilde{v}} + (g_{\mu}^{v} - u^{v} u_{\mu}) \frac{TS_{,v}}{f} + \frac{k}{f} u^{v} F_{v\mu} = 0,$$

或者

$$v^{v} v_{\mu;\tilde{v}} + (g_{\mu}^{v} - u^{v} u_{\mu}) TfS_{;v} + kv^{v} F_{v\mu} = 0. \tag{2.2.9}$$

现在我们引入有电磁场存在时的旋度矢量, 从而给出 Helmholtz 方程. 由等熵条件 $u^{v} S_{;v} = 0$ 将流线方程 (2.2.9) 写为

$$v^{v} v_{\mu;\tilde{v}} + TfS_{;\mu} + kv^{v} F_{v\mu} = 0. \tag{2.2.10}$$

又因为

$$\tilde{v}^{v} \Omega_{v\mu} = \tilde{v}^{v} (v_{\mu;\tilde{v}} - v_{v;\tilde{\mu}}) = \tilde{v}^{v} v_{\mu;\tilde{v}},$$
$$v^{v} \Omega_{v\mu} = v^{v} v_{\mu;\tilde{v}},$$

所以 (2.2.10) 可改写为

$$v^{v} (\Omega_{v\mu} + kF_{v\mu}) = -TfS_{;\mu}. \tag{2.2.11}$$

引入量 Σ 表示带电流体的总旋度张量

$$\Sigma_{\mu v} \equiv \Omega_{\mu v} + kF_{\mu v}, \tag{2.2.12}$$

流线方程改写为

$$v^{v} \Sigma_{v\mu} = -TfS_{,\mu}. \tag{2.2.13}$$

由此式可以得到 Helmholtz 方程

$$v^{\rho} \Sigma_{v\mu;\rho} + v^{\rho}_{;v} \Sigma_{\rho\mu} + v^{\rho}_{;\mu} \Sigma_{v\rho} = (fT)_{,\mu} S_{,v} - (fT)_{,v} S_{,\mu}. \tag{2.2.14}$$

2.3 电磁场方程和能量–动量张量

1. 电磁场方程

在物质内部电磁场由两个反对称二阶张量 $f_{\mu v}$ 和 $F_{\mu v}$ 定义. 张量 $f_{\mu v}$ 称为磁场–电感应张量 (对应于狭义相对论中 $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{D}$), 张量 $F_{\mu v}$ 称为电场–磁感应张量 (对应于狭义相对论中的 $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$).

设 $\tilde{f}_{\mu v}$ 和 $\tilde{F}_{\mu v}$ 分别表示 $f_{\mu v}$ 和 $F_{\mu v}$ 的对偶张量. 我们令

$$E_{\mu} \equiv u^{\alpha} F_{\alpha\mu}, \quad D_{\mu} \equiv u^{\alpha} f_{\alpha\mu},$$

$$B_\mu \equiv u^\alpha \widetilde{F}_{\alpha\mu}, \quad H_\mu \equiv u^\alpha \tilde{f}_{\alpha\mu}. \tag{2.3.1}$$

由 $f_{\mu v}$ 和 $F_{\mu v}$ 的反对称性可知 u^μ 与上面四个矢量正交:

$$u^\alpha E_\alpha = u^\alpha D_\alpha = u^\alpha B_\alpha = u^\alpha H_\alpha = 0. \tag{2.3.2}$$

矢量 E_μ 和 D_μ 分别称为对应于 u_μ 方向的电场强度和电感应强度, H_μ 和 B_μ 分别称为对应于 u^μ 方向的磁场强度和磁感应强度.

根据 (2.3.1),(2.3.2) 和对偶张量的定义, 可以用四个矢量 E_μ, B_μ, D_μ, H_μ 将张量 $f_{\mu v}$ 和 $F_{\mu v}$ 表示出来

$$\begin{aligned} F_{\mu v} &= u_\mu E_v - u_v E_\mu - \epsilon_{\mu v\alpha\beta} u^\alpha B^\beta, \\ f_{\mu v} &= u_\mu D_v - u_v D_\mu - \epsilon_{\mu v\alpha\beta} u^\alpha H^\beta. \end{aligned} \tag{2.3.3}$$

式中

$$\epsilon_{\mu v\alpha\beta} = \sqrt{-g}\varepsilon_{\mu v\alpha\beta}.$$

类似地可以得到

$$\begin{aligned} \widetilde{F}_{\mu v} &= u_\mu B_v - u_v B_\mu + \epsilon_{\mu v\alpha\beta} u^\alpha E^\beta, \\ \widetilde{f}_{\mu v} &= u_\mu H_v - u_v H_\mu + \epsilon_{\mu v\alpha\beta} u^\alpha D^\beta. \end{aligned} \tag{2.3.4}$$

在 Maxwell 理论中, 感应和场之间的关系是线性的, 这些关系式和物质结构特性有关, 称为本构方程. 我们研究各向同性物质, 其本构方程具有形式

$$D_\mu = \varepsilon E_\mu, \quad B_\mu = \mu H_\mu. \tag{2.3.5}$$

式中 ε 是物质的介电常数, μ 是磁导率. 将此式代入 (2.3.3), 可以用 $F_{\mu v}$ 把 $f_{\mu v}$ 表示出来

$$f_{\mu v} = \frac{1}{\mu} F_{\mu v} + \frac{\varepsilon\mu - 1}{\mu}(u_\mu u^\alpha F_{\alpha v} - u_v u^\alpha F_{\alpha\mu}). \tag{2.3.6}$$

由 Maxwell 方程可得连续性方程

$$J^\mu_{;\mu} = 0, \quad J^\mu = \rho_e u^\mu + \sigma u_\alpha f^{\alpha\mu} = \rho_e u^\mu + \sigma E^\mu, \tag{2.3.7}$$

式中电流仍然由两项组成 (运流电流和传导电流), ρ_e 和 σ 分别为固有电荷密度和电导率.

2. 能量–动量张量

有介质存在时, 电磁场的能量–动量张量定义为

$$E_{\mu\alpha} = \frac{1}{4}g_{\mu v}F_{\alpha\beta}f^{\alpha\beta} - F_{\mu\alpha}f^{\alpha}_{v}. \tag{2.3.8}$$

我们设法用 (2.3.1) 引入的四个矢量表示 $E_{\mu v}$. 由 (2.3.3) 可得

$$F_{\mu\alpha}f^{\alpha}_{v} = (u_\mu E_\alpha - u_\alpha E_\mu - \epsilon_{\mu v\alpha\beta}u^\beta B^\sigma) \times (u_v D^\alpha - u^\alpha D_v - \epsilon^{\alpha\lambda\tau}_{v}u_\lambda H_\tau). \tag{2.3.9}$$

令

$$V_\alpha \equiv \epsilon_{\alpha\rho\lambda\tau}E^\rho H^\lambda u^\tau, \quad W_\alpha \equiv \epsilon_{\alpha\rho\lambda\tau}D^\rho B^\lambda u^\tau, \tag{2.3.10}$$

得到

$$F_{\mu\alpha}f^{\alpha}_{v} = u_\mu u_v E_\alpha D^\alpha + E_\mu D_v + (u_\mu u_v + u_v W_\mu) + U_{\mu v}.$$

式中

$$U^{v}_{\mu} = \epsilon_{\mu\rho\alpha\beta}\epsilon^{v\rho\tau\lambda}u^\alpha B^\beta u_\tau H_\lambda = -\varepsilon^{v\alpha\sigma}_{\mu\rho\tau}u^\rho B^\tau u_\alpha H_\sigma.$$

U^{v}_{μ} 的表达式中, $\mu = v$ 的项可写为 $-g^{v}_{\mu}B^\alpha H_\alpha$, $\mu = \alpha$ 的项为 $u_\mu u^v B^\alpha H_\alpha$, $\mu = \sigma$ 的项为 $H_\mu B^v$, 因此 U^{v}_{μ} 可写为

$$U^{v}_{\mu} = u_\mu u^v H_\alpha B^\alpha + H_\mu B^v - g^{v}_{\mu}H_\alpha B^\alpha.$$

于是得到

$$\begin{aligned}
F_{\mu v}f^{\alpha}_{v} =& u_\mu u_v(E_\alpha D^\alpha + H_\alpha B^\alpha) + (E_\mu D_v + H_\mu B) \\
&+ (u_\mu V_v + u_v W_\mu) - g_{\mu v}H_\alpha B^\alpha, \qquad (2.3.11)\\
\frac{1}{2}F_{\mu v}f^{\mu v} =& E_\alpha D^\alpha + H_\alpha B^\alpha - 2H_\alpha B^\alpha = E_\alpha D^\alpha - H_\alpha B^\alpha.
\end{aligned}$$

能量–动量张量的表达式简化为

$$\begin{aligned}
E_{\mu v} =& \left(\frac{1}{2}g_{\mu v} - u_\mu u_v\right)(E_\alpha D^\alpha + H_\alpha B^\alpha) \\
&- (E_\mu D_v + H_\mu B_v) - (u_\mu V_v + \varepsilon\mu u_v V_\mu).
\end{aligned} \tag{2.3.12}$$

3. 力密度

我们由 Maxwell 方程出发推导力密度 $E^{v}_{\mu;v}$ 的表达式. 由电磁场方程得到

$$f^{\alpha\beta}(F_{\mu\beta;\alpha} + F_{\beta\alpha;\mu} + F_{\alpha\mu;\beta}) = 0,$$

即

$$2f^{\alpha\beta}F_{\mu\beta;\alpha} = f^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta;\mu}.$$

由此可将力密度写为

$$E^{v}_{\mu;v} = J^{\alpha}F_{\alpha\mu} + \frac{1}{4}(F_{\alpha\beta}f^{\alpha\beta}_{;\mu} - f^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta;\mu}). \tag{2.3.13}$$

将 (2.3.6) 代入, 上式中右端最后一项可改写为

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\mu}\right)_{,\mu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\left[\varepsilon_{,\mu} - \left(\frac{1}{\mu}\right)_{,\mu}\right]E_{\alpha}E^{\alpha} \\
&+ \frac{\varepsilon\mu - 1}{2\mu}F_{\alpha\beta}(u^{\alpha}u^{\sigma}f^{\beta}_{\sigma})_{,\mu} - \frac{\varepsilon\mu - 1}{2\mu}F_{\alpha\beta;\mu}u^{\alpha}u^{\sigma}f^{\beta}_{\sigma} \\
=&\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu}\right)_{,\mu}(-B_{\alpha}B^{\alpha}) + \frac{1}{2}\varepsilon_{,\mu}E_{\alpha}E^{\alpha} + \frac{\varepsilon\mu - 1}{\mu} \times F_{\alpha\beta}f^{\beta}_{\tau}u^{\alpha}_{;\mu}u^{\tau} \\
=&\frac{1}{2}\varepsilon_{,\mu}E_{\alpha}E^{\alpha} + \frac{1}{2}\mu_{,\mu}H_{\alpha}H^{\alpha} + \frac{\varepsilon\mu - 1}{\mu}F_{\alpha\beta}E^{\beta}u^{\alpha}_{;\mu}.
\end{aligned} \tag{2.3.14}$$

由 (2.3.3) 得到

$$\begin{aligned}
F_{\alpha\beta}E^{\beta} &= u_{\alpha}(E_{\beta}E^{\beta}) - \epsilon_{\alpha\beta\lambda\tau}E^{\beta}u^{\lambda}B^{\tau} \\
&= (E_{\beta}E^{\beta})u_{\alpha} + \mu V_{\alpha}.
\end{aligned} \tag{2.3.15}$$

将 (2.3.14 15) 代入 (2.3.13), 得到

$$\begin{aligned}
E^{v}_{\mu;v} =& J^{\alpha}F_{\alpha\mu} + \frac{1}{2}(\varepsilon_{,\mu}E_{\alpha}E^{\alpha} + \mu_{,\mu}H_{\alpha}H^{\alpha}) \\
&+ (W_{\alpha} - V_{\alpha})u^{\alpha}_{;\mu}.
\end{aligned} \tag{2.3.16}$$

式中右端第二项当 ε 和 μ 为常数时等于零. 最后一项在经典力学中出现过 (旋转物体), 当 $V_{\alpha} = 0$ 或 $u^{\alpha}_{;\mu} = 0$ 时这一项等于零. 右端第一项可表示为

$$\begin{aligned}
J^{\alpha}F_{\alpha\mu} &= (\rho_e u^{\alpha} + \sigma u^{\alpha})(u_{\alpha}E_{\mu} - u_{\mu}E_{\alpha} - \epsilon_{\alpha\mu\lambda\tau}u^{\lambda}B^{\tau}) \\
&= \rho_e E_{\mu} - \sigma E_{\alpha}E^{\alpha}u_{\mu} - \sigma\epsilon_{\mu\alpha\lambda\tau}E^{\alpha}B^{\lambda}u^{\tau} \\
&= \rho_e E_{\mu} - \sigma E_{\alpha}E^{\alpha}u_{\mu} - \sigma\mu V_{\mu}.
\end{aligned} \tag{2.3.17}$$

此式右端各项的物理意义是很明显的.

第 3 章　磁流体动力学

理想磁流体动力学的任务是研究具有无限大电导率 ($\sigma = \infty$) 的理想流体的性质. 由于电流 J 有限, 从而 σE_μ 有限, 所以当 $\sigma = \infty$ 时必有 $E_\mu = 0$. 电磁场简化为对于流体速度 u^μ 的纯磁场 H_μ.

3.1　电磁场方程

在 (2.3.6) 和 (2.3.3) 中代入 $E_\mu = 0$, 得到

$$f_{\alpha\beta} = \frac{1}{\mu} F_{\alpha\beta}, \tag{3.1.1}$$

$$\tilde{F}_{\alpha\beta} = \mu(u_\alpha H_\beta - u_\beta H_\alpha). \tag{3.1.2}$$

下面我们假设 $\mu = \text{const}$. 由 (2.3.8) 和 (3.1.1), 可将能量–动量张量写成

$$E_{\alpha\beta} = \mu \left(\frac{1}{4} g_{\alpha\beta} f_{\lambda\tau} f^{\lambda\tau} - f_{\alpha\lambda} f^{\lambda}_{\beta} \right), \tag{3.1.3}$$

显然, 这一表达式是对称的.

由 (2.3.12) 可知, 当 $E_\mu = 0$, $V_\mu = 0$ 时 $E_{\alpha\beta}$ 表示为

$$\begin{aligned} E_{\alpha\beta} &= \mu \left[\left(\frac{1}{2} g_{\alpha\beta} - u_\alpha u_\beta \right) H_\sigma H^\sigma - H_\alpha H_\beta \right] \\ &= \mu \left[\left(u_\alpha u_\beta - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \right) H^2 - H_\alpha H_\beta \right]. \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

式中 $H^2 \equiv -H_\sigma H^\sigma$.

Maxwell 方程 $\tilde{f}^{\mu v}_{;v} = 0$ 简化为

$$(u^\mu H^v - u^v H^\mu)_{;v} = 0, \tag{3.1.5}$$

即

$$H^\mu u^v_{;v} + u^v H^\mu_{;v} - H^v u^\mu_{;v} - u^\mu H^v_{;v} = 0. \tag{3.1.6}$$

用 u_μ 乘上式并缩并, 注意到 $u_\alpha u^\alpha = 1$, $u_\alpha H^\alpha = 0$, 得到

$$u^\mu u^v H_{\mu;v} - H^v_{;v} = 0. \tag{3.1.7}$$

类似地, 用 H_μ 乘 (3.1.6) 并缩并, 得到

$$\frac{1}{2}u^v H^2_{;v} + H^2 u^v_{;v} - H^\mu H^v u_{\mu;v} = 0, \tag{3.1.8}$$

或者

$$\frac{1}{2}u^v H^2_{;v} + H^2 u^v_{;v} - H^\mu u^v H_{v;\mu} = 0. \tag{3.1.9}$$

3.2 磁流体动力学的主要方程

我们研究 $\mu = \text{const}$, $\sigma = \infty$ 的相对论热力学理论流体. 在这种情况下, 物质和场的能量–动量张量可表示为

$$T_{\mu v} = \rho f u_\mu u_v - p g_{\mu v} + E_{\mu v}. \tag{3.2.1}$$

和前面的定义一样, ρ 为流体的固有物质密度, p 是压强, f 是流体指数

$$f = 1 + i,$$

其中 i 是比焓.

将 (3.1.4) 代入 (3.2.1), 能量–动量张量可写为

$$T_{\mu v} = (\rho f + uH^2)u_\mu u_v - \left(p + \frac{1}{2}\mu H^2\right) g_{\mu v} - \mu H_\mu H_v. \tag{3.2.2}$$

由此我们得到

$$T_{\mu v} u^v = (\rho f + \frac{1}{2}\mu H^2 - p) u_\mu. \tag{3.2.3}$$

流体的固有能量密度是

$$\rho f - p + \frac{1}{2}\mu H^2 = \varepsilon + \frac{1}{2}\mu H^2, \tag{3.2.4}$$

其中 ε 是动力学部分. $\frac{1}{2}\mu H^2$ 是磁能部分. 式 (3.2.2) 右端 $g_{\mu v}$ 的系数 $p + \frac{1}{2}\mu H^2$ 中后一项可以解释为磁场产生一个等于 $\frac{1}{2}\mu H^2$ 的附加压强.

如果仍设 T 是流体的固有温度, S 是比熵, 则有

$$T\mathrm{d}S = \mathrm{d}i - \frac{1}{\rho}\mathrm{d}p,$$

$$\mathrm{d}p = \rho\mathrm{d}f - \rho T\mathrm{d}S. \tag{3.2.5}$$

仍将 ρ 看作是两个热力学变量 f 和 S 的已知函数 $\rho = \rho(f, S)$, 它取决于流体的内部结构.

广义相对论磁流体动力学的主要方程是 Einstein 方程和 Maxwell 方程

$$R_{\mu v} - \frac{1}{2} R g_{\mu v} = k T_{\mu v}, \tag{3.2.6}$$

$$(u^\mu H^v - u^v H^\mu)_{;v} = 0. \tag{3.2.7}$$

式中 $T_{\mu v}$ 由 (3.2.2) 给出. 我们还加一个假设: ρ 在流体运动过程中是守恒的.

3.3 流体运动学方程

守恒方程 $T^{\mu v}_{;v} = 0$ 是 Einstein 方程的结果. 将 (3.2.2) 代入守恒方程, 得到

$$\begin{aligned} T^v_{\mu;v} =& [(\rho f + \mu H^2) u^v]_{;v} u_\mu \\ & + (\rho f + \mu H^2) \mu^v u_{\mu;v} - \left(p + \frac{1}{2}\mu H^2\right)_{,\mu} \\ & - \mu H^v_{;v} H_\mu - \mu H^v H_{\mu;v} = 0. \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

用 μ^μ 缩并, 得到

$$\begin{aligned} u^\mu T^v_{\mu;v} =& [(pf + uH^2)\mu^v]_{;v} - u^v \left(p + \frac{1}{2} u H^2\right)_{,v} \\ & - \mu H^v u^\mu H_{\mu;v} = 0, \end{aligned} \tag{3.3.2}$$

即

$$(\rho f u^v)_{;v} - u^v p_{,v} + \mu \left[H^2 u^v_{;v} + \frac{1}{2} u^v H^2_{,v} - H^2 u^\mu H_{;\mu} \right] = 0. \tag{3.3.3}$$

将 (3.1.9) 代入上式, 得到**连续性方程**

$$(\rho f u^v)_{;v} - u^v p_{,v} = 0, \tag{3.3.4}$$

或者写成

$$f(pu^v)_{;v} + \rho T u^v S_{,v} = 0. \tag{3.3.5}$$

我们假定流体的运动是局部绝热的

$$u^v S_{,v} = 0, \tag{3.3.6}$$

这等价于物质密度守恒

$$(\rho u^v)_{;v} = 0. \tag{3.3.7}$$

由 Maxwell 方程和连续性方程可以得到一个经典流体动力学方程的推广形式. 由连续性方程 $(\rho u^\alpha)_{;\alpha} = 0$ 可得

$$u^\alpha_{;\alpha} = -\frac{1}{\rho} u^\alpha \rho_{,\alpha}.$$

将此式代入 Maxwell 方程 (3.1.6), 得到

$$u^v\left(\frac{H^\mu}{\rho}\right)_{;v}=\frac{H^v}{\rho}u^\mu_{;v}+u^\mu\frac{H^v_{;v}}{\rho}, \tag{3.3.8}$$

用 $2H_\mu/\rho$ 乘以上式并缩并, 得

$$u^v\frac{H_\mu}{\rho}\left(\frac{H^\mu}{\rho}\right)_{;v}=\frac{H^vH^\mu}{\rho^2}u_{\mu;v},$$

即

$$u^v\left(\frac{H^2}{p^2}\right)_{;v}=-\frac{H^\mu H^v}{\rho^2}(u_{\mu;v}+u_{v;\mu}). \tag{3.3.9}$$

此即熟知的磁流体动力学方程的广义相对论形式.

现在我们将 (3.3.2) 代入 (3.3.1), 得到流线方程. 将 (3.3.2) 右端第一项代入 (3.3.1) 右端, 得到

$$\begin{aligned}&(\rho f+\mu H^2)u^vu^\mu_{;v}-(g^{\mu v}-u^vu^\mu)\left(p+\frac{1}{2}\mu H^2\right)_{,v}\\&+\mu H^\alpha u^\sigma H_{\sigma;\alpha}u^\mu-\mu H^\alpha_{;\alpha}H^\mu-\mu H^\alpha H^\mu_{;\alpha}=0.\end{aligned} \tag{3.3.10}$$

将 (3.1.9) 代入, 得

$$\begin{aligned}&(\rho f+\mu H^2)u^vu^\mu_{;v}-(g^{\mu v}-u^\mu u^v)\left(p+\frac{1}{2}\mu H^2\right)_{,v}\\&+\frac{1}{2}\mu u^vH^2_{;v}u^\mu+\mu H^2u^\alpha_{;\alpha}u^\mu-\mu H^v_{;v}H^\mu-\lambda H^vH^\mu_{;v}=0.\end{aligned} \tag{3.3.11}$$

根据 (3.2.5), 可将 (3.3.11) 改写为

$$\begin{aligned}&(\rho f+\mu H^2)u^vu^\mu_{,v}-(g^{\mu v}-u^\mu u^v)\times\left(\rho f_{;v}+\frac{1}{2}\mu H^2_{;v}-\rho TS_{,v}\right)\\&+\frac{1}{2}\mu u^vH^2_{;v}u^\mu+\mu H^2u^v_{;v}u^\mu-\mu H^v_{;v}H^\mu-\mu H^vH^\mu_{;v}=0.\end{aligned} \tag{3.3.12}$$

这就是**流线方程**.

下面我们由这些运动方程给出一个简单而有用的公式. 用 H_μ 缩并 (3.3.10), 得到

$$(\rho f+\mu H^2)u^vu^\mu_{;v}H_\mu-H^v\left(p+\frac{1}{2}\mu H^2\right)_{,v}+\mu H^2H^v_{;v}-\mu H^vH_\mu H^\mu_{;v}=0. \tag{3.3.13}$$

由于 $u^\alpha H_\alpha=0$, 我们得到

$$\rho fu^vu^\mu_{;v}H_\mu-H^vp_{,v}+\mu[-H^2u^vu^\mu H_{\mu;v}+H^2H^v_{;v}]=0. \tag{3.3.14}$$

将 (3.1.7) 代入得

$$\rho f u^v u^\mu_{;v} H_\mu - H^v p_{,v} = 0, \tag{3.3.15}$$

或者由 $H_\mu u^\mu_{;v} = -u^\mu H_{\mu;v}$, 改写为

$$\rho f u^\mu u^v H_{\mu;v} + H^v p_{,v} = 0. \tag{3.3.16}$$

考虑到 (3.1.7) 和 (3.2.5), 上式成为

$$H^v_{;v} = -\frac{H^v}{f}(f_{,v} - TS_{,v}). \tag{3.3.17}$$

3.4 流体动力学波和阿尔文波

设 $\varphi = 0$ 是一个规则超曲面的局部方程. 流体动力学波是 $\mathrm{d}\varphi$ 的四次方程

$$P^{\alpha\beta\delta\lambda}\varphi_{,\alpha}\varphi_{,\delta}\varphi_{,\lambda} = 0 \tag{3.4.1}$$

的解, 式中

$$\begin{aligned} P^{\alpha\beta\delta\lambda} =& (\rho'_f f - \rho)u^\alpha u^\beta u^\delta u^\lambda + \left(\rho + \mu H^2 \frac{\rho'_f}{\rho}\right) g^{(\alpha\beta} u^\delta u^{\lambda)} \\ & - \frac{\mu}{f} g^{(\alpha\beta} H^\delta H^{\lambda)}, \end{aligned}$$

其中符号 $(\alpha\beta\delta\lambda)$ 是对称化符号.

所谓阿尔文波, 是 $\mathrm{d}\varphi$ 的二次方程

$$Q^{\alpha\beta}\varphi_{,\alpha}\varphi_{,\beta} = 0 \tag{3.4.2}$$

的解. 式中

$$Q^{\alpha\beta} = (\rho f + \mu H^2)u^\alpha u^\beta - \mu H^\alpha H^\beta. \tag{3.4.3}$$

我们首先讨论一般的波的传播. 考虑局部方程为 φ=const 的一族波, 设特征方程 (超曲面) 为 Σ. 将矢量 $\varphi_{,v}$ 分解成与 u_μ 平行的和垂直的两个矢量:

$$\varphi_{,\mu} = a u_\mu + w_\mu. \tag{3.4.4}$$

式中

$$a = u^\alpha \varphi_{,\alpha}, \quad w_\mu = \varphi_{,\mu} - a u_\mu$$

令

$$w^2 = -w_\alpha w^\alpha = -(\varphi_{,\alpha} - a u_\alpha)(\varphi^{,\alpha} - a u^\alpha),$$

则有

$$
\begin{aligned}
w^2 &= -g^{\alpha\beta}\varphi_{,\alpha}\varphi_{,\beta} + a^2 \\
&= -(g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta)\varphi_{,\alpha}\varphi_{,\beta} \\
&= -\gamma^{\alpha\beta}\varphi_{,\alpha}\varphi_{,\beta} \geqslant 0,
\end{aligned} \tag{3.4.5}
$$

式中

$$
\gamma^{\alpha\beta} \equiv g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta. \tag{3.4.6}
$$

由 (3.4.4) 可知, 矢量 w_μ 给出波的传播方向 (相对于 u_μ). 波矢量方向上的单位矢 $\hat{k}_\mu$ 可定义为

$$
w_\mu = w\hat{k}_\mu. \tag{3.4.7}
$$

波的速度 v 由方程

$$
(u^\mu - v\hat{k}^\mu)\varphi_{,\mu} = 0 \tag{3.4.8}
$$

中 $\hat{k}^\mu$ 的系数确定. 由 (3.4.4) 得

$$
(au_\mu + w\hat{k}_\mu)(u^\mu - v\hat{k}^\mu) = 0,
$$

即

$$
a - wv = 0, \quad v = \frac{a}{w}. \tag{3.4.9}
$$

由此得到

$$
v^2 = -\frac{(u^\lambda\varphi_{,\lambda})^2}{\gamma^{\alpha\beta}\varphi_{,\alpha}\varphi_{,\beta}}, \tag{3.4.10}
$$

或者写成

$$
1 - v^2 = \frac{g^{\lambda\sigma}\varphi_{,\lambda}\varphi_{,\sigma}}{\gamma^{\alpha\beta}\varphi_{,\alpha}\varphi_{,\beta}}. \tag{3.4.11}
$$

$v \leqslant 1$(即小于或等于光速) 的充分且必要条件是波与光锥相切或是类时的.

磁场强度 H^μ 在波矢量方向上的分量为

$$
H_k = H^\alpha\hat{k}_\alpha = H^\alpha w_\alpha/w = H^\alpha\varphi_{,a}/w, \tag{3.4.12}
$$

$$
H_k^2 = -\frac{(H^\alpha\varphi_{,\alpha})^2}{\gamma^{\lambda\sigma}\varphi_{,\lambda}\varphi_{,\sigma}}. \tag{3.4.13}
$$

1. 流体动力学波

按 (3.4.1), 流体动力学波由下式确定:

$$
\begin{aligned}
&(f\rho_v' - \rho)(u^\alpha\varphi_{,\alpha})^4 + \left(\rho + \mu H^2\frac{\rho_f'}{\rho}\right)(g^{\alpha\beta}\varphi_{,\alpha}\varphi_{,\beta}) \\
&\times(u^\alpha\varphi_{,\alpha})^2 - \frac{\mu}{f}(g^{\alpha\beta}\varphi_{,\alpha}\varphi_{,\beta})(H^\rho\varphi_{,\rho})^2 = 0.
\end{aligned} \tag{3.4.14}
$$

将 $\gamma^{\mu v}$ 的表达式 (3.4.6) 和 H_k^2 的表达式 (3.4.13) 代入, 得到

$$\left(f^2\rho_f' + \mu H^2 \frac{f\rho_f'}{\rho}\right)(u^\alpha \varphi_{,\alpha})^4 + \left(\rho f + \mu H^2 \frac{f\rho_f'}{\rho} + \mu H_k^2\right) \\ \times (u^\rho \varphi_{,\rho})^2 (\gamma^{\alpha\beta}\varphi_{,\alpha}\varphi_{,\beta}) + \mu H_k^2 (\gamma^{\alpha\beta}\varphi_{,\alpha}\varphi_{,\beta})^2 = 0. \tag{3.4.15}$$

如果 v 是一个由 (3.4.10) 给出的速度波, 则 v 就是上述方程除以 $(\gamma^{\alpha\beta}\varphi_{,\alpha}\varphi_{,\beta})^2$ 所得方程

$$\left(f^2\rho_f' + \mu H^2 \frac{f\rho_f'}{\rho}\right)v^4 - \left(\rho f + \mu H^2 \frac{f\rho_f'}{\rho} + \mu H^2\right)v^2 + \mu H_k^2 = 0 \tag{3.4.16}$$

的一个根.

可以证明

$$H_k^2 \leqslant |H|^2 \equiv H^2. \tag{3.4.17}$$

上式中的等号对应于 H_μ 与 $\hat{k}_\mu$ 同方向. 令

$$r = \frac{1}{\rho} f\rho_f' = \frac{1}{v_0^2}, \tag{3.4.18}$$

式中 v_0 是 $H=0$ 时流体动力学波的速度. 下面我们设 $r \geqslant 1$, 即 $v \leqslant 1$(小于或等于光速), 且令

$$F(x) = (\rho f + \mu H^2) r x^2 - (\rho f + \mu H^2 r + \mu H_k^2)x + \mu H_k^2, \tag{3.4.19}$$

则式 (3.4.16) 可以写为

$$F(v^2) = 0. \tag{3.4.20}$$

我们有

$$F(0) = \mu H_k^2 \geqslant 0, \quad F(1) = \rho f(r-1) \geqslant 0. \tag{3.4.21}$$

如果代入 $x = v_0^2$, 则有

$$F(v_0^2) = F(r^{-1}) = (\rho f + \mu H^2) r^{-1} - (\rho f + \mu H^2 r + \mu H_k^2) r^{-1} + \mu H_k^2 \\ = \mu (H^2 - H_k^2)(r^{-1} - 1) \leqslant 0. \tag{3.4.22}$$

由 (3.4.21) 和 (3.4.22) 可见, $F(x) = 0$ 在 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 有两个根. 这就是说, 流体动力学波有两个速度 v_1 和 v_2, 它们满足

$$v_1 \leqslant v_0 \leqslant v_2 \leqslant 1, \tag{3.4.23}$$

v_1 称为慢流体动力学波速, v_2 称为快流体动力学波速.

2. 阿尔文波

我们考察下式给出的阿尔文波:

$$(\rho f+\mu H^2)(u^\alpha\varphi_{,\alpha})^2-\mu(H^\alpha\varphi_{,\alpha})^2=0. \tag{3.4.24}$$

将 H_k^2 的表达式 (3.4.13) 代入上式, 得

$$(\rho f+\mu H^2)(u^\alpha\varphi_{,\alpha})^2+\mu H_k^2(\gamma^{\alpha\beta}\varphi_{,\alpha}\varphi_{,\beta})=0.$$

如果 v_A 是相应的速度波, 则 v_A 应是方程

$$(\rho f+\mu H^2)v_A^2-\mu H_k^2=0 \tag{3.4.25}$$

的一个根. 如果 (3.4.17), 可知

$$\mu H_k^2\leqslant\rho f+\mu H^2,$$

即 $v_A\leqslant 1$. 将 $x=v_A^2$ 代入 (3.4.19) 得

$$\begin{aligned}F(v_A^2)&=F\left(\frac{\mu H_k^2}{\rho f+\mu H^2}\right)\\&=\frac{\mu H_k^2}{\rho f+\mu H^2}[\mu H_k^2 r-(\rho f+\mu H^2 r+\mu H_k^2)+\rho f+\mu H^2]\\&=\frac{\mu H_k^2}{\rho f+\mu H^2}\mu(H_k^2-H^2)(r-1)\leqslant 0,\end{aligned} \tag{3.4.26}$$

因此有

$$v_1\leqslant v_A\leqslant v_2. \tag{3.4.27}$$

式中 v_1 和 v_2 是 (3.4.23) 中的两个动力学波速.

现在讨论两个简单的情况. 假设 φ=const 是阿尔文波, 而 H_μ 沿着波的传播方向, 即 $H_k^2=H^2$. 此时由 (3.4.19) 得到 $F(v_A^2)=0$. 这个波也是流体动力学波, 因为 $F(v_0^2)=0$. 在这种特殊情况下, v_1 和 v_2 分别与 v_0 和 v_A 相等.

假设 φ=const 是流体动力学波, 且 H_μ 与波的传播方向垂直 ($H_k=0$). 此时有

$$F(x)=(\rho f+\mu H^2)rx^2-(\rho f+\mu H^2 r)x.$$

由此得到 $v_1=0$, v_2 由下式给出:

$$\begin{aligned}v_2^2&=\frac{\rho f+\mu H^2 r}{(\rho f+\mu H^2)r}=\frac{1}{r}+\frac{\mu H^2}{\rho f+\mu H^2}\frac{r-1}{r}\\&=v_0^2+\frac{\mu H^2}{\rho f+\mu H^2}(1-v_0^2).\end{aligned} \tag{3.4.28}$$

这就是说, 在这种特殊情况下只有一个速度.

3.5 不可压缩流体

按 1.4 节的定义, 不可压缩流体即满足条件 $v_0 = 1$ 或者

$$r \equiv \frac{f}{\rho}\rho'_f = 1 \tag{3.5.1}$$

的流体.

如果 φ=const 是阿尔文波, 根据 (3.4.26) 仍然有 $F(v_A^2) = 0$. 因此阿尔文波也是动力学波. 由于 $F(1) = 0$, 故有

$$v_1 = v_A, \quad v_2 = v_0 = 1. \tag{3.5.2}$$

在 1.4 节中我们已经看到, 对于不可压缩流体, 连续性方程 $(\rho u^\alpha)_{;\alpha} = 0$ 导致 $(fu^\alpha)_{;\alpha} = 0$. 当磁场存在时, 可引入流体总指数 K 代替 f, 有

$$K = \frac{1}{\rho}(\rho f + \mu H^2) = f + \mu\frac{H^2}{\rho}. \tag{3.5.3}$$

相应的流矢量为

$$v^\mu = ku^\mu. \tag{3.5.4}$$

对于不可压缩流体, 我们有

$$\begin{aligned} v^v_{;v} &= \left[u^v\left(f + \mu\frac{H^2}{\rho}\right)\right]_{;v} = \mu\left(\frac{H^2}{\rho}u^v\right)_{;v} \\ &= \mu\frac{H^2}{\rho^2}(\rho u^v)_{;v} + \mu\rho u^v\left(\frac{H^2}{\rho^2}\right)_{;v}. \end{aligned}$$

将 (3.3.9) 代入上式, 得到

$$v^v_{;v} = -\mu\frac{H^v H^\mu}{\rho}(u_{\mu;v} + u_{v;\mu}) \tag{3.5.5}$$

3.6 冲 击 方 程

我们假设 $g_{\mu v}$ 及其一阶导数是连续的. 一个冲击波就是一个四维空–时中的类时超曲面 Σ, 通过这一面时 u^μ, H^μ 或某个热力学变量不连续.

如果 Σ 的局部方程为 $\varphi = 0$, 则 $\varphi_{,\mu}$ 定义了一个与 Σ 垂直的矢量, 设该矢量方向的单位矢为 $\hat{n}_\mu(\hat{n}^\alpha\hat{n}_\alpha = -1)$. 我们将磁场分解为相对于 Σ 的一个切向分量和一个法向分量. 设

$$H^\mu = t^\mu - \eta\hat{n}^\mu, \quad t^\alpha\hat{n}_\alpha = 0. \tag{3.6.1}$$

式中, t^μ 是切向磁场, $\eta\hat{n}^\mu$ 是法向磁场, 其中

$$\eta = H^{\alpha}\hat{n}_{\alpha}. \tag{3.6.2}$$

由 (3.6.1) 可知

$$|t|^2 \equiv t^2 = -t^{\alpha}t^{\alpha} = H^2 - \eta^2 \geqslant 0. \tag{3.6.3}$$

设 M 和 M' 是冲击前后的值, 我们以 $[M]$ 表示 M 在 Σ 面上一点处的不连续性; $[M] \equiv M' - M$.

对磁流体动力学的主要方程

$$T^{\mu v}_{;v} = 0, \quad (\rho u^v)_{;v} = 0, \quad (u^{\mu}H^v - u^v H^{\mu})_{;v} = 0 \tag{3.6.4}$$

作一经典的讨论, 可以导出冲击方程

$$[T^{\mu v}]\hat{n}_v = 0, \tag{3.6.5}$$

$$[\rho u^v]\hat{n}_v = 0, \tag{3.6.6}$$

$$[u^{\mu}H^v - u^v H^{\mu}]\hat{n}_v = 0. \tag{3.6.7}$$

由 (3.6.6) 可知, 标量

$$a = \rho u^v \hat{n}_v \tag{3.6.8}$$

是不变的. 由 (3.6.7) 可知矢量

$$V^{\mu} = \eta u^{\mu} - \frac{a}{\rho}H^{\mu} \tag{3.6.9}$$

是不变的, 式中 η 由 (3.6.2) 定义. 可以看出

$$V^{\mu}\hat{n}_{\mu} = \eta u^{\mu}\hat{n}_{\mu} - \frac{a}{\rho}\eta = 0.$$

由此可知, 不变矢量 V^{μ} 与冲击波 Σ 相切.

流体动力学波是 (3.4.1) 的解, 其中

$$\begin{aligned} P^{\alpha\beta\delta\lambda} =& \rho f(r-1)u^{\alpha}u^{\beta}u^{\delta}u^{\lambda} \\ &+ (\rho f + \mu H^2 r)g^{(\alpha\beta}u^{\delta}u^{\lambda)} - \mu g^{(\alpha\beta}H^{\delta}H^{\lambda)}. \end{aligned} \tag{3.6.10}$$

由能量–动量张量 (3.2.2) 和 (3.6.10) 可以得到一个通过 Σ 时不变的矢量 W^{μ}:

$$W^{\mu} = a\left(\frac{f}{\rho} + \mu\frac{H^2}{\rho^2}\right)pu^{\mu} - q\hat{n}^{\mu} - \mu\eta H^{\mu}, \quad \rho, \rho' > 0, \tag{3.6.11}$$

式中

$$q = p + \frac{1}{2}\mu H^2. \tag{3.6.12}$$

由 $a = \rho u^v \hat{n}_v = \rho' u'^v \hat{n}_v$ 的不变性可知, $u^v\hat{n}_v = 0$ 的充分且必要条件是 $u'^v\hat{n}_v = 0$(即切向冲击). 对于非切向冲击, $u^v\hat{n}_v$ 和 $n'^v\hat{n}_v$ 有同一符号 (此处为负).

3.7 切向冲击和非切向冲击

1. 切向冲击

我们有

$$u^v \hat{n}_v = u'^v \hat{n}_v = 0. \tag{3.7.1}$$

由 (3.6.9) 和 (3.6.11) 得到

$$\eta u^\mu = \eta' u'^\mu, \tag{3.7.2}$$

$$(q' - q)\hat{n}^\mu + \mu(\eta' H'^\mu - \eta H^\mu) = 0. \tag{3.7.3}$$

当 $\eta \neq 0$ 时, 可以发现, u^μ 和 n'^μ 都是么模的而且共线. 因此 $u^\mu = \pm u'^\mu$. 但是负号不合理 (u'^μ 和 u^μ 应指向未来), 故有 $[u^\mu] = 0$ 和 $[\eta] = 0$, 于是得到

$$[u^\mu] = 0, \quad [H^\mu] = 0, \quad [p] = 0. \tag{3.7.4}$$

ρ 的不连续性是不确定的.

当 $\eta = 0$ 时, 由 (3.7.2) 导致 $\eta' = 0$. 一般的冲击方程只给出

$$u^v \hat{n}_v = u'^v \hat{n}_v = 0, \quad H^v \hat{n}_v = H'^v \hat{n}_v,$$

$$\left[p + \frac{1}{2}\mu H^2\right] = 0, \tag{3.7.5}$$

其他不连续性是不确定的.

2. 非切向冲击 ($a \neq 0$) 的不变量

引入不变的标量

$$G = \frac{1}{a^2} V^\mu V_\mu = \frac{\eta^2}{a^2} - \frac{H^2}{\rho^2}. \tag{3.7.6}$$

我们寻找不变矢量 W^μ 的一个表达式. 由 (3.6.9) 有

$$H^\mu = \frac{\eta}{a}\rho u^\mu - \frac{\rho}{a} V^\mu,$$

代入 (3.6.11), 得到

$$W^\mu = a\left(\frac{f}{\rho} + \mu\frac{H^2}{\rho^2}\right)\rho u^\mu - qH^\mu - \mu\frac{\eta^2}{a}\rho u^\mu + \mu\frac{\rho\eta}{a}V^\mu,$$

或者写成

$$W^\mu = a\left(\frac{f}{\rho} - \mu G\right)\rho u^\mu - q\hat{n}^\mu + \mu\frac{\rho\eta}{a}V^\mu. \tag{3.7.7}$$

引入变量

$$a = \frac{f}{\rho} - \mu G, \tag{3.7.8}$$

可将 W^μ 写为

$$W^\mu = a\alpha\rho u^\mu - q\hat{n}^\mu + \mu\frac{\rho\eta}{a}V^\mu. \tag{3.7.9}$$

把 ρu^μ 按 Σ 的切向和法向分解, 得到

$$\rho u^\mu = W^\mu - a\hat{n}^\mu, \quad w^\mu\hat{n}_\mu = 0, \tag{3.7.10}$$

即

$$W^\mu = \rho u^\mu + \hat{n}^\mu. \tag{3.7.11}$$

又由 (3.7.9) 和 (3.7.10) 可得

$$W^\mu = X^\mu - (q + a^2\alpha)\hat{n}^\mu, \tag{3.7.12}$$

$$X^\mu \equiv a\alpha W^\mu + \mu\frac{\rho\eta}{a}V^\mu. \tag{3.7.13}$$

矢量 X^μ 与 Σ 相切. 由于矢量 W^μ 在冲击前后是不变的, 所以矢量 X^μ 和标量 $(q + a^2\alpha)$ 都是不变量.

由 (3.7.9) 和 (3.7.8), 可将标量 $X^\mu V_\mu$ 写成

$$X^\mu V_\mu = W^\mu V_\mu = a\rho\eta(\alpha + \mu G) = af\eta, \tag{3.7.14}$$

因此有下面两个不变量

$$b = f\eta, \quad l = \alpha + \frac{q}{a^2}. \tag{3.7.15}$$

现在考虑不变量

$$K = \frac{1}{a^2}X^\mu X_\mu. \tag{3.7.16}$$

由 (3.9.11) 得

$$W^\mu W_\mu = \rho^2 + a^2, \quad W^\mu V_\mu = \rho u^\mu V_\mu = \rho\eta. \tag{3.7.17}$$

将 (3.9.13) 和 (3.9.17) 代入 (3.9.16), 得到

$$K = (\rho^2 + a^2)\alpha^2 + 2\mu\frac{\rho^2\eta^2}{a^2}\alpha + \mu\frac{\rho^2\eta^2}{a^2}G, \tag{3.7.18}$$

将 (3.7.8) 代入, 得到

$$\begin{aligned} K =& (\rho^2 + a^2)\frac{f^2}{\rho^2} + 2\mu\frac{f}{\rho}\left\{\frac{\rho^2\eta^2}{a^2} - (\rho^2 + a^2)G\right\} \\ & - \mu^2 G\left\{\frac{\rho^2\eta^2}{a^2} - (\rho^2 + a^2)G\right\}. \end{aligned} \tag{3.7.19}$$

考虑到 (3.7.6), 可将最后一项挂号中的表达式改写为

$$k^2 \equiv \frac{\rho^2\eta^2}{a^2} - (\rho^2 + a^2)G = H^2 - a^2G$$

$$= t^2 + \frac{a^2}{\rho^2} H^2. \tag{3.7.20}$$

只要磁场不等于零, k^2 是恒正的. 将此式代入 (3.9.19), 得到

$$K = (\rho^2 + a^2)\frac{f^2}{\rho^2} + 2\mu \frac{f}{\rho} k^2 - \mu^2 G k^2. \tag{3.7.21}$$

现在我们改写 GK 的表达式, 从而给出另一个不变量. 由 (3.7.18) 可得

$$GK = G(\rho^2 + a^2)\alpha^2 + \frac{\rho^2\eta^2}{a^2}\mu G(2\alpha + \mu G),$$

代入 (3.7.8), 得到

$$\begin{aligned} GK &= G(\rho^2 + a^2)\alpha^2 + \frac{\rho^2\eta^2}{a^2}\left(\frac{f^2}{\rho^2} - \alpha^2\right) \\ &= \left\{G(\rho^2 + a^2) - \frac{\rho^2\eta^2}{a^2}\right\}\alpha^2 + \frac{f^2\eta^2}{a^2}, \end{aligned} \tag{3.7.22}$$

其中 $f^2\eta^2/a^2 = b^2/a^2$ 是不变量, 所以下面的量 L 也是不变量

$$L = \frac{b^2}{a^2} - GK = \left\{\frac{\rho^2\eta^2}{a^2} - (\rho^2 + a^2)G\right\}\alpha^2, \tag{3.7.23}$$

或者将 (3.7.20) 代入, 得到

$$L = k^2\alpha^2. \tag{3.7.24}$$

3.8 非切向冲击的分析

(1) 由前面的讨论可知, 两个热力学变量 f、q 和三个标量 $u^v\hat{n}_v$、$H^v\hat{n}_v$、H^2 满足五个关系式

$$a = \rho u^v \hat{n}_v = \rho' u'^v \hat{n}_v, \tag{3.8.1}$$

$$b = f\eta = f'\eta', \tag{3.8.2}$$

$$G = \frac{\eta^2}{a^2} - \frac{H^2}{\rho^2} = \frac{\eta'^2}{a^2} - \frac{H'^2}{\rho'^2}, \tag{3.8.3}$$

$$l = \alpha + \frac{q}{a^2} = \alpha' + \frac{q'}{a^2}, \tag{3.8.4}$$

$$\begin{aligned} K &= (\rho^2 + a^2)\frac{f^2}{\rho^2} + 2\mu k^2 \frac{f}{\rho} - \mu^2 G k^2 \\ &= (\rho'^2 + a^2)\frac{f'^2}{\rho'^2} + 2\mu k'^2 \frac{f'}{\rho'} - \mu^2 G k'^2. \end{aligned} \tag{3.8.5}$$

由 (3.8.2) 和 (3.8.3) 可以发现, 磁场在冲击之后趋于零的充分且必要条件是它在冲击之前就趋于零.

(2) 设 $\rho', f', u'^v\hat{n}_v$, $\eta' = H'^v\hat{n}_v$ 和 $|H'|$ 是方程组 (3.8.1)~(3.8.5) 的一组解. 在 Σ 上的一点, 我们引入一瞬时正交标架 $\{e_{(a)}\}$, 使 $e_{(1)}$ 与 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 重合. 相对于这一标架, 一般冲击方程 (3.6.5) 和 (3.6.7) 给出

$$\begin{aligned}&H'^1u'^i - u'^1H'^i = H^1u^i - u^1H^i,\\&(\rho'f' + \mu H'^2)u'^1u'^i - \mu H'^1H'^i = (\rho f + \mu H^2)u^1u^i - \mu H^1H^i,\end{aligned}\tag{3.8.6}$$

此处 $i = 0, 2, 3$, $u'^1 = -u^{1\alpha}\hat{n}_\alpha$, $H'^1 = -H^{1\alpha}\hat{n}_\alpha$. 上二式左端以 u'^i 和 H'^i 为未知量的行列式为

$$D' = (\rho'f' + \mu H'^2)(u'^\alpha\hat{n}_\alpha)^2 - \mu(H'^\alpha\hat{n}_\alpha)^2.\tag{3.8.7}$$

如果 $D' \neq 0$, 则方程 (3.8.6) 确定 u'^i 和 H'^i.

在关系式 (3.8.1)~(3.8.5) 中,(3.8.1) 来自一般冲击方程; (3.8.4) 表示 W^μ 的法向分量的不变性; (3.8.2), (3.8.3) 和 (3.8.5) 是 (3.8.1), (3.8.4) 和 (3.8.6) 的结果.

由于阿尔文波是方程 (3.4.23) 的解, 关系式 $D' = 0$ 表示 Σ 在冲击之后是一个阿尔文波. 我们考虑标量

$$\begin{aligned}D &= (\rho f + \mu H^2)(u^v\hat{n}_v)^2 - \mu(H^v\hat{n}_v)^2\\&= \left(\frac{f}{\rho} + \mu\frac{H^2}{\rho^2}\right)a^2 - \mu\eta^2.\end{aligned}$$

由此可得

$$\frac{D}{a^2} = \frac{f}{\rho} + \mu\frac{H^2}{\rho^2} - \mu\frac{\eta^2}{a^2} = \alpha.$$

从而有

$$\frac{D}{a^2} = \alpha, \quad \frac{D'}{a^2} = \alpha'.\tag{3.8.8}$$

根据阿尔文波满足的方程 (3.4.24), 不难知道变量 α 的物理意义.

由 (3.7.24) 可知

$$k^2\alpha^2 = k'^2\alpha'^2, \quad k\alpha = k'\alpha'.\tag{3.8.9}$$

假设 Σ 在冲击之后是一个阿尔文波 ($\alpha' = 0$), 则必有 $G > 0$, 磁场 H'^μ 和 H^μ 在 $x \in \Sigma$ 不等于零; 因此 $k^2 > 0$, 由 (3.8.9) 可知 $\alpha = 0$. 因此 Σ 在冲击之前就是阿尔文波. 我们得到结论: 在非切向冲击中, 冲击之后的波 Σ 为一个阿尔文波的充分且必要条件是在冲击之前就是一个阿尔文波.

如果满足上述条件 (即 $\alpha' = \alpha = 0$), 则冲击称为一个阿尔文冲击.

现在考虑 $\alpha' = \alpha \neq 0$ 的情况. 此时我们有

$$\left[\frac{f}{\rho}\right] = 0. \tag{3.8.10}$$

由 (3.8.9) 可知 $k'^2 = k^2$; 根据 (3.7.20) 我们得到

$$[H^2] = 0. \tag{3.8.11}$$

由 (3.8.4) 可知 $[q] = 0$, 因此有

$$[p] = 0. \tag{3.8.12}$$

为了得到 f 的变化情况, 我们把 K 的表达式改写为

$$K = f^2 + \mu H^2 \frac{f}{\rho} + \mu H^2 \alpha + a^2 \alpha^2, \tag{3.8.13}$$

式中右端后三项在冲击中均不变, 因此有 $[f] = 0$. 又由 (3.8.10) 可知 $[\rho] = 0$. 将上面的结果代入 (3.8.1) 和 (3.8.2), 得到

$$[u^v \hat{n}_v] = 0, \quad [H^v \hat{n}_v] = 0.$$

Σ 是非阿尔文波, 由 (3.8.6) 得到 u^μ, H^μ 和热力学变量通过 Σ 时都是连续的. 因此得到结论: 如果 $\alpha' = \alpha \neq 0$, 则冲击趋于零.

3.9 阿尔文冲击

现在仔细些研究 $\alpha' = \alpha = 0$ 的情况. 我们将 f 和 S 看作主要的热力学变量, 流体动力学波的速度 v_0 由 (3.4.18) 给出

$$r = \frac{f\rho'_f}{\rho} = \frac{1}{v_0^2}.$$

$v_0 < 1$, 故有

$$f\rho'_f - \rho > 0. \tag{3.9.1}$$

我们在上述条件下研究阿尔文冲击. 将 $\alpha = 0$ 代入 (3.7.8) 和 (3.8.10), 有

$$\frac{f}{\rho} = \frac{f'}{\rho'} = \mu G, \quad \left[\frac{f}{\rho}\right] = 0. \tag{3.9.2}$$

由 (3.8.1)~(3.8.4) 得到

$$[ru^v \hat{n}_v] = 0, \quad [f\eta] = 0, \quad \left[\frac{\eta^2}{a^2} - \frac{H^2}{r^2}\right] = 0,$$

$$\left[p + \frac{1}{2}\mu H^2\right] = 0. \tag{3.9.3}$$

由 K 的不变性和 (3.8.13) 可以得到

$$\left[f^2 + \mu H^2 \frac{f}{\rho}\right] = 0,$$

将 (3.9.2) 代入得 $[f^2 + \mu H^2] = 0$. 又因为 $\mu H^2 = -[2p]$, 所以有

$$[\rho f - 2p] = 0. \tag{3.9.4}$$

引入两个热力学变量 φ 和 ψ

$$\varphi = \rho f - 2p, \quad \psi = \ln\left(\frac{f}{\rho}\right),$$

考虑这两个变量的独立性. 由于 $\mathrm{d}p = \rho \mathrm{d}f - T\mathrm{d}S$, 我们有

$$\varphi'_f = f\rho'_f - \rho, \quad \psi'_f = -\frac{f\rho'_f - \rho}{\rho f},$$

$$\varphi'_S = f\rho'_S + 2\rho T, \quad \psi'_S = -\frac{\rho'_S}{\rho}.$$

相应的 Jacobi 为

$$J\left[\frac{(\varphi,\psi)}{(f,S)}\right] = \frac{2T}{f}(f\rho'_f - \rho) \neq 0.$$

在上述假定下, 变量 φ 和 ψ 是独立的, 而且由 (3.9.2) 和 (3.9.4) 可知, 通过 Σ 时 φ 和 ψ 都是连续的. 因此有

$$[\rho] = 0, \quad [f] = 0, \quad [p] = 0. \tag{3.9.5}$$

代入 (3.9.3), 得到

$$[u^v \hat{n}_v] = 0, \quad [H^v \hat{n}_v] = 0, \quad [H^2] = 0. \tag{3.9.6}$$

冲击之后切向磁场的方向是不确定的. 由 (3.8.6) 得到

$$\left(\frac{f}{\rho} + \mu\frac{H^2}{f^2}\right)\rho u^v \hat{n}_v p[W^\mu] - \mu\eta[t^\mu] = 0.$$

下面我们讨论两种阿尔文波. 令

$$\beta = \left(\frac{\rho f + \mu H^2}{\mu}\right)^{1/2}, \tag{3.9.7}$$

则 (3.4.24) 可写为

$$\begin{aligned}&\beta^2(u^\alpha\varphi_{,\alpha})^2-(H^\alpha\varphi_{,\alpha})^2\\=&(\beta u^\alpha\varphi_{,\alpha}+H^\alpha\varphi_{,\alpha})(\beta u^\alpha\varphi_{,\alpha}-H^\alpha\varphi_{,\alpha})=0.\end{aligned}\tag{3.9.8}$$

阿尔文波分 A 波和 B 波两种, 对应于上式中两个因子等于零.

A 波满足方程 $(\beta u^\alpha+H^\alpha)\varphi_{,\alpha}=0$.

B 波满足方程 $(\beta u^\alpha-H^\alpha)\varphi_{,\alpha}=0$.

因此, 阿尔文波是由矢量场

$$A^\alpha=\beta u^\alpha+H^\alpha \quad 或 \quad B^\alpha=\beta u^\alpha-H^\alpha \tag{3.9.9}$$

的迹线发生的. 由于 $\beta>0$, 所以矢量 A^α 和 B^α 是类时的. 我们讨论在阿尔文冲击中的矢量 A^α 和 B^α. 由 (3.8.6) 得到

$$\beta^2u^v\hat{n}_v[u^i]-H^v\hat{n}_v[H^i]=0,\quad i=0,2,3. \tag{3.9.10}$$

如果冲击是 A 类阿尔文冲击 (即 Σ 是由 A 的迹线发生的): $A^\alpha\hat{n}_\alpha=0$, 则 (3.9.10) 可写为

$$\beta u^v\hat{n}_v[\beta u^i+h^i]=0.$$

由于冲击是非切向的, 所以 $[\beta u^i+H^i]=[A^i]=0$. A^1 在阿尔文冲击中是不变量, 所以我们得到

$$[A^\alpha]=0. \tag{3.9.11}$$

结论是: 在 A 类 (或 B 类) 阿尔文冲击中, 矢量 A^α(或 B^α) 保持不变.

3.10 矢量 U^μ 在冲击中的性质

考虑一个非切向冲击 $a\alpha\neq0$, 这不是一个阿尔文冲击, 而且 V^μ 不是各向同性的 ($G\neq0$). 我们有

$$V^\mu=\frac{\eta}{\rho}W^\mu-\frac{a}{\rho}t^\mu. \tag{3.10.1}$$

根据 (3.7.17), W^μ 是类时的且不为零; 由 (3.6.3) 和 (3.6.9) 可知 t^μ 是类空的且有

$$t^\mu V_\mu=H^\mu V_\mu=\frac{a}{\rho}H^2. \tag{3.10.2}$$

由此可见, 如果 $H^\mu\neq0$, 则 $t^\mu\neq0$, 且 V^μ 与 W^μ 不共线.

根据 (3.7.13), X^μ 是在 $x\in\Sigma$ 的二维平面上. 由于 $\alpha\neq0$, 这个二维平面可以由 V^μ 和 W^μ 定义, 而且在冲击中是不变的. 以 Π_x 表示上述二维平面, 则在 $x\in\Sigma$ 处速度和磁场的切向分量在冲击中是 Π_x 上的不变量.

在 2 维平面 Π_x 上, 考虑矢量 U^μ

$$\alpha U^\mu \equiv \frac{G}{a} X^\mu - \frac{f\eta}{a^2} V^\mu. \tag{3.10.3}$$

由 (3.7.14) 和 (3.7.6) 可得

$$\alpha U^\mu V_\mu = \frac{G}{a} X^\mu V_\mu - bG = 0.$$

由 (3.7.13) 得

$$\begin{aligned}\alpha U^\mu &= \frac{G}{a}(a\alpha W^\mu + \mu\frac{\rho\eta}{a} V^\mu) - \frac{f\eta}{a^2} V^\mu \\ &= \alpha G W^\mu - \frac{\rho\eta}{a^2}\left(\frac{f}{\rho} - \mu G\right) V^\mu,\end{aligned}$$

即

$$U^\mu = G W^\mu - \frac{\rho\eta}{a^2} V^\mu \tag{3.10.4}$$

或者写为

$$U^\mu = \frac{\eta}{a} t^\mu - \frac{H^2}{\rho^2} W^\mu. \tag{3.10.5}$$

由 (3.10.3) 得到

$$\alpha^2 U^\mu U_\mu = G^2 K - \frac{b^2}{a^2} G. \tag{3.10.6}$$

代入 L 的表达式 (3.7.23) 和 (3.7.24), 得

$$\alpha^2 U^\mu U_\mu = -GL, \quad U^\mu U_\mu = -GK^2. \tag{3.10.7}$$

矢量 U^μ 在冲击中保持与自身共线, 由 (3.8.9) 有

$$U'^\mu = \frac{\alpha}{\alpha'} U^\mu = \frac{k'}{k} U^\mu,$$

由此得到

$$\begin{aligned}[U^\mu] &= \left(\frac{k'}{k} - 1\right) U^\mu, \\ [U^\mu][U_\mu] &= \left(\frac{k'}{k} - 1\right)^2 U^\mu U_\mu = -G(k' - k)^2.\end{aligned} \tag{3.10.8}$$

3.11　广义相对论 Hugoniot 方程

方程 (3.8.5) 可写为

$$[f^2] + a^2\left[\frac{f^2}{\rho^2}\right] + 2\mu\left[\frac{f}{\rho} k^2\right] - \mu^2 G[k^2] = 0. \tag{3.11.1}$$

我们计算第二项

$$a^2\left[\frac{f^2}{\rho^2}\right]=\left(\frac{f'}{\rho'}+\frac{f}{\rho}\right)a^2\left(\frac{f'}{\rho'}-\frac{f}{\rho}\right)=\left(\frac{f'}{\rho'}+\frac{f}{\rho}\right)a^2[\alpha]. \tag{3.11.2}$$

由 (3.8.4) 和 (3.6.12) 得

$$a^2[\alpha]=-[p]-\frac{1}{2}\mu[H^2]. \tag{3.11.3}$$

而 $[k^2]=[H^2]$, 因此有

$$a^2\left[\frac{f^2}{\rho^2}\right]=-\left(\frac{f}{\rho}+\frac{f'}{\rho'}\right)[p]-\frac{1}{2}\mu\left(\frac{f}{\rho}+\frac{f'}{\rho'}\right)[k^2]. \tag{3.11.4}$$

将上式代入 (3.10.1), 得到

$$\begin{aligned}&[f^2]-\left(\frac{f}{\rho}+\frac{f'}{\rho'}\right)[p]-\frac{1}{2}\mu\left(\frac{f}{\rho}+\frac{f'}{\rho'}\right)[k^2]\\&+2\mu\left[\frac{f}{\rho}k^2\right]-\mu^2H[k^2]=0,\end{aligned} \tag{3.11.5}$$

第四项中的 [ ] 可写为

$$\left[\frac{f}{\rho}k^2\right]=\frac{f'}{\rho'}(k'^2-k^2)+\left(\frac{f'}{\rho'}-\frac{f}{\rho}\right)k^2.$$

又有

$$\left[\frac{f}{\rho}k^2\right]=\left(\frac{f'}{\rho'}-\frac{f}{\rho}\right)k'^2+\frac{f}{\rho}(k'^2-k^2),$$

二式相加, 得到

$$2\left[\frac{f}{\rho}k^2\right]=\left[\frac{f}{\rho}\right](k^2+k'^2)+\left(\frac{f}{\rho}+\frac{f'}{\rho'}\right)[k^2]. \tag{3.11.6}$$

将 (3.11.6) 代入 (3.11.5), 得到

$$[f^2]-\left(\frac{f}{\rho}+\frac{f'}{\rho'}\right)[p]+\frac{1}{2}\mu(\alpha+\alpha')[k^2]+\mu[\alpha](k^2+k'^2)=0. \tag{3.11.7}$$

根据 (3.8.9), 可将上式左端后两项改写为

$$\frac{1}{2}(\alpha+\alpha')[k^2]+[\alpha](k^2+k'^2)=\frac{1}{2}[\alpha](k-k')^2. \tag{3.11.8}$$

下面我们给出 (3.11.8) 的推导. 由 (3.8.9) 可得

$$\begin{aligned}(\alpha+\alpha')[k^2]&=(\alpha+\alpha')(k'^2-k^2)\\&=kk'\alpha-kk'\alpha'+k'^2\alpha-k^2\alpha'\end{aligned}$$

$$= -kk'(\alpha' - \alpha) - (k^2\alpha' - k'^2\alpha),$$

右端第二项为

$$\begin{aligned} k^2\alpha - k'^2\alpha &= k^2(\alpha' - \alpha) - (k'^2 - k^2)\alpha \\ &= -(k'^2 - k^2)\alpha' + k'^2(\alpha' - \alpha) \\ &= \frac{1}{2}\left\{[\alpha](k^2 + k'^2) - (\alpha + \alpha')[k^2]\right\}. \end{aligned}$$

由此得到

$$(\alpha + \alpha')[k^2] = -kk'[\alpha] - \frac{1}{2}[\alpha](k^2 + k'^2) + \frac{1}{2}(\alpha + \alpha')[k^2],$$

于是有 (3.11.8).

将 (3.11.8) 和 (3.10.8) 代入 (3.11.7), 得到

$$[f^2] - \left(\frac{f}{\rho} + \frac{f'}{\rho'}\right)[p] + \frac{1}{2}\mu\left[\frac{f}{\rho}\right]\frac{|[U]|^2}{|G|} = 0. \tag{3.11.9}$$

此即广义相对论 Hugoniot 方程.

第五篇　黑 洞 物 理

在恒星演化过程中, 由于辐射, 核燃料不断消耗, 恒星在引力作用下不断收缩. 随着核燃料消耗殆尽, 老年恒星按质量大小将分别坍缩成白矮星、中子星和黑洞. 广义相对论预言, 质量大于 3.2 倍太阳质量的大质量恒量将坍缩为黑洞. 本篇在阐述黑洞的基本概念和基本性质的基础上, 讨论经典黑洞热力学、黑洞熵的量子修正和黑洞的量子辐射. 关于黑洞的更详细的讨论, 可参阅《经典黑洞和量子黑洞》(王永久, 2008).

第 1 章　Schwarzschild 黑洞

黎曼空间度规张量既取决于空间的几何性质又依赖于坐标系的选择. 因此, 度规的奇异性分为两种：一种是内禀奇异性, 另一种是坐标奇异性. 坐标奇点可以通过坐标变换消除, 而内禀奇点是空间的内禀属性, 不能由坐标变换消除.

1.1　Schwarzschild 面

在 Schwarzschild 外部场中,

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)\mathrm{d}t^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2 - r^2\mathrm{d}\Omega^2, \tag{1.1.1}$$

$r = r_s = 2m$ 处有 $g_{11} = \infty$, $g_{00} = 0$, 称为**Schwarzschild 奇点**. 由于在 $r = r_s$ 处度规张量的行列式和标曲率都是正常的, $g = -r_s^4 \sin^2\theta$, $R \equiv g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = 12r_s^{-4}$, 可见 $r = r_s$ 处的奇异性并不是度规的内禀特性. 下面将看到, 通过适当的坐标变换可以消除奇点 $r = r_s$, 因此这是坐标奇点. Schwarzschild 度规还有一个奇点, 即 $r = 0$. 由于相应的标曲率 $R = 12r_s^2/r^6 \to \infty$, 所以这一奇点是无法用坐标变换消除的, 这是内禀奇点 (或称真奇点).

Schwarzschild 奇点 $r = r_s$ 构成一个面, 称为**Schwarzschild 面**. 现在我们讨论这个面的性质. 容易发现, 满足条件 $\mathrm{d}t = \mathrm{d}\theta = \mathrm{d}\varphi = 0$ 的线是短程线, 沿着这些线有

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2. \tag{1.1.2}$$

这些线在 $r > r_s$ 的区域是类空的, 在 $r < r_s$ 区域是类时的. 但一条短程线的切矢量在沿短程线移动时不能由类时的变为类空的 (只能沿线平移), 因此, 这两个区域在面上无光滑连接. 我们也可以考虑沿径向传播的光线来说明这一点. 此时有

$$\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}\varphi = 0, \quad \mathrm{d}s = 0,$$

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \pm\left(1 - \frac{r_s}{r}\right). \tag{1.1.3}$$

类时方向包含在光锥之内, 我们考察当 r 减小时光锥顶角的变化. 在区域 $r > r_s$ 中, 光锥顶角随 r 的减小而减小；当 $r \to r_s$ 时光锥顶角趋于零；进入区域 $r < r_s$ 之后, 坐标 t 的参数线变为类空的, 光锥转 90°；r 从 r_s 到 0, 光锥顶角减小. 上述情况如图 5-1 所示. 比较 Schwarzschild 面两侧的两个不同的光锥图, 可见 $r > r_s$ 和 $r < r_s$ 两个区域无光滑连接.

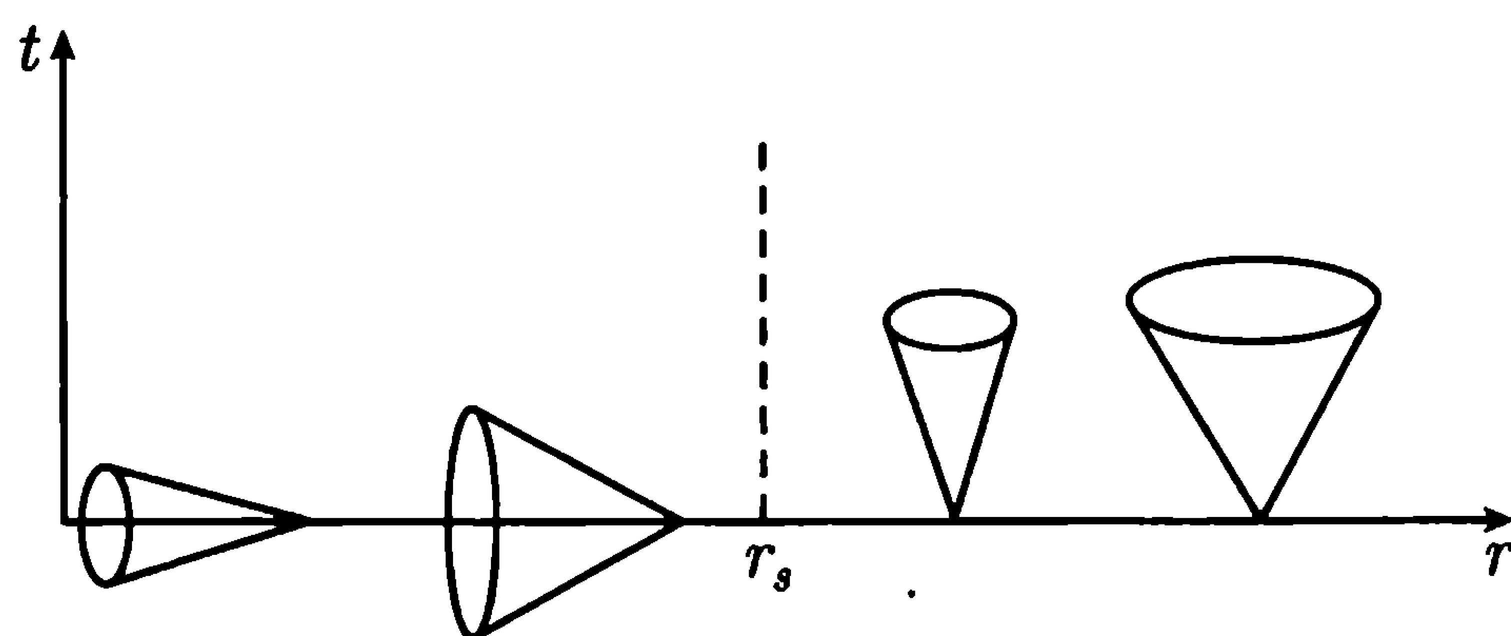


图 5-1

考虑一粒子沿径向自由落下, 此时有

$$u^2 = u^3 = 0, \quad u^\mu = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s}.$$

由短程线方程可得

$$\frac{\mathrm{d}u^0}{\mathrm{d}s} + \Gamma^0_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = 0,$$

$$\frac{\mathrm{d}u^0}{\mathrm{d}s} = -\Gamma^0_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = -g^{00} g_{00,1} u^0 u^1 = -g^{00} \frac{\mathrm{d}g_{00}}{\mathrm{d}s} u^0. \tag{1.1.4}$$

积分, 得到

$$g_{00} u^0 = k = \text{const}. \tag{1.1.5}$$

式中常数 k 是 $u^1 = 0$(开始自由下落) 处 g_{00} 的值. 又由线元的表达式 (1.1.1) 可得

$$g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = g_{00} u^{02} + g_{11} u^{12} = 1. \tag{1.1.6}$$

用 g_{00} 乘 (1.1.6) 并注意 $g_{00} g_{11} = -1$, 得到

$$k^2 - u^{12} = 1 - \frac{r_s}{r},$$

由此得到

$$u^1 = -\left(k^2 - 1 + \frac{r_s}{r}\right)^{1/2} \quad (\text{注意} \ \ u^1 < 0). \tag{1.1.7}$$

由 (1.1.5) 和 (1.1.7) 可知

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}r} = \frac{u^0}{u^1} = -k\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} \left(k^2 - 1 + \frac{r_s}{r}\right)^{-1/2}. \tag{1.1.8}$$

积分上式, 得到

$$t = -\int_{r_0}^{r_s} \frac{k \mathrm{d}r}{(1 - r_s/r)\sqrt{k^2 - 1 + r_s/r}} \to \infty. \tag{1.1.9}$$

此式表明, 自由粒子自 $r = r_0 > r_s$ 处落至 Schwarzschild 面, 在远处观察者看来, 需要经过无限长时间. 自 r_0 至 r_s 的径向距离是有限的, 由 $\mathrm{d}l^2 = \gamma_{ij} \mathrm{d}x^i \mathrm{d}x^j$ 得

$$l = \int_{r_0}^{r_s} \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{1 - r_s/r}}, \tag{1.1.10}$$

此式具有有限值.

在与下落粒子固连的坐标系中, 测得的对应时间间隔为

$$\int_0^s \mathrm{d}s = \int_{r_0}^{r_s} \frac{\mathrm{d}r}{u^1} = -\int_{r_0}^{r_s} \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{k^2 - 1 + r_s/r}}, \tag{1.1.11}$$

此式具有有限值. 这就是说, 对于自由下落的观察者来说, 质点经过有限长时间便可到达 Schwarzschild 面. 此后它可以越过 Schwarzschild 面一直到达 $r = 0$(如果源质量集中在中心奇点). 如果把恒星物质看作零压流体 ("尘埃"), 恒星一经坍缩, 由上面的讨论可知, 在随动坐标系观测, 恒星表面将在有限时间内缩至奇点 $r = 0$. 而在远处观察者看来, 恒星表面缩至 $r = r_s$ 需要无限长时间. 在 2.2 节中我们还要讨论这一问题.

设一束光波由 Schwarzschild 面附近发出, 频率为 ν_A, 远处观察者接收到的频率为 ν_B. 由光谱线的频移公式有

$$\frac{\nu_B}{\nu_A} = \frac{\sqrt{g_{00}^A}}{\sqrt{g_{00}^B}},$$

对无限远处的观察者 B, $g_{00}^B \to 1$. 所以当 $g_{00}^A = 0$ 时出现无限红移. 即当光源位于 Schwarzschild 面上时, 远处观察者测得无限红移. 故称面 $r = r_s(g_{00} = 0$ 的面) 为**无限红移面**. 由此可知, 当试验粒子落到无限红移面上时, 粒子上发生的一切物理过程, 在远处观察者看来都变得无限缓慢.

1.2 自由下落坐标系

在沿径向自由下落的坐标系中测得粒子自 $r = r_0$ 到达 $r = r_s$ 需要有限长时间, 可见在这一坐标系中奇点 $r = r_s$ 已不存在. 因此, 为了把 Schwarzschild 度规延拓到 $r < r_s$ 的区域, 我们寻找一个坐标变换, 由 Schwarzschild 坐标系 (t, r) 变至自由下落坐标系 (τ, ρ). 为此, 令

$$\tau = t + f(r), \quad \rho = t + \varphi(r). \tag{1.2.1}$$

式中 f 和 φ 是待定函数. 我们希望能够通过 f 和 φ 的选择, 以新的线元表达式 $\mathrm{d}\tau^2 - \frac{r_s}{r}\mathrm{d}\rho^2$ 代替 (1.1.1) 的右端, 这样便消除了奇点 $r = r_s$. 由 (1.2.1) 有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\tau^2 - \frac{r_s}{r}\mathrm{d}\rho^2 &= (\mathrm{d}t + f'\mathrm{d}r)^2 - \frac{r_s}{r}(\mathrm{d}t + \varphi'\mathrm{d}r)^2 \\ &= \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)\mathrm{d}t^2 - 2\left(f' - \frac{r_s}{r}\varphi'\right)\mathrm{d}t\mathrm{d}r + \left(f'^2 - \frac{r_s}{r}\varphi'^2\right)\mathrm{d}r^2. \end{aligned} \tag{1.2.2}$$

式中 $f' \equiv \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}$. 可见只要选择 f 和 φ, 使之满足

$$f' = \frac{r_s}{r}\varphi', \tag{1.2.3}$$

$$\frac{r_s}{r}\varphi'^2 - f'^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1}, \tag{1.2.4}$$

从这些方程中消去 f, 得到

$$\varphi' = \left(\frac{r_s}{r}\right)^{-1/2}\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1}, \tag{1.2.5}$$

积分得

$$\varphi = \frac{2}{3A}r^{3/2} + 2Ar^{1/2} - A^2 \ln \frac{r^{1/2}+A}{r^{1/2}-A}, \tag{1.2.6}$$

式中 $A = r_s^{1/2}$. 又由 (1.2.3) 和 (1.2.5) 得

$$\varphi' - f' = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)\varphi' = \left(\frac{r}{r_s}\right)^{1/2},$$

积分上式, 注意到 (1.2.1), 得到

$$\varphi - f = \rho - \tau = \frac{2}{3}r_s^{-1/2}r^{3/2}, \tag{1.2.7}$$

或者

$$r = r_s^{1/3}\left[\frac{3}{2}(\rho - \tau)\right]^{2/3} \tag{1.2.8}$$

由 (1.2.6) 和 (1.2.7) 便完全确定了变换 (1.2.1):

$$\begin{aligned} r &= r_s^{1/3}\left[\frac{3}{2}(\rho-\tau)\right]^{2/3} \\ t &= \tau - 2\sqrt{r_s r} - r_s \ln \frac{|\sqrt{r}-\sqrt{r_s}|}{\sqrt{r}+\sqrt{r_s}} \\ &= \tau - 2r_s^{2/3}\left[\frac{3}{2}(\rho-\tau)\right]^{1/3} - r_s \ln \frac{\left|\left[\frac{3}{2}(\rho-\tau)\right]^{1/3} - r_s^{1/3}\right|}{\left|\left[\frac{3}{2}(\rho-\tau)\right]^{1/3} + r_s^{1/3}\right|}. \end{aligned} \tag{1.2.9}$$

这就是说, 可以找到满足 (1.2.3)~(1.2.4) 的函数 f 和 φ. 于是 Schwarzschild 度规变为

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\tau^2 - \left[\frac{3}{2}\left(\frac{\rho-\tau}{r_s}\right)\right]^{-2/3}\mathrm{d}\rho^2 - r_s^{2/3}\left[\frac{3}{2}(\rho-\tau)\right]^{4/3}\mathrm{d}\Omega^2. \tag{1.2.10}$$

此即 Lemaitre 度规.

由 (1.2.7) 可知, 当 $r = r_s$ 时, $\rho - \tau = 2r_s/3$, 此时度规 (1.2.10) 不再有奇异性.

由于度规 (1.2.10) 和 Schwarzschild 度规由坐标变换相联系, 所以度规 (1.2.10) 在 $r > r_s$ 区域满足爱因斯坦方程; 解析延拓至 $r < r_s$ 的区域之后, 由 $r = r_s$ 处无奇

点可以推断, 在 $r \leqslant r_s$ 区域 (1.2.10) 仍满足爱因斯坦方程. 仅在 $r = 0$(即 $\rho - \tau = 0$) 处有一奇点.

由 (1.2.7) 得到

$$\mathrm{d}\rho = \mathrm{d}\tau + \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{r_s}}\mathrm{d}r = \mathrm{d}t + \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{r_s}}\frac{\mathrm{d}r}{1 - r_s/r}. \tag{1.2.11}$$

由 (1.1.5) 和 (1.1.7) 给出

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \frac{k}{1 - r_s/r}, \quad \frac{\mathrm{d}_r}{\mathrm{d}s} = u^1 = -\left(k^2 - 1 + \frac{r_s}{r}\right)^{1/2}. \tag{1.2.12}$$

粒子开始下落时有 $u^1 = 0, r \to \infty$, 代入上式确定 $k = 1$, 于是上式给出 $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s} = -\frac{\sqrt{r_s}}{\sqrt{r}}$, $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = k(1 - r_s/r)^{-1}$, 代入 (1.2.11), 得到 $\mathrm{d}\rho = 0$. 这正表明坐标系 (τ, ρ) 是自由下落的.

显然, 度规 (1.2.10) 是一个动态度规.

在 Schwarzschild 度规中, $r > r_s$ 和 $r < r_s$ 两个区域的 g_{00} 和 g_{11} 均反号, 这相当于时间轴和空间轴对换, 导致两个区域不连通, $r = r_s$ 为奇异面. 在 Lemaitre 度规中, 这一奇异性已消除. 由 (1.2.10) 可知, 在 $r > r_s$ 和 $r < r_s$ 两个区域, ρ 恒为空间轴, τ 恒为时间轴, 除 $r = 0$ 以外不存在 Schwarzschild 奇点.

1.3 Schwarzschild 黑洞

我们考察沿径向的光信号的行为. 令 $\mathrm{d}s = 0$, $\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}\varphi = 0$, 得到

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\tau} = \pm c\sqrt{\frac{r}{r_s}}. \tag{1.3.1}$$

式 (1.3.1) 给出的空–时图表明, 在 R 区 ($r > r_s$ 的区域), 沿径向向外发射的光线可达无限远处, 沿径向向内的光线可穿过 Schwarzschild 面到达奇点 $r = 0$. 在 T 区 ($r < r_s$ 的区域), 沿两个方向的光线都要到达奇点 $r = 0$. 总之, Schwarzschild 面是一个**单向膜**, 外面的粒子或光子可以通过它进入 T 区, 到达奇点 $r = 0$, 而里面 (T 区) 的粒子和光子都不可能到达 R 区. 这一单向膜称为**视界**(horizon), T 区称为 Schwarzschild 黑洞 (black hole).

由于爱因斯坦引力场方程在时间反演下是不变的, 所以度规 (1.2.10) 经过时间反演变换后仍满足爱因斯坦方程. 这时有

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\tau^2 - \left[\frac{3}{2}\frac{\rho + \tau}{r_s}\right]^{-2/3}\mathrm{d}\rho^2 - \left[\frac{3}{2}(\rho + \tau)\right]^{4/3} r_s^{2/3}\mathrm{d}\Omega^2. \tag{1.3.2}$$

这仍是一个动态度规.

对于径向光线 ($\mathrm{d}s=0,\mathrm{d}\theta=\mathrm{d}\varphi=0$), 由空–时图可见, 径向光信号的行为与图 2 给出的相反, 任何粒子和光子都不可能由 R 区进入 $\tilde{T}$ 区, 而 $\tilde{T}$ 区的粒子和光子都要进入 R 区. 这样, Schwarzschild 面仍是单向膜, 但只允许由里向外的辐射. $\tilde{T}$ 区称为**白洞**(white hole).

1.4 Kruskal 坐标

上节中引入的 Lemaitre 度规虽然消除了 Schwarzschild 度规中的奇点 $r=r_s$, 但是仍不能统一地描述 R 区、T 区和 $\tilde{T}$ 区的过程. Kruskal (1960) 提出一个坐标变换, 使 Schwarzschild 度规在新坐标系中除了 $r=0$ 以外不存在奇点, 而且可以统一地描述 R 区、T 区和 $\tilde{T}$ 区的过程 (见图 5-2~ 图 5-4).

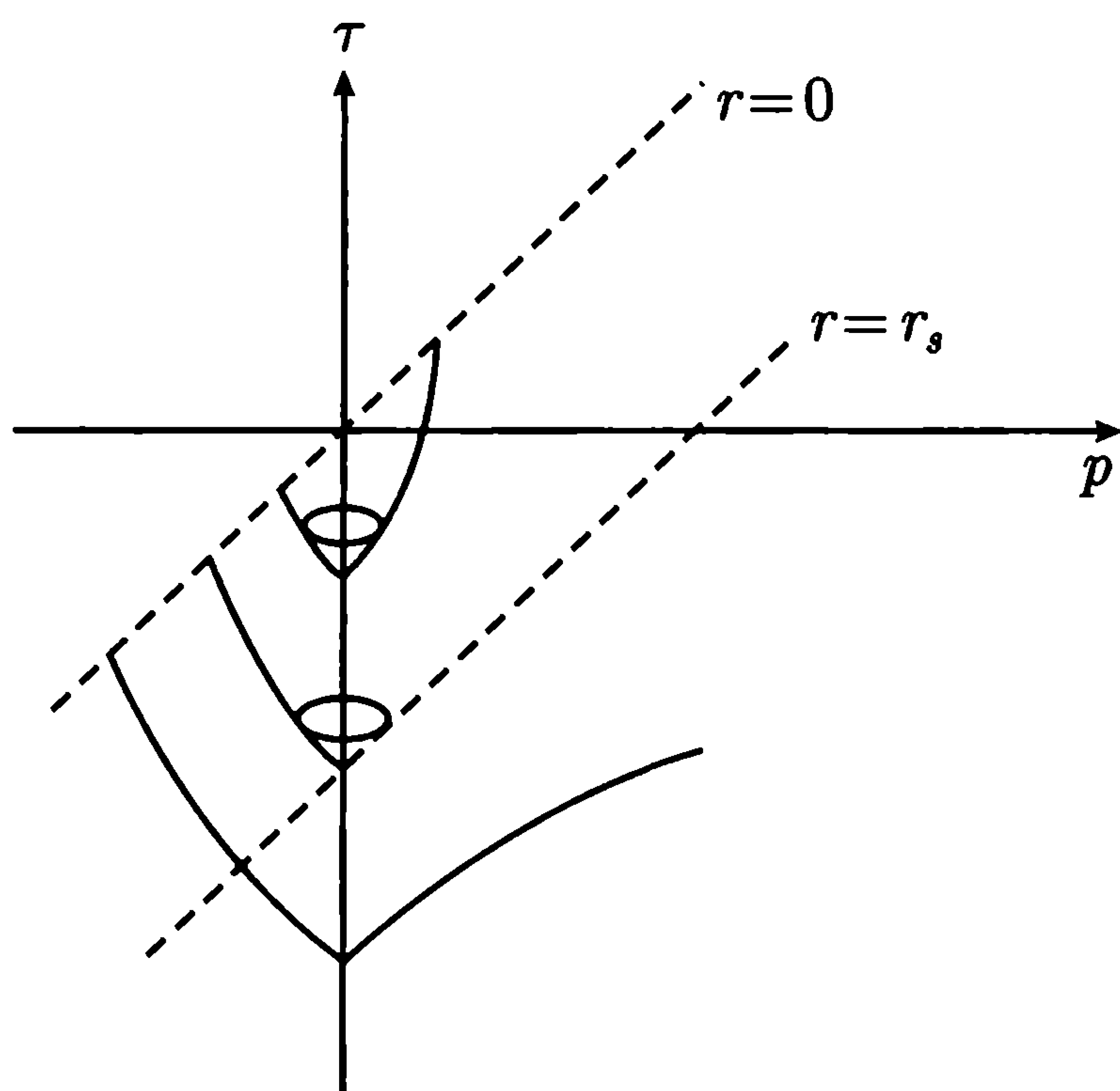


图 5-2

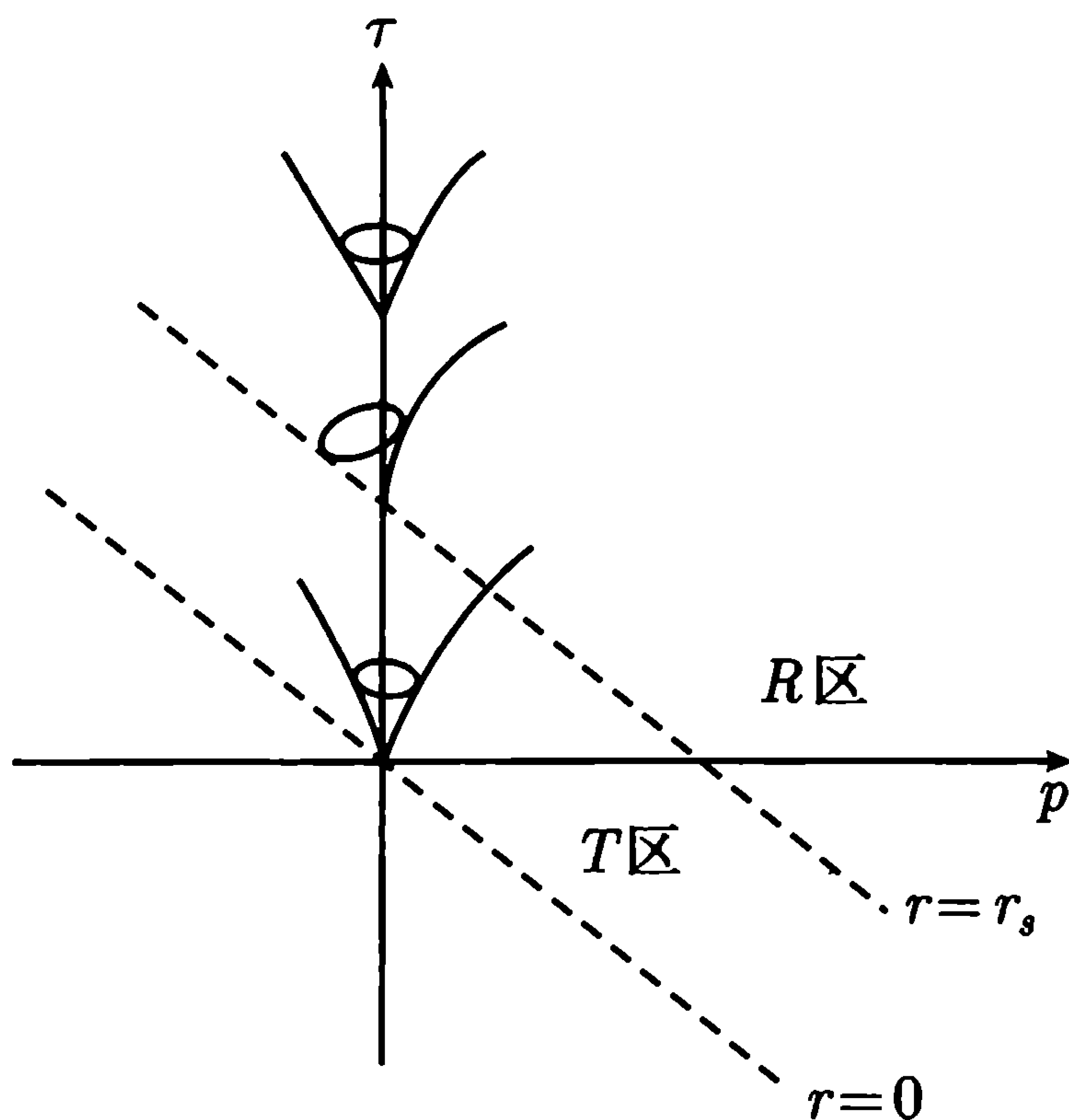


图 5-3

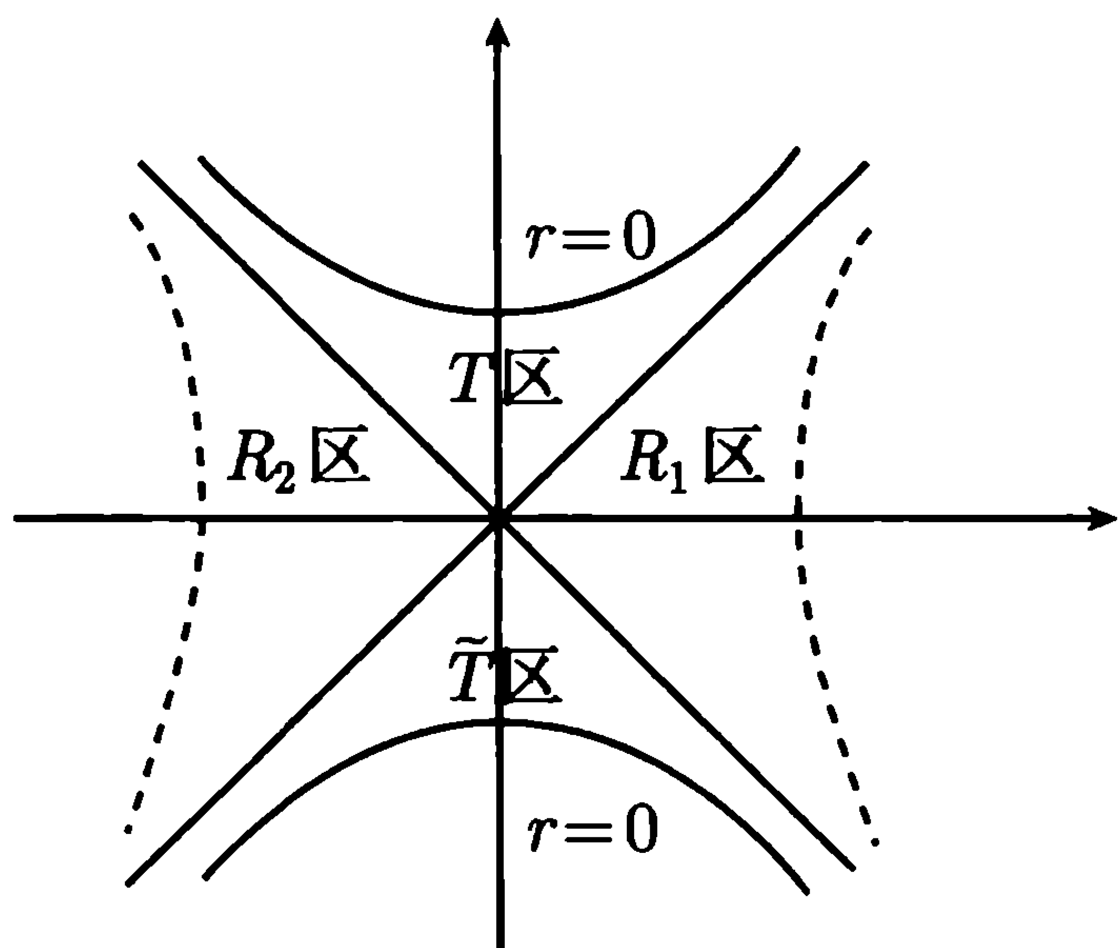


图 5-4

如果从流形中任一点出发的短程线在两个方向上都可无限延长, 或终止于内禀奇点, 则此流形称为**最大解析的流形**. 如果从流形中任一点出发的短程线在两个方向上都可无限延长, 则此流形称为**完备的**. 下面讨论的 Kruskal 流形是最大解析的但不是完备的 (有奇点 $r=0$).

Kruskal 引入一个新的坐标系

$$x^0=v,\quad x^1=u,\quad x^2=\theta,\quad x^3=\varphi. \tag{1.4.1}$$

度规具有形式

$$\mathrm{d}s^2=f^2\mathrm{d}v^2-f^2\mathrm{d}u^2-r^2(v,u)\mathrm{d}\Omega^2. \tag{1.4.2}$$

令 (1.4.2) 和 (1.1.1) 相等, 并要求函数 $f=f(r)$, 当 $v=u=0$ 时, f 有限且不等于

零, 可以确定由 Schwarzschild 坐标变至 Kruskal 坐标的变换式, 当 $r > r_s$ 时, 得

$$v = \pm\left(\frac{r}{r_s}-1\right)^{1/2} \exp\left(\frac{r}{2r_s}\right)\mathrm{sh}\left(\frac{t}{2r_s}\right),$$
$$u = \pm\left(\frac{r}{r_s}-1\right)^{1/2} \exp\left(\frac{r}{2r_s}\right)\mathrm{ch}\left(\frac{t}{2r_s}\right). \tag{1.4.3}$$

逆变换为

$$\left(\frac{r}{r_s}-1\right)\exp\left(\frac{r}{r_s}\right) = u^2 - v^2,$$
$$\frac{t}{2r_s} = \mathrm{arcth}\left(\frac{v}{u}\right); \tag{1.4.4}$$

f 由下式确定:

$$f^2 = \frac{32m^3}{r}\exp\left(-\frac{r}{r_s}\right) = f^2(u^2 - v^2). \tag{1.4.5}$$

式中右端表示自变量为 $(u^2 - v^2)$ 的一个超越函数.

当 $r < r_s$ 时, 得到

$$v = \pm\left(1-\frac{r}{r_s}\right)^{1/2} \exp\left(\frac{r}{2r_s}\right)\mathrm{ch}\left(\frac{t}{2r_s}\right),$$
$$u = \pm\left(1-\frac{r}{r_s}\right)^{1/2} \exp\left(\frac{r}{r_s}\right)\mathrm{sh}\left(\frac{t}{2r_s}\right); \tag{1.4.3a}$$

逆变换为

$$\left(\frac{r}{r_s}-1\right)\exp\left(\frac{r}{r_s}\right) = u^2 - v^2,$$
$$\frac{t}{2t_s} = \mathrm{arcth}\frac{u}{v}. \tag{1.4.4a}$$

最后得到 Krushal 度规

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{32m^3}{r}\exp\left(-\frac{r}{r_s}\right)(\mathrm{d}v^2 - \mathrm{d}u^2) - r^2\mathrm{d}\Omega^2. \tag{1.4.6}$$

由上式可见, 度规除了 $r = 0$ 有一奇点以外, 再无奇点. 由 (1.4.4) 可知, $r = r_s$ 对应于 $v = \pm u$, 即空–时图中两条 $\pm\frac{\pi}{4}$ 分角线. 由 (1.4.4) 还可看出, 中心奇点 $r = 0$ 对应于 $v^2 - u^2 = 1$, 是两条等轴双曲线, 其渐近线就是上述两条 $\pm\frac{\pi}{4}$ 分角线.

以 $r = 0$(两条双曲线) 和 $r = r_s$(两条分角线) 为界, 可将空时分成四个区域: 左右两个区域 (R_2 区和 R_1 区), $r > r_s$; 上下两个区域 (T 区和 $\widetilde{T}$ 区), $r < r_s$.

在 R_1 区和 R_2 区, $r=$ 常数 $> r_s$ 对应于 $u^2 - v^2 = C > 0$, 是以 u 轴为对称轴的双曲面簇.

在 T 区和 $\widetilde{T}$ 区, $r=$ 常数 $< r_s$ 对应于 $v^2-u^2=C>0$, 是以 v 轴为对称轴的双曲面簇.

对于光子的径向运动, $\mathrm{d}s=\mathrm{d}\theta=\mathrm{d}\varphi=0$, 由 (1.4.6) 得

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}=\pm 1, \tag{1.4.7}$$

即光锥面与 $\pm\frac{\pi}{4}$ 分角线平行, 与狭义相对论中的情形相同. 因此类时线满足

$$\mathrm{d}s^2>0, \quad \left|\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\right|<1,$$

与 u 轴夹角大于 $\frac{\pi}{4}$. 类空线满足

$$\mathrm{d}s^2<0, \quad \left|\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\right|>1,$$

与 u 轴夹角小于 $\frac{\pi}{4}$.

由空–时图可见, R_1 区和 R_2 区的粒子随时间坐标 v 的增大不可能进入 $\widetilde{T}$ 区, 只能进入 T 区; T 区的粒子随 v 的增大将一律到达中心奇点 $r=0$, 不可能沿相反方向运动. 因此, T 区即 Schwarzschild 黑洞, $r=r_s$ 为视界.

$\widetilde{T}$ 区内的粒子将一律进入 R 区 (R_1, R_2), 相反的过程是不可能的. 因此, $\widetilde{T}$ 区即 Schwarzschild 白洞, $r=r_s$ 仍为单向膜.

在 Kruskal 空时中存在两个不联通的宇宙, 对应于 R_1 区和 R_2 区. 不可能用任何信号把这两个区域联系起来. 两个区域中间隔一个“喉”(throat) 或称为“虫洞”(wormhole). 这两个宇宙的含义现在尚不清楚.

1.5 Penrose 图

首先区分下列几个不同的无穷远概念:

I^+: 类时未来无穷远

定义 对于任一有限 r 值, 当 $t\to+\infty$ 时, 类时世界线伸展的区域.

I^-: 类时过去无穷远

定义 对于任一有限 r 值, 当 $t\to-\infty$ 时, 类时世界线伸展的区域.

I^0: 类空无穷远

定义 对于任一有限 t 值, 当 $r\to\infty$ 时, 类空世界线伸展的区域.

$\mathscr{L}^+$: 类光未来无穷远

定义 当 $(t-r)$ 为有限值, 而 $(t+r)\to\infty$ 的区域, 或所有出射类光世界线的伸展区域.

$\mathscr{L}^-$: 类光过去无穷远

定义 当 $(t+r)$ 为有限值, 而 $(t-r)\to-\infty$ 的区域, 或发出入射类光世界线的区域.

可以证明, 在共形变换下, 闵可夫斯基时空图 5-5 可变为 Penrose 图 5-6. 同样, Kruskal 时空图 5-4 可变为 Penrose 图 5-7.

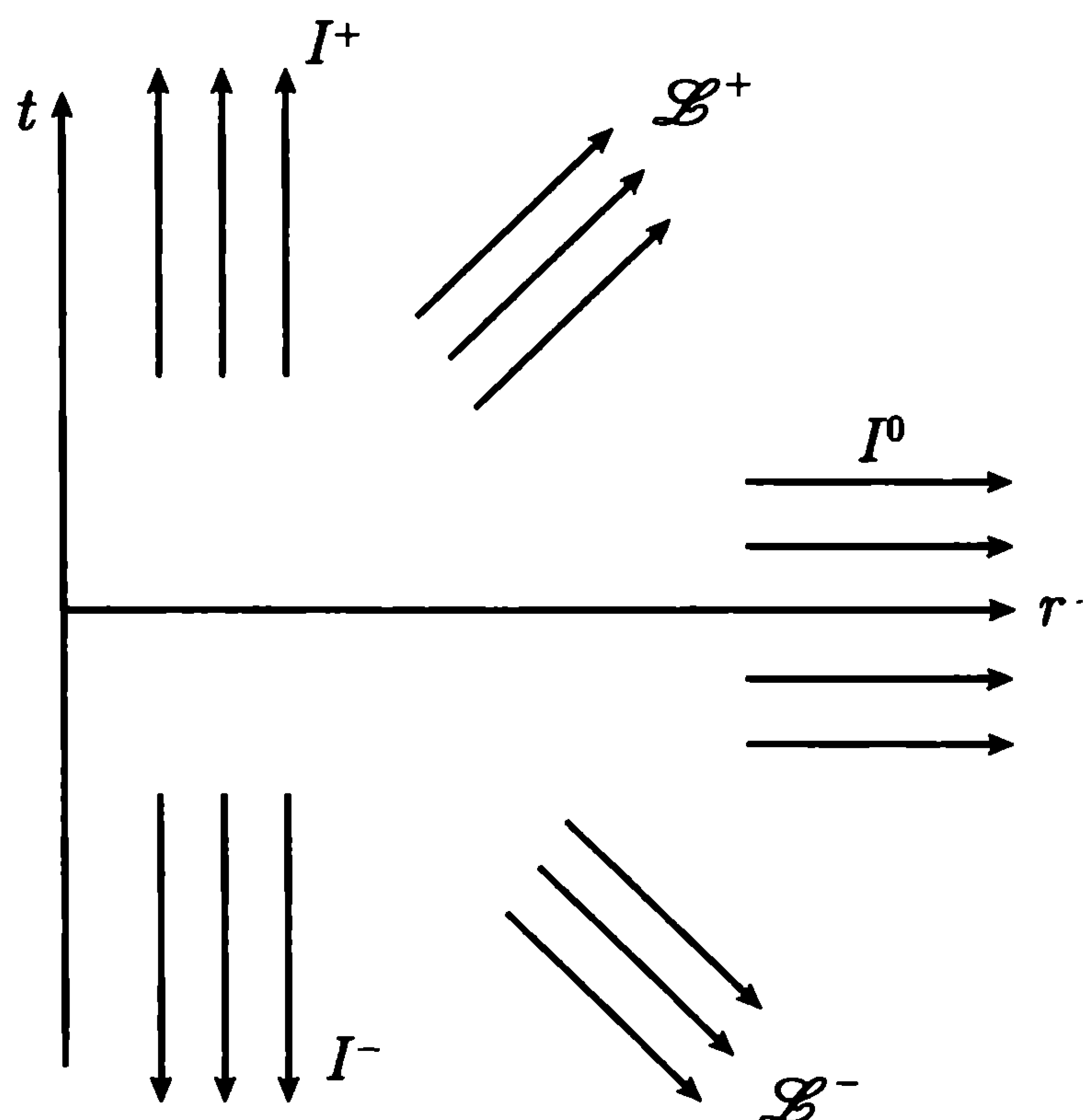


图 5-5

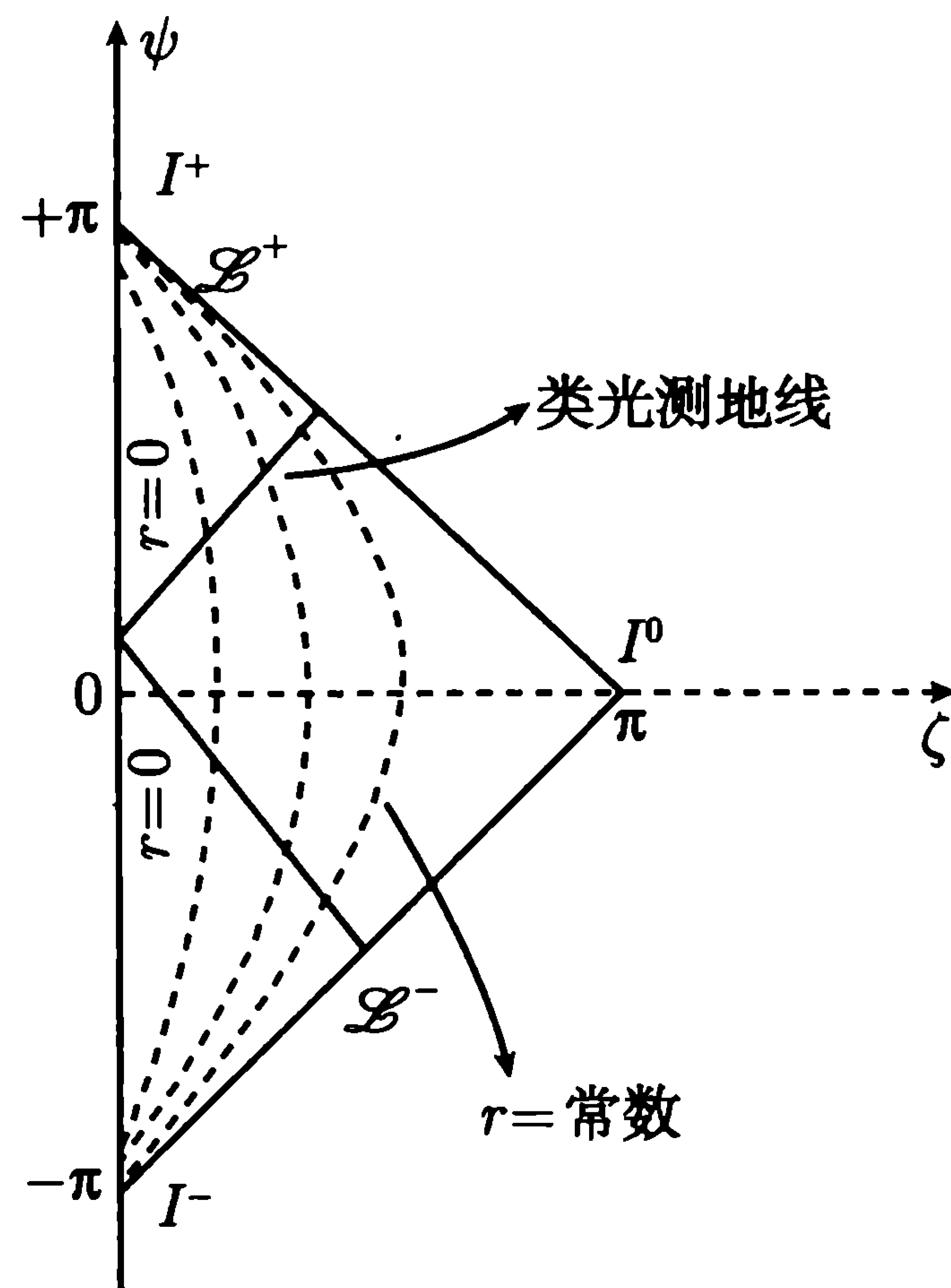


图 5-6

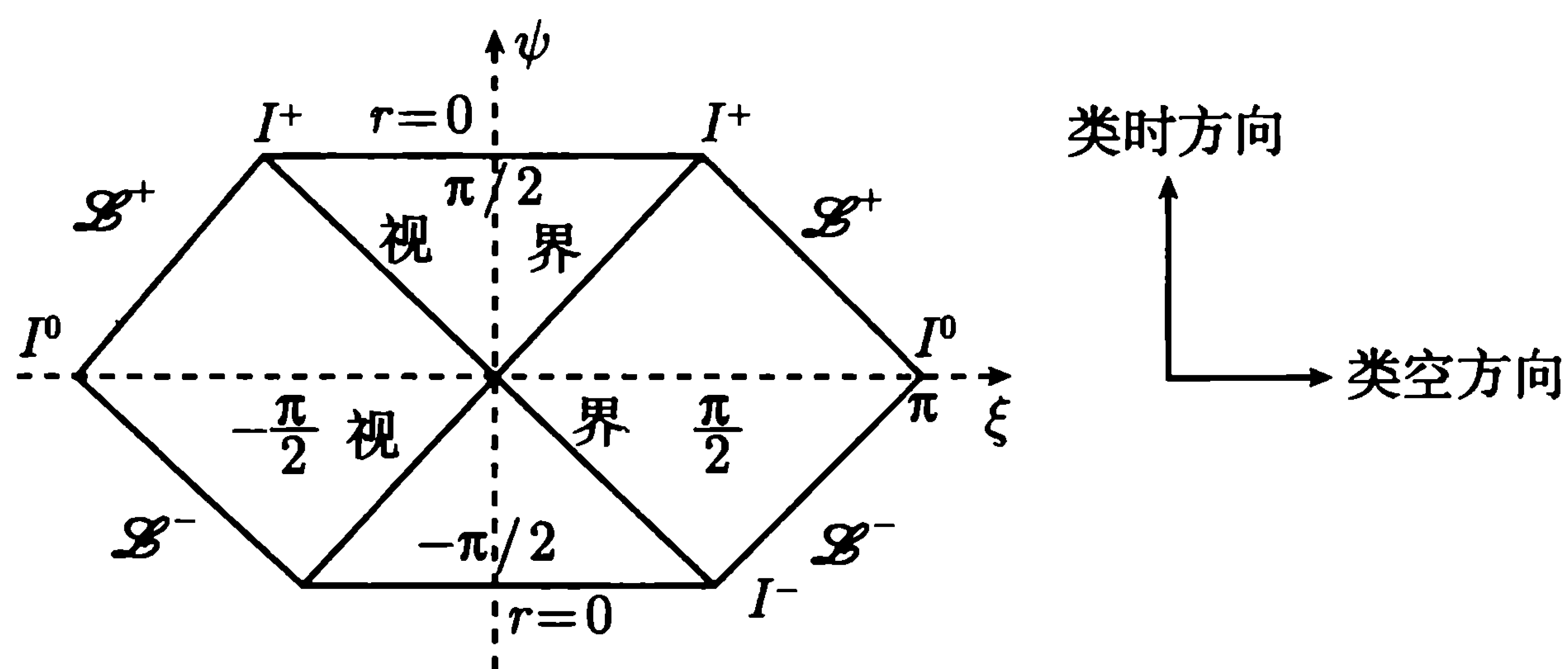


图 5-7

第 2 章　球对称恒星的引力坍缩

一颗温度高于环境温度的恒星会连续发射能量, 它的质量不断减少. 恒星物质在引力的压缩过程中被加热, 使氢核聚变, 成为氦, 从而提供防止恒星冷却的能源, 并产生强大的辐射压与引力相平衡. 这样的恒星的平均密度是 $1\mathrm{g{\cdot}cm^{-3}}$. 太阳就是这类恒星的一个例子.

当恒星的氢燃烧殆尽以后, 可以发生其他的核反应过程, 产生更重的核. 但这些过程持续的时间很短. 在强大的引力的作用下, 恒星物质密度迅速增大, 致使恒星物质 (除极薄的外层部分以外) 的电子发生简并, 于是恒星进入一个新的平衡阶段, 由电子的简并压和引力相平衡. 这种恒星的密度约为 $10^7\mathrm{g{\cdot}cm^{-3}}$, 白矮星就属于这类恒星.

质量大于 $1.2M_\odot$ 的白矮星不可能稳定, 电子和核内的质子反应变为中子, 从而使恒星物质呈中子态. 中子星便属于这类恒星, 其密度约为 $10^{14}\mathrm{g{\cdot}cm^{-3}}$. 如果中子星质量 $M < 3.2M_\odot$, 则可以稳定存在. 现在人们知道, 脉冲星即中子星, 它们发出的光和电磁辐射脉冲周期从 $10^{-3}\mathrm{s}$ 到 $1\mathrm{s}$. 观测到的脉冲星周期相当准确, 这只可能解释为中子星在旋转, 而以这样的周期旋转的恒星半径应该相当小. 中子星靠着简并中子气产生的简并压支撑引力以维持力学平衡.

质量大于 $3.2M_\odot$ 的中子星不可能稳定, 它会无限坍缩, 成为黑洞*.

2.1　广义相对论恒星的引力平衡

Schwarzschild 内部解为

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{e}^\nu \mathrm{d}t^2 - \mathrm{e}^\lambda \mathrm{d}r^2 - r^2\mathrm{d}\Omega^2. \tag{2.1.1}$$

式中 $\nu = \nu(r), \lambda = \lambda(r)$. 度规 (2.1.1) 描述静态球对称恒星内部的引力场. 质量密度 $\rho = \rho(r)$、压力 $p = p(r)$ 的理想流体模型是星际物质的一个很好的近似. 当 ρ 不等于常数时, 解场方程得到 (2.1.1) 中的度规系数

$$\mathrm{e}^{-\lambda} = 1 - \frac{2m(r)}{r}. \tag{2.1.2}$$

式中 $m(r)$ 为质量函数, 定义为

$$m(r) \equiv 4\pi \int_0^r \rho(x) r^2 \mathrm{d}r. \tag{2.1.3}$$

---

* 白矮星和中子星的临界质量的数值因态方程 (模型) 不同而略有不同.

采用 (2.1.2), 可将其余场方程写为

$$\nu' = -\frac{2p'}{p+\rho}, \tag{2.1.4}$$

$$kp = \frac{\nu'}{r}\left(1-\frac{2m}{r}\right) - \frac{2m}{r^3}. \tag{2.1.5}$$

我们先讨论 $\rho=\rho(r)$ 的一般情况, 然后再讨论 ρ=const 的情况. 一个稳定平衡的恒星须满足一些物理条件. 设恒星半径为 r_0, $p(r_0)=0$, $p_{\max}=p(0)=$ 有限值, $\rho_{\max}=\rho(0)=$ 有限值; 质量密度 $\rho(r)$ 随 r 的增大而减小

$$\rho'^{(r)} < 0. \tag{2.1.6}$$

在恒星表面, e^{ν} 和它的导数应该是连续的, $m(r_0)$ 应等于 Schwarzschild 外解中的质量 M

$$m(r_0) \equiv M. \tag{2.1.7}$$

由 (2.1.3) 可知, 在 $r=0$ 处 $m(r)/r^3$ 是有限的.

下面我们要寻求对于给定 r_0 的最大可能质量 M, 即寻求恒星的**临界质量**. 令

$$f(r) \equiv \mathrm{e}^{\nu/2}, \tag{2.1.8}$$

上述压强有限的条件可表示为

$$f'/rf \text{ 在 } r=0 \text{处有限}. \tag{2.1.9}$$

由 (2.1.4) 和 (2.1.5) 可以得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\frac{1}{r}\sqrt{1-\frac{2m}{r}}f'\right] = \frac{f}{\sqrt{1-2m/r}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{m}{r^3}\right). \tag{2.1.10}$$

由 (2.1.6) 可知, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{m}{r^3}\right) \leqslant 0$, 故有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\frac{1}{r}\sqrt{1-\frac{2m}{r}}f'\right] \leqslant 0. \tag{2.1.11}$$

在 $r=r_0$, 就有 $p(r_0)=0$, 且内、外解应光滑连接, 因此有

$$f^2(r_0) = 1-\frac{2M}{r_0}, \quad \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\right|_{r=0} = \frac{M}{r_0^2}\frac{1}{\sqrt{1-2M/r_0}}. \tag{2.1.12}$$

用上式对 (2.1.11) 从 r 到 r_0 积分, 得到

$$f'(r) \geqslant \frac{Mr}{r_0^3}\left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1/2}. \tag{2.1.13}$$

应用条件 (2.1.12) 和 (2.1.13), 在 0~ r_0 积分, 得到

$$f(0) \leqslant \left(1-\frac{2M}{r_0}\right)^{1/2} - \frac{M}{r_0^3}\int_0^{r_0} \frac{r\mathrm{d}r}{(1-2m/r)^{1/2}}. \tag{2.1.14}$$

把 $\rho(r)$ 写成

$$\rho(r) = \rho_0 + \mu.$$

式中 $\rho_0 = 6M/kr_0^3$, μ 满足式

$$\int_0^{r_0} \mu(r) r^2 \mathrm{d}r = 0, \quad \mu' \leqslant 0, \quad \mu(0) \geqslant 0. \tag{2.1.15}$$

则有

$$m(r) = M\frac{r^3}{r_0^3} + \int_0^r \mu(r) r^2 \mathrm{d}r. \tag{2.1.16}$$

式中的积分总是正的. 用 $m(r)$ 代替 Mr^3/r_0^3 将使 (2.1.14) 右端的值增大. 由此可以得到

$$f(0) \leqslant \frac{3}{2}\left(1-\frac{2M}{r_0}\right)^{1/2} - \frac{1}{2}. \tag{2.1.17}$$

注意 $f(0) > 0$, 则由上式得到

$$\frac{2M}{r_0} < \frac{8}{9}. \tag{2.1.18}$$

这就是恒星保持稳定平衡的条件. 应注意上式中 M 和 r_0 的定义. M 是质量密度 ρ 在坐标体积中的积分, 对应于牛顿引力理论中的引力质量. 半径 r_0 的定义要使表面积为 $4\pi r_0^2$. (2.1.18) 表明, 表面积一定的恒星, 只要其质量小于临界质量, 就是稳定的. 质量大于临界质量的恒星不会稳定, 会因引力的作用而坍缩.

当 ρ =const 时, 由 (2.1.3),(2.1.7) 和 (2.1.18) 得到临界质量的表示式

$$M_C = \frac{8}{9}\sqrt{\frac{2}{3kC^2\rho}}. \tag{2.1.19}$$

式中 $C^2 = 1.86 \times 10^{-27}$cm·g^{-1}. 代入几个典型密度, 得到下列临界质量:

$\rho/(\mathrm{g}\cdot\mathrm{cm}^{-3})$	1	10^6	10^{15}
$M_C/M_\odot$	1.14×10^8	1.14×10^5	3.96

这些数值虽不很精确, 但已清楚地表明, 中子星只能具有几倍太阳的质量, 质量再大的中子星将没有稳定的终态.

由 (2.1.18) 及光谱线引力红移的公式可以得到, 稳定的恒星表面发出的光最大的红移值是 $Z = 2$.

2.2 球对称恒星的引力坍缩

2.1 节的讨论已经表明, 在恒星演化的晚期, 如果恒星质量大于中子星的临界质量, 将无限坍缩. 这实际上只是一个直观的假设. 在本节中, 我们利用一个简单的态方程, 进行严格的计算, 来证明上述假设的正确性.

假设恒星物质是零压流体. 由于压强等于零, 只要恒星开始收缩, 就必然要坍缩至一点. 由这一模型所得到的度规在整个空时区域内满足爱因斯坦场方程.

取随动坐标系 (t,r,θ,φ), 解爱因斯坦场方程, 将得到 Tolman 度规

$$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}t^2-\frac{[R'(r,t)]^2}{1+f(r)}\mathrm{d}r^2-R^2(r,t)\mathrm{d}\Omega^2. \tag{2.2.1}$$

式中 $f(r)$ 是满足条件 $f(r)>-1$ 的任意函数. 令 $R(r,t)=R(t)\cdot r,\ f(r)=-kr^2$, 得到一个最简单的恒星内部解:

$$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}t^2-R^2(t)\left(\frac{\mathrm{d}r^2}{1-kr^2}+r^2\mathrm{d}\Omega^2\right). \tag{2.2.2}$$

这正是 Robertson-Walker 度规. 由于它描述均匀、各向同性空–时, 所以在宇宙学中有重要意义.

在随动坐标系中有 $u^i=0,\ u^0=1$, 守恒方程 $T^{\nu}_{\mu;\nu}=0$ 的空间分量自然满足, 时间分量为

$$T^{\nu}_{0;\nu}=-\frac{\partial\rho}{\partial \mathrm{t}}-\rho\left(\frac{\dot a}{2a}+\frac{\dot b}{b}\right)=0. \tag{2.2.3}$$

式中

$$a\equiv-\frac{R^2(t)}{1-kr^2},\quad b\equiv-R^2(t)r^2.$$

又由场方程 $R_{11}-\dfrac{1}{2}g_{11}R=4\pi T_{11}$ 得

$$2k-\ddot R(t)R(t)-2\dot R^2(t)=4\pi\rho. \tag{2.2.4}$$

由 (2.2.3) 和 (2.2.4) 得到 $\rho(t)R^3(t)=$const, 调整径向坐标, 使

$$R(0)=1. \tag{2.2.5}$$

此时有 $\rho(t)R^3(t)=\rho(0)$, 即

$$\rho(t)=\rho(0)R^{-3}(t). \tag{2.2.6}$$

将 (2.2.5)~(2.2.6) 和 (2.2.2) 代入场方程, 可将场方程化为

$$4\pi\rho(0)R^{-1}(t)=2k+R(t)\ddot R(t)+2\dot R^2(t), \tag{2.2.7}$$

$$\frac{4\pi}{3}\rho(0)R^{-1}(t) = -R(t)\ddot{R}(t). \tag{2.2.8}$$

消去 $\ddot{R}(t)$, 得到

$$\dot{R}^2(t) = -k + \frac{8\pi}{3}\rho(0)R^{-1}(t). \tag{2.2.9}$$

假设 $t=0$ 时流体是静止的, 则有

$$\dot{R}(t) = 0. \tag{2.2.10}$$

代入 (2.2.9) 得

$$k = \frac{8\pi}{3}\rho(0). \tag{2.2.11}$$

方程 (2.2.9) 化为

$$\dot{R}^2(t) = k[R^{-1}(t) - 1], \tag{2.2.12}$$

此方程的解具有形式

$$\begin{cases} t = \dfrac{1}{2\sqrt{k}}(\psi + \sin\psi), & (2.2.13) \\ R = \dfrac{1}{2}(1+\cos\psi). & (2.2.14) \end{cases}$$

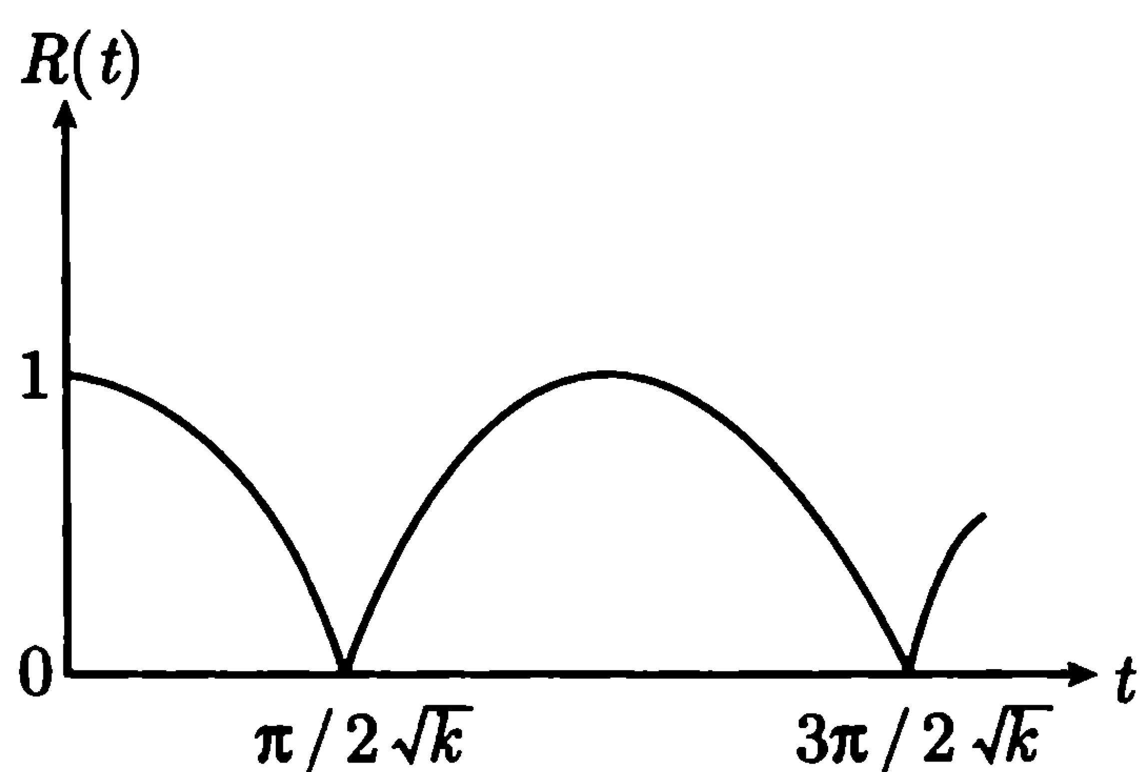


图 5-8

这是摆线 (图 5-8) 的参数方程, 当 $\psi = \pi$, 即当 $t = \pi/2\sqrt{k}$ 时, $R(t) = 0$. 这表明一个零压流体球将在有限长的时间 $\pi/2\sqrt{k}$ 内从静止坍缩到中心奇点.

虽然在随动坐标系中观测, 这一坍缩过程只需要有限长时间, 但是对于远处观察者, 由 1.1 节可知, 星体表面要达到 Schwarzschild 面需经过无限长时间; 要坍缩到 $r=0$, 外面的观察者是看不到的.

由随动坐标系变至 Schwarzschild 坐标系, 可以求得远处观察者测得的自星球表面发出的光的红移 (Weinberg,1972)

$$Z \equiv \frac{\Delta\nu}{\nu} = \left(1 - \frac{ka^2}{R(t)}\right)^{-1}\left[\sqrt{1-ka^2} + a\sqrt{k[1-R(t)]R^{-1}(t)}\right] - 1. \tag{2.2.15}$$

对上式的详细分析表明, 由开始坍缩时记时 (对于远处观察者), 红移 Z 由零开始缓慢增大, 然后 Z 的增大速度突然加快 (接近指数规律), 红移趋于无限大. 这就是说, 在远处观察者看来, 坍缩着的恒星实际上是突然消失的.

第 3 章　Kerr 黑洞

Schwarzschild 解是球对称无转动场源的引力场, 这是十分特殊的情况. 一般的引力坍缩不可能是球对称的, 因为各种天体都具有角动量. 本章讨论具有轴对称性的旋转天体的引力性质.

3.1　Kerr 度规

轴对称旋转天体的引力场由 Papapetrou 度规描述

$$\mathrm{d}s^2 = f(\mathrm{d}t - \omega \mathrm{d}\varphi)^2 - f^{-1}[\mathrm{e}^{2r}(\mathrm{d}\rho^2 + \mathrm{d}z^2) + \rho^2 \mathrm{d}\varphi^2]. \tag{3.1.1}$$

变换到椭球坐标

$$\rho = k(x^2-1)^{1/2}(1-y^2)^{1/2}, \quad z = kxy. \tag{3.1.2}$$

令 $k \equiv \dfrac{Mp}{\delta}$, 将场方程的解写为

$$\begin{aligned} &f = A_\delta / B_\delta, \quad \mathrm{e}^{2r} = A_\delta / p^{2\delta}(x^2-y^2)^{\delta^2}, \\ &\omega = -2MqC_\delta(1-y^2)/A_\delta. \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

式中 p 和 q 满足条件 $p^2+q^2=1$；不旋转时 $q=0, p=1. \delta=1$ 对应于 Kerr 解

$$\begin{aligned} &A_1 = p^2x + q^2y - 1, \quad B_1 = (px+1)^2 + q^2y, \\ &C_1 = -(px+1). \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

$\delta = 2$ 时的解为

$$\begin{aligned} A_2 =& [p^2(x^2-1)^2 + q^2(1-y^2)]^2 - 4p^2q^2(x^2-1)(1-y^2)(x^2-y^2), \\ B_2 =& (p^2x^4 + q^2x^4 - 1 + 2px^3 - 2px)^2 + 4q^2y^2(px^3 - pxy^2 - y^2 + 1)^2, \\ C_2 =& p^2(x^2-1)[-4x^2(x^2-y^2) + (x^2-1)(1-y^2)] \\ &+ p^3x(x^2-1) \times [-2(x^4-1) - (3+x^2)(1-y^2)] \\ &+ q^2(3x+1)(1-y^2)^3. \end{aligned} \tag{3.1.5}$$

在上述诸式中, 如果 $q=0$, 则 f 和 e^{2r} 的表达式成为第一篇中的 (3.3.30) 和 (3.3.31), $\omega = 0$, 设物体的角动量为 J, 则有

$$J = M^2q = Ma. \tag{3.1.6}$$

将 $\delta=1$ 的解作变换

$$px=\frac{r}{M}-1,\quad y=\cos\ \theta, \tag{3.1.7}$$

得到通常形式的 Kerr 度规

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2=&\left(1-\frac{2Mr}{r^2+a^2\ \cos^2\theta}\right)\mathrm{d}t^2-\frac{r^2+a^2\ \cos^2\theta}{r^2+a^2-2Mr}\mathrm{d}r^2\\&-(r^2+a^2\ \cos^2\theta)\mathrm{d}\theta^2-\left[(r^2+a^2)\sin^2\theta\right.\\&\left.+\frac{2Mra^2\sin^4\theta}{r^2+a^2\cos^2\theta}\right]\mathrm{d}\varphi^2+\frac{4Mra\ \sin^2\theta}{r^2+a^2\ \cos^2\theta}\mathrm{d}t\mathrm{d}\varphi.\end{aligned} \tag{3.1.8}$$

3.2 特 征 曲 面

无限红移面是 $g_{00}=0$ 的面. Schwarzschild 场的无限红移面为 $r=r_s\equiv 2m$, 克尔场中的无限红移面为

$$r_{\pm}^{\infty}=M\pm\sqrt{M^2-a^2\ \cos^2\theta}. \tag{3.2.1}$$

由空–时图可知, 一个超曲面 $f(x^\mu)=0$ 为单向膜的条件是其法向矢量 $n_\mu=f_{,\mu}$ 为非类空矢量, n_μ 为零矢量, 对应于单向膜开始出现的超曲面, 称为**视界**. 因此, 视界 $f(x^\mu)=0$ 满足条件

$$n_\mu n^\mu=g^{\mu\nu}\frac{\partial f}{\partial x^\mu}\frac{\partial f}{\partial x^\nu}=0. \tag{3.2.2}$$

将 Schwarzschild 度规代入上式, 注意到球对称性 $[f(x^\mu)=f(r)]$, 得到

$$g^{\mu\nu}f_{,\mu}f_{,\nu}=-\left(1-\frac{2M}{r}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2=0.$$

此方程的解为 $r=2M\equiv r_s$. 显然, Schwarzschild 场的视界和无限红移面重合.

将克尔度规 (3.1.8) 代入 (3.2.2), 注意到辐射对称性 $[f(x^\mu)=f(r,\theta)]$, 得到

$$\begin{aligned}g^{\mu\nu}f_{,\mu}f_{,\nu}&=g^{11}f_{,1}^2+g^{22}f_{,2}^2\\&=\frac{2Mr-r^2-a^2}{r^2+a^2\ \cos^2\theta}f_{,1}^2-\frac{1}{r^2+a^2\ \cos^2\theta}f_{,2}^2=0.\end{aligned}$$

由于 $r^2+a^2\ \cos^2\theta\neq 0$, 得到

$$(r^2+a^2-2Mr)f_{,1}^2+f_{,2}^2=0. \tag{3.2.3}$$

分离变量, 得到此方程的解

$$r_{\pm}^{h}=M\pm\sqrt{M^2-a^2}. \tag{3.2.4}$$

比较 (3.2.4) 和 (3.2.1), 知克尔场的无限红移面和视界不重合.

类似地, 将 Kerr-Newman 度规代入 (3.2.2), 得到视界面

$$r_{\pm}^{h}=M\pm\sqrt{M^2-a^2-kQ^2}. \tag{3.2.5}$$

对于 Kerr-Newman-Kasyua 场, 只要将上式中的 Q^2 换为 (e^2+q^2).

在克尔空–时中, 直角坐标 (x,y,z) 与坐标 (r,θ,φ) 的关系为 (Kerr, 1963)

$$\begin{aligned}x&=(r\ \cos\ \varphi-a\ \sin\ \varphi)\sin\ \theta,\\ y&=(r\ \sin\ \varphi+a\ \cos\ \varphi)\sin\ \theta,\\ z&=r\ \cos\ \theta.\end{aligned} \tag{3.2.6}$$

在直角坐标系中, 克尔度规具有形式

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2=&\mathrm{d}t^2-\mathrm{d}x^2-\mathrm{d}y^2-\mathrm{d}z^2\\ &-\frac{2Mr}{r^4+a^2z^2}\left[\frac{r(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)-a(x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x)}{r^2+a^2}+\frac{z\mathrm{d}z}{r}+\mathrm{d}t\right]^2.\end{aligned} \tag{3.2.7}$$

这一表达式消除了视界处的坐标奇异性. $r=0$ 处仍为奇点. 由 (3.2.6) 可知, 中心奇点对应于

$$z=0,\quad x^2+y^2=a^2\ \sin^2\theta,\quad 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}. \tag{3.2.8}$$

这是二维空间 (x,y) 中的一个圆盘. 又由度规 (3.1.8) 可知

$$r^2+a^2\ \cos^2\theta=0 \tag{3.2.9}$$

为奇异面. 上式仅当 $r=0$ 且 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 时方能成立 $(a\neq 0)$. 由于此时标曲率 $R=\infty$, 可知这一奇异性是内禀的. 在直角坐标系 (3.2.5) 中, 这一奇异性对应于

$$z=0,\quad x^2+y^2=a^2. \tag{3.2.10}$$

这是二维空间 (x,y) 中的一个圆环. 比较 (3.2.10) 和 (3.2.8) 可以发现, 只有圆环 (3.2.10) 才是内禀奇异的.圆盘 (3.2.8) 比圆环 (3.2.10) 多出来的一个开域只是坐标奇异的, 因为在这个开域上 $\left(r=0,\ \theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 度规 (3.1.8) 是解析的.

由 (3.2.4)、(3.2.6) 和 (3.2.10) 可以看出, 在二维空间 (x,y) 内, 内禀奇异环 (3.2.10) 在视界 $r_{\pm}^{h}$ 的里面. 即**克尔场的视界面包围了真奇点**(内禀奇点), 如图 5-9 所示. 图中虚线表示视界, 实线表示无限红移面, $*$ 表示真奇点.

详细分析表明, $\delta=1,2,3,\cdots$ 对应的轴对称解中, 只有 $\delta=1$ 的解 (Kerr 解) 没有裸奇点.

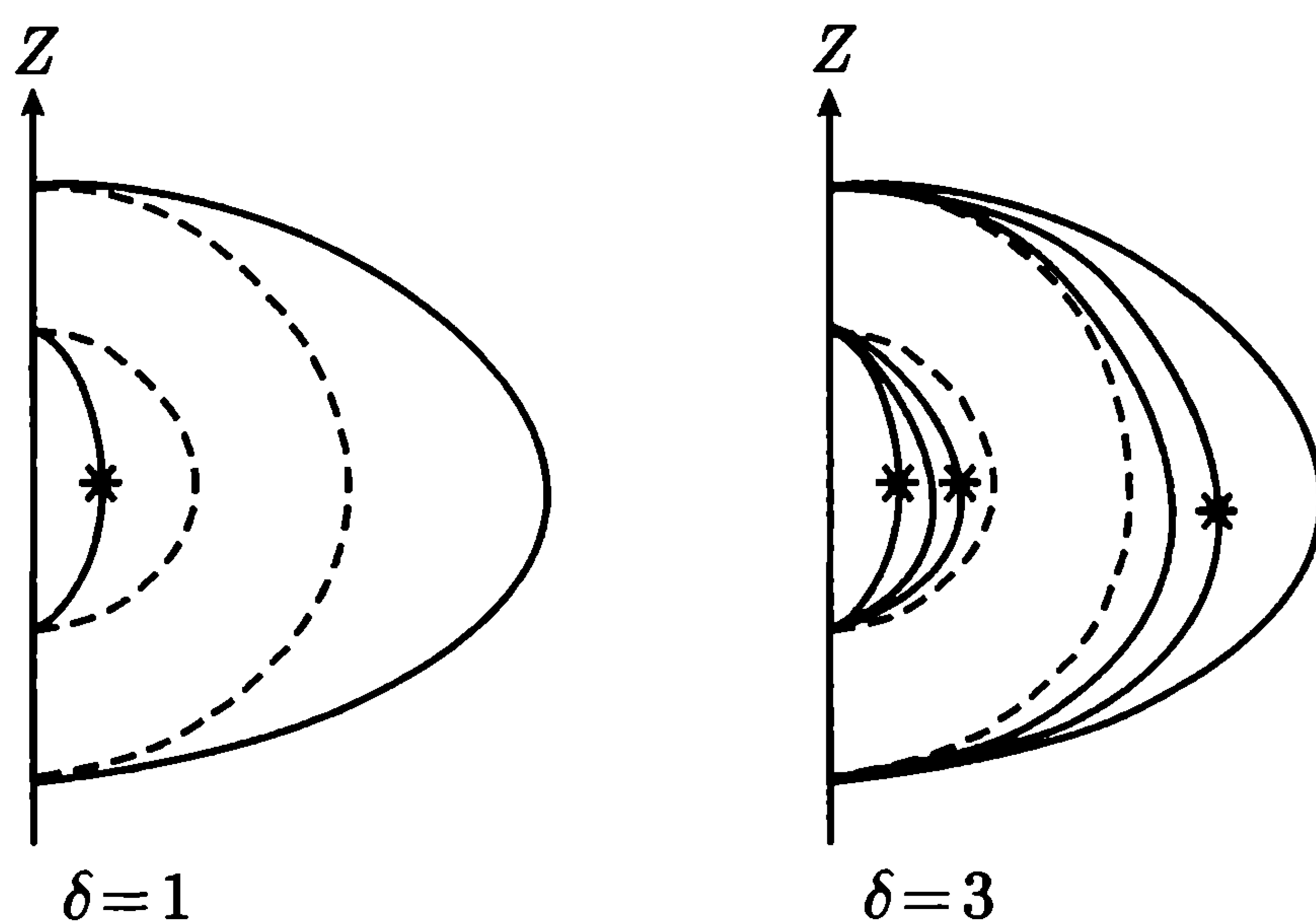


图 5-9

克尔时空的无限红移面 $r^s_\pm$ 和视界 $r^h_\pm$ 满足

$$r^s_+ \geqslant r^h_+ > r^h_- \geqslant r^s_-,$$

如图 5-10 所示. 视界 r^h_+ 和无限红移面包围的区域叫**能层**. 面 r^h_+ 和 r^s_+ 在自转轴处相切. 对于 Schwarzschild 黑洞, $r^h_+ = r^s_+$, 能层不存在.

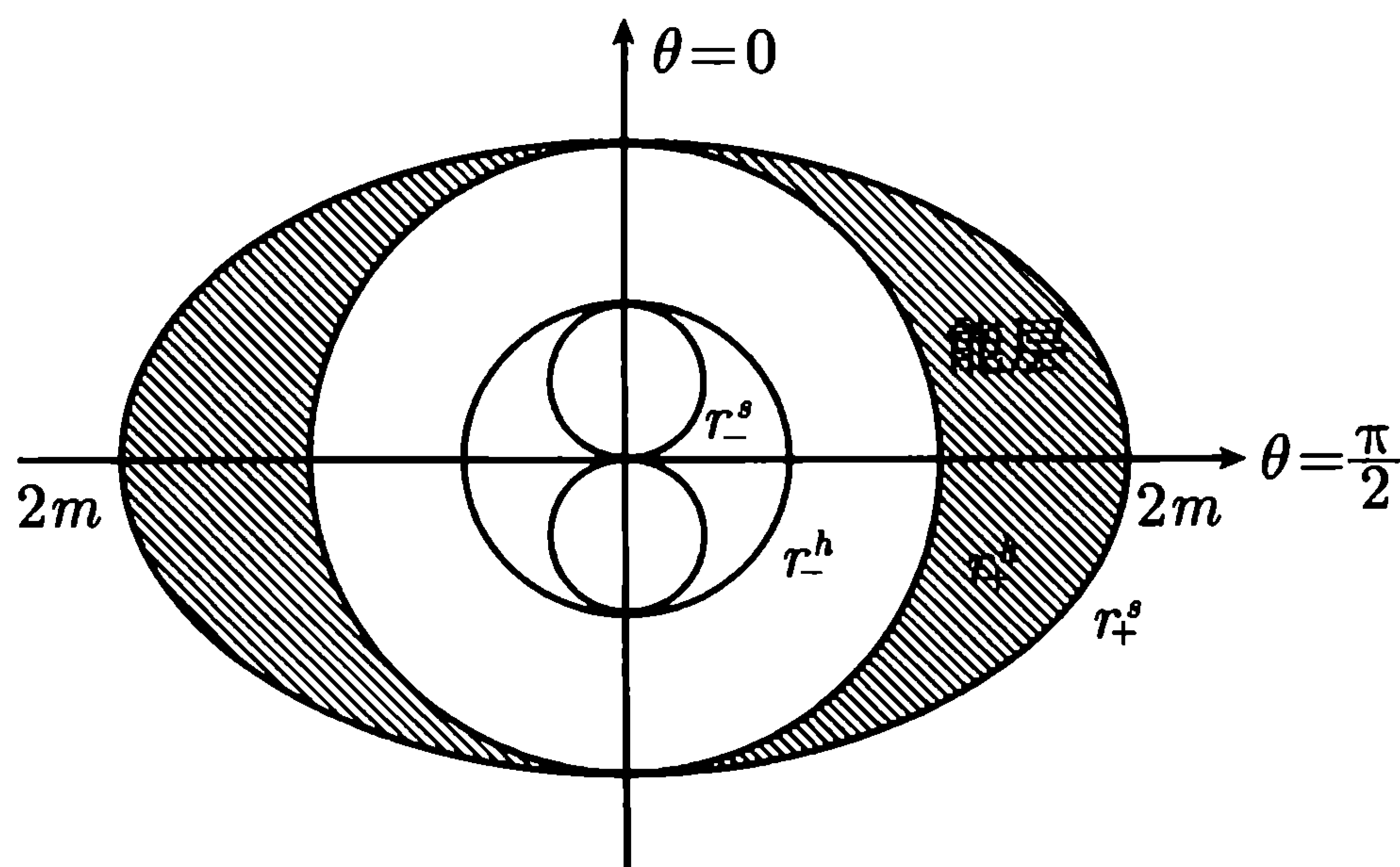


图 5-10

当粒子静止于能层外面时, 有

$$g_{00} = \left(1 - \frac{2mr}{r^2 + a^2\ \cos^2\theta}\right) > 0,$$

$$\mathrm{d}s^2 = g_{00}c^2\mathrm{d}t^2 > 0,$$

世界线为类时曲线, 这当然是合理的. 但是当粒子位于能层内部 (静止) 时

$$g_{00} = \left(1 - \frac{2mr}{r^2 + a^2\ \cos^2\theta}\right) < 0,$$

$$\mathrm{d}s^2 = g_{00}c^2\mathrm{d}t^2 < 0.$$

世界线是类空曲线, 这表明粒子不可能静止于能层内部.

在能层内部, 线元可写为

$$\mathrm{d}s^2 = g_{00}c^2\mathrm{d}t^2 + g_{11}\mathrm{d}r^2 + g_{22}\mathrm{d}\theta^2 + g_{33}\mathrm{d}\varphi^2 + 2g_{03}c\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}t,$$

其中

$$g_{00} = \left(1 - \frac{2mr}{r^2 + a^2\ \cos^2\theta}\right) < 0,$$

$$g_{11} < 0, \quad g_{22} < 0, \quad g_{33} < 0, \quad g_{03} > 0.$$

因此, 不能再把 t 看作时间坐标, 把 r, θ, ϕ 看作空间坐标. 但是可以把线元改写为

$$\mathrm{d}s^2 = \left(g_{00} - \frac{g_{02}}{g_{33}}\right) c^2\mathrm{d}t^2 + g_{11}\mathrm{d}r^2 + g_{22}\mathrm{d}\theta^2 + g_{33}\left(\mathrm{d}\phi + \frac{g_{03}}{g_{33}}c\mathrm{d}t\right)^2.$$

由于 $r > r_+^h$ 时有

$$\left(g_{00} - \frac{g_{03}^2}{g_{33}}\right) = \frac{r^2 - 2mr + a^2}{r^2 + a^2 + \dfrac{2mra^2\ \sin^2\theta}{r^2 + a^2\ \cos^2\theta}} > 0,$$

所以只要令

$$\left(\mathrm{d}\phi + \frac{g_{03}}{g_{33}}c\mathrm{d}t\right) = 0,$$

便可以保证 r=const 和 θ =const 时, $\mathrm{d}s^2 > 0$. 这表明, t 仍可作为时间轴, 其余三个轴可看作空间轴. 这正是能层外部观测者所看到的. 但是这时坐标轴随转动球一起作同方向转动. 我们有

$$\dot{\phi} = -\frac{cg_{03}}{g_{33}} = \frac{r_g ar}{(r^2 + a^2\ \cos^2\theta)(r^2 + a^2) + r_g ra^2\ \sin^2\theta},$$

在靠近视界的地方有

$$\dot{\phi} \to a/r_g r_+^h,$$

一般地, 有

$$\dot{\phi}(r = r_+^h) > \dot{\phi}(r > r_+^h),$$

$$r_g = 2m.$$

这就是说, 能层内部的坐标系必须被转动球体拖曳, 以角速度

$$\dot{\phi} = -\frac{cg_{03}}{g_{33}}$$

绕对称轴与球体作同方向转动. 无限红移面是一个静止的界面, 亦称**静界**.

3.3 黑洞的无毛定理

Carter-Robinson 定理断言, 渐近平直稳态轴对称中性黑洞的外部引力场有唯一解, 即克尔解. 这就是说, 所有渐近平直的稳态黑洞, 都只由三个参量唯一确定,

这三个参量就是黑洞的质量 M, 角动量 J(或比角动量 a) 以及电荷 (有电荷时相应的解为克尔–纽曼解).

下面我们导出克尔黑洞的两个基本关系式, 积分关系式

$$M = 2\Omega J + \frac{\kappa}{4\pi}A, \tag{3.3.1}$$

和微分关系式

$$\delta M = \Omega\delta J + \frac{\kappa}{8\pi}\delta A. \tag{3.3.2}$$

稳态轴对称空间存在两个 Killing 矢量, 类时 Killing 矢量 $\xi_{(t)}$ 和类空 Killing 矢量 ξ_{φ}, 它们满足恒等式

$$\xi_{(t)\mu;\nu} = \xi_{(t)[\mu;\nu]}, \quad \xi_{(\varphi)\mu;\nu} = \xi_{(\varphi)[\mu;\nu]}, \tag{3.3.3}$$

$$\xi_{(t)\mu;\nu}\xi^{\nu}_{(\varphi)} = \xi_{(\varphi)\mu;\nu}\xi^{\nu}_{(t)}, \tag{3.3.4}$$

$$\xi^{\mu;\nu}_{(t);\nu} = -R^{\mu}_{\nu}\xi^{\nu}_{(t)}, \tag{3.3.5}$$

$$\xi^{\mu;\nu}_{(\varphi);\nu} = -R^{\mu}_{\nu}\xi^{\nu}_{(\varphi)}. \tag{3.3.6}$$

由关于 $\xi^{\mu}_{(t)}, \xi^{\mu}_{(\varphi)}$ 的 Killing 方程

$$\xi_{(t)\mu;\nu} + \xi_{(t)\nu;\mu} = 0,$$

得

$$-\xi_{(t)\nu;\mu} = \xi_{(t)\mu;\nu}.$$

故

$$\xi_{(t)[u;\nu]} \equiv \frac{1}{2}(\xi_{(t)u;\nu} - \xi_{(t)\nu;u}) - \xi_{(t)u;\nu}.$$

类似地可证

$$\xi_{(\varphi)\mu;\nu} = \xi_{(\varphi)[\mu;\nu]}.$$

(3.3.4) 式的证明如下. 设时间位移生成元和 φ 位移生成元分别为

$$I_t = \frac{\partial}{\partial t} = \xi^{u}_{(t)}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}},$$

$$I_{\varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi} = \xi^{\mu}_{(\varphi)}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}.$$

由于 $I_t \cdot I_{\varphi} = I_{\varphi} \cdot I_t$, 故

$$\xi^{\mu}_{(t)}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left(\xi^{\nu}_{(\varphi)}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\right) = \xi^{\nu}_{(\varphi)}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\left(\xi^{\mu}_{(t)}\right)\frac{\partial}{\partial x^{\mu}},$$

即

$$\xi^{\mu}_{(t)}\xi^{\nu}_{(\varphi),\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}} = \xi^{\nu}_{(\varphi)}\xi^{\mu}_{(t),\nu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}},$$

或

$$\xi^{\mu}_{(t)}(\xi^{\nu}_{(\varphi);\mu}-\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}\xi^{\lambda}_{(\varphi)})\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}=\xi^{\mu}_{(\varphi)}(\xi^{\mu}_{(t);\nu}-\Gamma^{\mu}_{\lambda\nu}\xi^{\lambda}_{(t)})\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}$$
$$=\xi^{\mu}_{(\varphi)}(\xi^{\nu}_{(t);\mu}-\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}\xi^{\lambda}_{(t)})\frac{\partial}{\partial x^{\nu}},$$

即

$$(\xi^{\mu}_{(t)}\xi^{\nu}_{(\varphi);\mu}-\xi^{\mu}_{(\varphi)}\xi^{\nu}_{(t);\mu})\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}=0.$$

由于这是一个恒等式, 故 (3.3.4) 式得证.

现在四维时空中选一个不含奇异性的类空超曲面 (例 $t=$ 常数), 对 (3.3.5) 式两边进行面积分得

$$\int_S \xi^{\mu;\nu}_{(t);\nu}\mathrm{d}\Sigma_{\mu}=\int_S R^{\mu}_{\nu}\xi^{\nu}_{(t)}\mathrm{d}\Sigma_{\mu}.$$

按高斯定理

$$\int_S \xi^{\mu;\nu}_{(t);\nu}\mathrm{d}\Sigma_{\mu}=\int_{\partial S}\xi^{\mu;\nu}_{(t)}\mathrm{d}\Sigma_{\mu\nu},$$

式中 ∂S 是类空超曲面 S 的边界, 取 ∂S 为

$$\partial S=\partial S_B+\partial S_{\infty},$$

其中 ∂S_B 为包围黑洞的界面, ∂S_{∞} 为无限远界面. 在无限远处度规渐近球对称, $\xi^{\mu}_{(t)}=(\xi^0_t,0,0,0)$, 我们有

$$\begin{aligned}\int_{\partial S_{\infty}}\xi^{\mu;\nu}_{(t)}\mathrm{d}\Sigma_{\mu\nu}&=\int\xi^{0;r}_{(t)}\mathrm{d}\Sigma_{0r}=\int g^{rr}\xi^{0}_{(t);r}\mathrm{d}\Sigma_{0r}\\&=\int g^{rr}\left(\frac{\partial\xi^0_{(t)}}{\partial r}+\Gamma^0_{0r}\xi^0_{(t)}\right)\mathrm{d}\Sigma\\&=\int g^{rr}\Gamma^0_{0r}\xi^0_{(t)}\mathrm{d}\Sigma_{0r}=\int\frac{1}{2}g^{rr}g^{00}g_{00,r}\mathrm{d}\Sigma_{0r}\\&=\int\frac{1}{2}g^{rr}g^{00}g_{00,r}\sqrt{g_{00}g_{rr}}r^2\ \sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\\&=-\int\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{2M}{r^2}\right)r^2\ \sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi=-4\pi M.\end{aligned}$$

故

$$M=\frac{1}{4\pi}\int_S R^{\mu}_{\nu}\xi^{\nu}_{(t)}\mathrm{d}\Sigma_{\mu}+\frac{1}{4\pi}\int_{\partial S_B}\xi^{\mu;\nu}_{(t)}\mathrm{d}\Sigma_{\mu\nu}.\tag{3.3.7}$$

可见等式右边第一个积分即黑洞外部空间总质量, 右边第二个积分即黑洞总质量. 若选取上述类空超曲面处与 $\xi^{\mu}_{(\varphi)}$ 相切, 并对 (3.3.6) 式两边进行面积分得

$$\int_S \xi^{\mu;\nu}_{(\varphi)\nu}\mathrm{d}\Sigma_{\mu}=-\int_S R^{\mu}_{\nu}\xi^{\nu}_{(\varphi)}\mathrm{d}\Sigma_{\mu},$$

上式左边可化为

$$\int_{\partial S}\xi_{(\varphi)}^{\mu;\nu}\mathrm{d}\Sigma_{\mu\nu}.$$

右边利用

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}=-8\pi T_{\mu\nu},$$

可化为

$$-4\pi\int_S(2T_\nu^\mu-T\delta_\nu^\mu)\xi_{(\varphi)}^\nu\mathrm{d}\Sigma_\mu=-8\pi\int_S T_\nu^\mu\xi_{(\varphi)}^\nu\mathrm{d}\Sigma_\mu\quad(\text{因 }\xi_{(\varphi)}^\mu\mathrm{d}\Sigma_\mu=0).$$

令 $\mathrm{d}\Sigma\mu=(\mathrm{d}\Sigma_0,0,0,0)$, 则

$$-\int_S T_\nu^\mu\xi_{(\varphi)}^\nu\mathrm{d}\Sigma_\mu=-\int_S T_\varphi^0\mathrm{d}\Sigma_0=J.$$

这显然就是超曲面 S 内的总角动量 J. 若黑洞外无物质分布, J 即黑洞总角动量, M 即黑洞质量.

$$J=-\frac{1}{8\pi}\int_{\partial S_B}\xi_{(\varphi)}^{\mu;\nu}\mathrm{d}\Sigma_{\mu\nu},\tag{3.3.8}$$

$$M=\frac{1}{4\pi}\int_{\partial S_B}\xi_{(t)}^{\mu;\nu}\mathrm{d}\Sigma_{\mu\nu}.\tag{3.3.9}$$

由于视界的性质, 过视界上任一点有且仅有一光锥和视界面相切, 即有且仅有一根视界面上的零短程线 (称为视界的母线).

沿上述母线上任一点引入以时间 t 为参量的零短程线切矢量

$$l^\mu=\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t},$$

则

$$l^\mu=\frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}t}=\delta_t^\mu+\delta_\varphi^\mu\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=\xi_{(t)}^\mu+\Omega\xi_{(\varphi)}^\mu.\tag{3.3.10}$$

由于 $\xi_{(t)}^\mu$, $\xi_{(\varphi)}^\mu$ 都是 Killing 矢量, 故 l^μ 也是 Killing 矢量, 满足 Killing 方程

$$l_{\mu;\nu}+l_{\nu;\mu}=0.$$

由 (3.3.8)、(3.3.9) 式得

$$\begin{aligned}M&=\frac{1}{4\pi}\int_{\partial S_B}(l^{\mu;\nu}-\Omega\xi_{(\varphi)}^{\mu;\nu})\mathrm{d}\Sigma_{\mu\nu}\\&=\frac{1}{4\pi}\int_{\partial S_B}l^{\mu;\nu}\mathrm{d}\Sigma_{\mu\nu}-\Omega\int\frac{1}{4\pi}\xi_{(\varphi)}^{\mu;\nu}\mathrm{d}\Sigma_{\mu\nu}\\&=\frac{1}{4\pi}\int_{\partial S_B}l^{\mu;\nu}\mathrm{d}\Sigma_{\mu\nu}+2\Omega J.\end{aligned}\tag{3.3.11}$$

现在在视界上任一点引入局部零标架 l^μ, n^μ, m^μ, $\bar{m}^\mu$. 其中 l^μ 即沿母线该点的切矢, n^μ 是与 ∂S_B 垂直的法矢, m^μ, $\bar{m}^\mu$ 是在视界内的另两个切矢量. 视界面上的面元可写为

$$\mathrm{d}\Sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(l_\mu n_\nu - l_\nu n_\mu)\mathrm{d}A = l_{[\mu}n_{\nu]}\mathrm{d}A.$$

由此得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4\pi}\int_{\partial S_B} l^{\mu;\nu}\frac{1}{2}(l_\mu n_\nu - l_\nu n_\mu)\mathrm{d}A \\
=&\frac{1}{4\pi}\int_{\partial B_S}\frac{1}{2}l_\mu n_\nu(l^{\mu;\nu} - l^{\nu;\mu})\mathrm{d}A \\
=&\frac{1}{4\pi}\int_{\partial B_S} l_\mu n_\nu l^{\mu;\nu}\mathrm{d}A = -\frac{1}{4\pi}\int_{\partial B_S} l_{\nu;\mu}l^\mu n^\nu \mathrm{d}A \\
=&-\frac{1}{4\pi}\int_{\partial S_B} l_{\mu;\nu}n^\mu l^\nu \mathrm{d}A = \frac{1}{4\pi}\int_{\partial S_B}\kappa\mathrm{d}A.
\end{aligned} \tag{3.3.12}$$

式中

$$\kappa \equiv -l_{\mu;\nu}l^\nu \cdot n^\mu = -\frac{Dl^\mu}{\mathrm{d}t}\cdot n_\mu,$$

代表与视界一起转动的粒子的坐标加速度的内法向分量, 也就是视界面上的引力加速度, 它满足

$$\kappa_{,\mu}l^\mu = \kappa_{,\mu}m^\mu = \kappa_{,\mu}\overline{m}^\mu = 0.$$

因此, κ 在视界面上为一常数. 由 (3.3.11) 和 (3.3.12) 便得到 (3.3.1).

下面计算 Ω, A 和 κ, 能层内各点的拖曳角速度 Ω 具有形式

$$\Omega = -\frac{cg_{03}}{g_{33}},$$

代入 $r = r_+^h$, 便得到视界的角速度

$$\Omega = \frac{a}{r_g r_+^h} = \frac{J}{2M[M^2 + (M^4 - J^2)^{1/2}]} = \frac{J}{4M\cdot M_{ir}^2}. \tag{3.3.13}$$

式中

$$M_{ir} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}[M^2 + (M^4 - J^2)^{1/2}]^{1/2}$$

叫黑洞的**不可约质量**. 在 Schwarzschild 黑洞的情况下它等于黑洞的质量 M.

由上式可以看出, 视界上所有的点具有同一个拖曳角速度, 即黑洞做刚性转动, 只有一个角速度 Ω.

令 t=const, $r = r_+^h$, 克尔度规变为

$$\mathrm{d}l^2 = -(r_+^{h^2} + a^2\ \cos^2\theta)\mathrm{d}\theta^2 - \left[(r_+^{h^2} + a^2)\sin^2\theta + \frac{2mr_+^h a^2\ \sin^4\theta}{r_+^{h^2} + a^2\cos^2\theta}\right]\mathrm{d}\varphi^2,$$

$$g^{1/2} = \begin{vmatrix} g_{\theta\theta} & g_{\theta\varphi} \\ g_{\varphi\theta} & g_{\varphi\varphi} \end{vmatrix}^{1/2} = (r_+^{h^2} + a^2)\sin\theta.$$

故

$$\mathrm{d}A = \sqrt{g}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi,$$

即

$$A = \int \mathrm{d}A = 4\pi(r_+^{h^2} + a^2)$$
$$= 8\pi[M^2 \pm (M^4 - J^2)^{1/2}] = 16\pi M_{ir}^2. \tag{3.3.14}$$

对于克尔–纽曼黑洞有

$$A = \frac{4\pi G}{c^4}[2GM^2 - Q^2 + 2(G^2M^4 - J^2c^2 - GM^2Q^2)^{1/2}].$$

由式 (3.3.13) 和 (3.3.14) 可以得到

$$M = 4\pi\frac{J}{A\Omega} = 2\Omega J - 2\Omega J + 4\pi\frac{J}{A\Omega}.$$

而右端第二、三项为

$$4\pi\frac{J}{A\Omega} - 2\Omega J = \left(M^2 - \frac{J^2}{M^2}\right)^{1/2} = \frac{1}{M}(M^4 - J^2)^{1/2},$$

将此二式与 (3.3.1) 比较, 可知

$$\frac{\kappa}{4\pi}A = \frac{1}{M}(M^4 - J^2)^{1/2},$$

即

$$\kappa = 4\pi\frac{(M^4 - J^2)^{1/2}}{MA} = \frac{(M^4 - J^2)^{1/2}}{2M[M^2 + (M^4 - J^2)^{1/2}]}$$
$$= \frac{2M_{ir}^2 - M^2}{4MM_{ir}^2} = \frac{(r_+^h - r_-^h)}{2(r_+^{h^2} + a^2)}.$$

在克尔–纽曼黑洞的情况下 (采用 CGS 制) 有

$$\kappa = \frac{4\pi}{A}\left[G^2M^2 - \frac{J^2c^2}{M^2} - GQ^2\right]^{1/2}$$

在 Schwarzschild 黑洞的情况下, 显然有 $\kappa = \frac{1}{4M} = \frac{M}{r_g^2}$, 即 Schwarzschild 黑洞表面的引力加速度.

由克尔情况可知, 当 $M^2 = J$(或 $M = a$) 时 $\kappa = 0$. 这可以解释为惯性离心力和引力相抵消; 这类黑洞称为**极端克尔黑洞**.

如果 $J > M^2$(或者 $a > M$), 视界不存在, 中心奇点裸露, 这在物理学中是不可接受的. 所以 Penrose(1968) 提出:“…… 是否存在一位‘宇宙监督’, 他严禁出现裸奇点, 把每一个奇点都用视界面覆盖住?” 这就是著名的宇宙监督原理. 按照这一原理, 不可能有 $J > M^2$.

下面证明 (3.3.2) 式:

对 M 的定义式

$$2M_{ir}^2 = M^2 + (M^4 - J^2)^{1/2},$$

两边微分, 得到

$$\delta M_{ir} = \frac{M_{ir}}{(M^2 - a^2)^{1/2}}\left[\delta M - \frac{J}{4MM_{ir}^2}\delta J\right].$$

考虑到 (3.3.13) 式知上式即

$$\delta M_{ir} = \frac{M_{ir}}{(M^2 - a^2)^{1/2}}[\delta M - \Omega\delta J].$$

由 (3.3.14)、(3.3.15) 式知上式即

$$\delta M = \Omega\delta J + \frac{\kappa}{8\pi}\delta A.$$

在 CGS 单位制中

$$\delta(Mc^2) = \Omega\delta J + \frac{\kappa c^2}{8\pi G}\delta A.$$

在克尔–纽曼黑洞的情况下有

$$\delta M = \Omega\delta J + \frac{\kappa}{8\pi}\delta A + V\delta Q,$$

$$V = \frac{Qr_+^h}{c^2(r_+^{h^2} + a^2)}.$$

3.4 Rindler 变换

这是一个由闵可夫斯基时空坐标 $(X - T)$ 向弯曲时空坐标 $(x - t)$ 的变换, 变换式为

$$\begin{cases} T = x\text{sh}t, \\ X = x\text{ch}t; \end{cases} \quad R\text{区} \tag{3.4.1}$$

$$\begin{cases} T = -x\text{sh}t, \\ X = -x\text{ch}t; \end{cases} \quad L\text{区} \tag{3.4.2}$$

$$\begin{cases} T = x\text{ch}t, \\ X = x\text{sh}t; \end{cases} \quad F\text{区} \tag{3.4.3}$$

$$\begin{cases} T = -x\text{ch}t, \\ X = -x\text{sh}t; \end{cases} \quad P\text{区} \tag{3.4.4}$$

$$Y = y, \quad Z = z.$$

在上述变换下, 线元由闵可夫斯基的

$$ds^2 = dT^2 - dX^2 - dY^2 - dZ^2 \tag{3.4.5}$$

化为

$$ds^2 = x^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (R, L\text{区}); \tag{3.4.6}$$

$$ds^2 = -x^2 dt^2 + dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (F, P\text{区}). \tag{3.4.7}$$

Rindler 变换把闵可夫斯基时空分为 4 个区域 (图 5-11), 以 T、X 轴的角平分线划分.

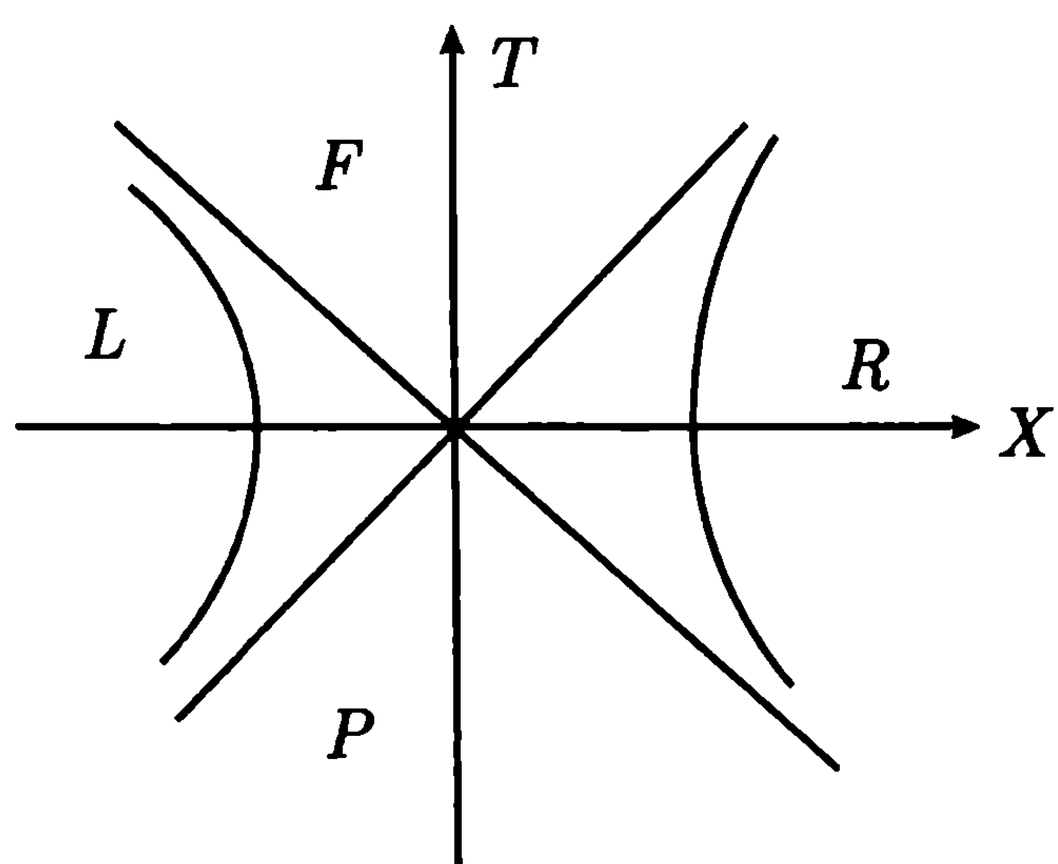


图 5-11

R 区和 L 区是两个 Rindler 时空区, 它们与闵可夫斯基时空一样是静态的, 但都只能覆盖闵可夫斯基时空的一部分. R 区和 L 区没有因果关系, 可以看作互不连通的两个时空. 闵可夫斯基时空无内禀奇点, 也无坐标奇点. Rindler 时空当然也没有内禀奇点, 但在 $x=0$ 有坐标奇点. 此处有

$$g_{00} = x^2 = 0, \tag{3.4.8}$$

可见这是无限红移面. 考虑到 Rindler 时空有 3 个 Killing 矢量 $\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$, 零曲面方程具有形式

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu}\frac{\partial f}{\partial x^\mu}\frac{\partial f}{\partial x^\nu} &= \frac{1}{x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 \\ &= \frac{1}{x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 = 0. \end{aligned} \tag{3.4.9}$$

上式两端乘以 x^2, 消去 $\frac{\partial f}{\partial t}$ 项, 并注意 $\frac{\partial f}{\partial x} \neq 0$, 我们得 到具有 Rindler 时空对称性的零超曲面

$$x = 0. \tag{3.4.10}$$

可以证明, 此面即 Rindler 时空的事件视界.

图 5-12 是闵可夫斯基时空的 Penrose 图. 比较 Rindler 变换和 Schwarzschild 时空的克鲁斯卡变换, 以及二者的时空图和 Penrose 图, 可以发现, 闵可夫斯基时空对应于克鲁斯卡时空, Rindler 时空对应于 Scharzschild 时空, 其 F 区和 P 区分别对应于

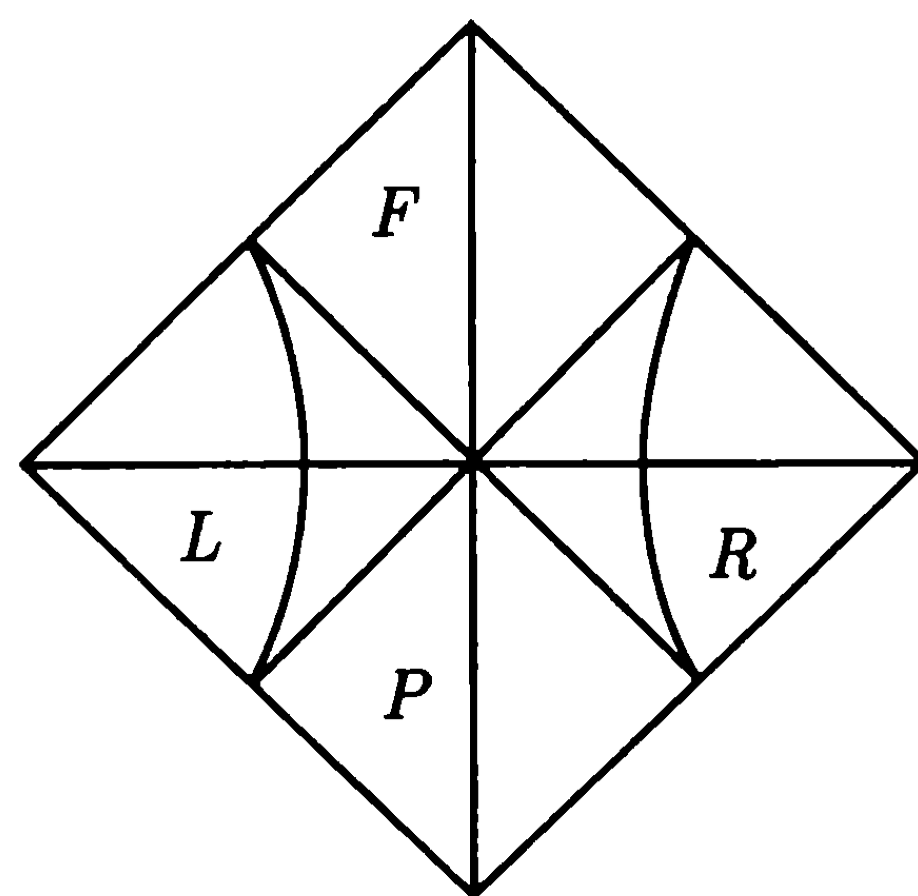


图 5-12

Schwarzschild 的黑洞和白洞.

Rindler 系中静止观测者的固有加速度具有形式

$$\begin{aligned} a &= -\sqrt{-g_{11}}\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}\tau^2} = -\sqrt{-g_{11}}\Gamma^1_{00}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 \\ &= -\sqrt{-g_{11}}\frac{\Gamma'_{00}}{g_{00}} = \frac{1}{x}. \end{aligned} \tag{3.4.11}$$

此式表明, 静止于 x 点的观测者的固有加速度为一常数, 即观测者做匀加速运动. 加速度的方向沿 x 增加的方向, 惯性力指向视界 $x=0$.

在视界 $(x=0), a\to\infty$. 静止于 Schwarzschild 黑洞表面的观测者的固有加速度也等于无限大, 这是事件视界的特点. 人们定义在视界上不发散的"表面引力"加速度

$$\kappa \equiv \lim_{g_{00}\to 0}(a\sqrt{g_{00}}). \tag{3.4.12}$$

对于 Rindler 视界有

$$\kappa = \lim_{g_{00}\to 0}\left(\frac{1}{2}g_{00,1}\sqrt{-g_{11}/g_{00}}\right) = 1. \tag{3.4.13}$$

Rindler 坐标系是一个匀加速系. Rindler 时空是闵可夫斯基时空的一部分, 是静态的, 存在事件视界.

引入新的坐标变换

$$\begin{cases} t = a\eta, \\ x = \dfrac{1}{2} + \xi. \end{cases} \tag{3.4.14}$$

$(y, z$不变)

式中 (x,y,z,t) 为 Lindler 坐标, Rindler 变换成为

$$\begin{cases} T = \left(\dfrac{1}{a}+\xi\right)\mathrm{sh}(a\eta), \\ X = \left(\dfrac{1}{a}+\xi\right)\mathrm{ch}(a\eta); \end{cases} \quad R\text{区} \tag{3.4.15}$$

$$\begin{cases} T = -\left(\dfrac{1}{a}+\xi\right)\mathrm{sh}(a\eta), \\ X = -\left(\dfrac{1}{a}+\xi\right)\mathrm{ch}(a\eta); \end{cases} \quad L\text{区} \tag{3.4.16}$$

$$\begin{cases} T = \left(\dfrac{1}{a}+\xi\right)\mathrm{ch}(a\eta), \\ X = \left(\dfrac{1}{a}+\xi\right)\mathrm{sh}(a\eta); \end{cases} \quad F\text{区} \tag{3.4.17}$$

$$\begin{cases} T = -\left(\dfrac{1}{a}+\xi\right)\mathrm{ch}(a\eta), \\ X = -\left(\dfrac{1}{a}+\xi\right)\mathrm{sh}(a\eta); \end{cases} \quad P区 \tag{3.4.18}$$

线元为

$$\mathrm{d}s^2 = \pm(1+a\xi)^2\mathrm{d}\eta^2 \mp \mathrm{d}\xi^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2. \tag{3.4.19}$$

上面的符号对应于 R 和 L 区, 下面的符号对应于 F 区和 P 区.

变换 (3.4.15)~(3.4.18) 称为局部 Lindler 变换.

代替 (3.4.14), 引入另一坐标变换

$$t = a\eta, \quad x = \frac{1}{a}\mathrm{e}^{a\xi}, \tag{3.4.20}$$

$$(y, z不变)$$

则由 Rindler 变换得到

$$\begin{cases} T = a^{-1}\mathrm{e}^{a\xi}\mathrm{sh}(a\eta), \\ X = a^{-1}\mathrm{e}^{a\xi}\mathrm{ch}(a\eta); \end{cases} \quad R区 \tag{3.4.21}$$

$$\begin{cases} T = -a^{-1}\mathrm{e}^{a\xi}\mathrm{sh}(a\eta), \\ X = -a^{-1}\mathrm{e}^{a\xi}\mathrm{ch}(a\eta); \end{cases} \quad L区 \tag{3.4.22}$$

$$\begin{cases} T = a^{-1}\mathrm{e}^{a\xi}\mathrm{ch}(a\eta), \\ X = a^{-1}\mathrm{e}^{a\xi}\mathrm{sh}(a\eta); \end{cases} \quad F区 \tag{3.4.23}$$

$$\begin{cases} T = -a^{-1}\mathrm{e}^{a\xi}\mathrm{ch}(a\eta), \\ X = -a^{-1}\mathrm{e}^{a\xi}\mathrm{sh}(a\eta); \end{cases} \quad P区 \tag{3.4.24}$$

线元的表示式为

$$\mathrm{d}s^2 = \pm\mathrm{e}^{2a\xi}(\mathrm{d}\eta^2 - \mathrm{d}\xi^2) - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2. \tag{3.4.25}$$

式中 + 号对应于 R 区和 L 区, − 号对应于 F 区和 P 区. 这一时空的特点是事件视界移至坐标无限远 ($\xi \to -\infty$) 处, 这是乌龟坐标的特点. 由 (3.4.19) 可得

$$\xi = \frac{1}{a}\ln(ax), \tag{3.4.26}$$

可见 ξ 确是 Rindler 时空中的乌龟坐标. 此坐标系中, 静止观测者的固有加速度为 $a\mathrm{e}^{-a\xi}$, 视界面上表面引力加速度为 $\kappa = a$. 在原点 ($\xi = 0$), 加速度也等于 $\kappa = a$. 在原点附近, 线元 (3.4.25) 趋近闵可夫斯基时空的线元.

闵可夫斯基时空的零坐标为

$$V = T + X, \quad U = T - X, \tag{3.4.27}$$

Rindler 时空的零坐标为

$$v = t + \ln x, \quad u = t - \ln x. \tag{3.4.28}$$

和 Schwarzschild 时空相似, 在 R 区有

$$V = \mathrm{e}^{v}, \quad U = -\mathrm{e}^{u}. \tag{3.4.29}$$

在未来视界上, v 为群参量, V 为仿射参量; 在过去世界上, u 为群参量, U 为仿射参量. $\kappa = 1$ 是群参量对仿射参量的偏离.

对于式 (3.4.21) 中的 Rindler 坐标, 相应的零坐标为

$$\widetilde{v} = \eta + \xi, \quad \tilde{u} = \eta - \xi. \tag{3.4.30}$$

在 F 区有

$$V = \mathrm{e}^{a\tilde{v}}, \quad U = \mathrm{e}^{-a\tilde{u}}. \tag{3.4.31}$$

在视界面上, $\kappa = a$ 也表示群参量对仿射参量的偏离.

3.5 稳态时空中的事件视界

超曲面方程可表示为

$$F(x^{\mu}) = 0, \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \tag{3.5.1}$$

其法矢量具有形式

$$n^{\mu} = F_{,\mu}. \tag{3.5.2}$$

零超曲面定义为

$$n^{\mu} n_{\mu} = 0, \tag{3.5.3}$$

或

$$g^{\mu\nu} F_{,\mu} F_{,\nu} = 0. \tag{3.5.4}$$

对于稳态时空, (3.5.4) 具有形式

$$g^{00} F_{,0}^{2} + 2g^{03} F_{,03} + g^{11} F_{,1}^{2} + g^{22} F_{,2}^{2} + g^{33} F_{,3}^{2} = 0. \tag{3.5.5}$$

设 $g^{00} \neq 0$, 上式可写为

$$F_{,0}^{2} + (g^{00})^{-1} (2g^{03} F_{,03} + g^{11} F_{,1}^{2} + g^{22} F_{,2}^{2} + g^{33} F_{,3}^{2}) = 0. \tag{3.5.6}$$

稳态条件使 $F_{,0}=0$, 上式化为

$$(g^{00})^{-1}(g^{11}F_{,1}^2+g^{22}F_{,2}^2+g^{33}F_{,3}^2)=0. \tag{3.5.7}$$

此方程可分为两个方程

$$(g^{00})^{-1}=0 \tag{3.5.8}$$

和

$$g^{11}F_{,1}^2+g^{22}F_{,2}^2+g^{33}F_{,3}^2=0. \tag{3.5.9}$$

(3.5.9) 的解和 (3.5.8) 的解均满足 (3.5.7).

(3.5.9) 就是通常稳态视界的方程, 而 (3.5.8) 则常被忽略. 这一忽略, 用数学的语言表述就是解方程丢了根.

采用拖曳坐标时我们有

$$z_{,0}=-g_{03}/g_{33}. \tag{3.5.10}$$

线元可写为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2&=g_{00}\mathrm{d}x^{0^2}+2g_{03}\mathrm{d}x^0\mathrm{d}x^3+g_{11}\mathrm{d}x^{1^2}+g_{22}\mathrm{d}x^{2^2}+g_{33}\mathrm{d}x^{3^2}\\&=\hat{g}_{00}\mathrm{d}x^{0^2}+g_{11}\mathrm{d}x^{1^2}+g_{22}\mathrm{d}x^{2^2}+g_{33}\mathrm{d}x^{3^2},\end{aligned} \tag{3.5.11}$$

式中

$$\hat{g}_{00}=g_{00}-\frac{g_{03}^2}{g_{33}}. \tag{3.5.12}$$

容易证明

$$\hat{g}_{00}=(g^{00})^{-1}. \tag{3.5.13}$$

这样, 零曲面条件 (3.5.8) 可写成

$$\hat{g}_{00}=0. \tag{3.5.14}$$

在克尔黑洞的情况下, 坐标为 (t,r,θ,φ). 除了稳态条件 $F_{,0}=0$ 以外, 还有轴对称, 即 $F_{,3}=0$. 于是 (3.5.9) 简化为

$$g^{11}F_{,1}^2+g^{22}F_{,2}^2=0. \tag{3.5.15}$$

不难看出, (3.5.14) 和 (3.5.15) 都化为同一个方程

$$\varDelta=r^2+a^2-2mr=0. \tag{3.5.16}$$

在 Schwarzschild 场的情况下 (静态球对称), 方程 (3.5.7) 化为两个简单的方程

$$g_{00}=0,\quad g^{11}=0,$$

这两个方程是同一个方程, 解为

$$r = 2m.$$

对于 Rindler 时空, $g_{00} = -x^2$, $g_{11} = 1$. 可以发现, 方程 (3.5.9) 无解, 而方程 (3.5.8) 有解:

$$-x^2 = 0, \quad x = 0.$$

即视界位于 $x = 0$ 处. 这表明方程 (3.5.7) 分解成的两个方程 (3.5.8) 和 (3.5.9) 是不能随便丢掉一个的.

熟知, 不是所有的零超曲面都是事件视界. 稳态时空中的事件视界应是满足下述条件的零超曲面: ① 曲面的母线线汇应该是零短程线汇; ② 该线汇的切矢量场应该是零 Killing 矢量场; 这里说的零矢量指 null(类光) 矢量. 也就是说, 作为 Killing 视界的超曲面才是事件视界.

3.6 黑洞的第四个参量

对于真空 Einstein 方程, 唯一性定理告诉我们, 由总质量 M 和角动量 J 这两个参数所表征的 Kerr 度规是最一般的稳态渐近平直黑洞解. 唯一性定理使我们能够划分质量充分大的物体 (如质量超过 Chandrasekhar 极限的恒星) 引力坍缩的最终状态. 真空情况下, 黑洞只具有两种“毛发”或者说“荷”, 即质量和角动量. 原来物质分布的许多特性都在引力坍缩中消失了. 正比于其事件视界面积的黑洞的熵就是这样一种信息丢失的例子. 在真空情况下, 除零极矩 (质量) 和一极矩 (角动量) 外, 原来质量分布的所有其他多极矩也都在引力坍缩中被辐射掉了.

如果考虑引力与一个 Abell 规范场 (电磁场) 的耦合, 则黑洞可带有电荷和磁荷. 耦合的 Maxwell-Einstein 方程有一个类似于真空情形的唯一性定理 —— 存在一个由 Kerr-Newmann 度规所描述的唯一的 4 参数黑洞解族. 当将 Abell 规范理论推广到非 Abell 情形时, 目前并没有类似的结果存在. 因为非线性的非 Abell 理论的结构毕竟要比线性的 Abell 情形丰富和复杂得多. 除了质量、角动量和电 (磁) 荷之外, 黑洞是否还能含有第四种参量呢?

正如 Bowick 指出的那样, 目前仍不很清楚黑洞是否可携带非 Abell 荷 (毛发), 如 QCD 颜色荷. 为了研究这个问题, 必须研究引力与 Yang-Mills 场和 Yang-Mills-Higgs 场的耦合, 即耦合 EYM 系统和耦合 EYMH 系统.

引力与 SU(5) 大统一理论的耦合由下述作用量描述:

$$\begin{aligned} S = \int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\Big[&-\frac{R}{16\pi G} - \frac{1}{2}g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}\mathrm{tr}(F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}) \\ &+g^{\mu\nu}\mathrm{tr}(D_\mu\phi D_\nu\phi) + g^{\mu\nu}(D_\mu H)^+(D_\nu H) - V(\phi, H)\Big], \end{aligned} \tag{3.6.1}$$

其中

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - \mathrm{i}g'[A_\mu, A_\nu], \quad A_\mu = A_\mu^a \lambda^a, \quad a = 1, \cdots, 24,$$

$$D_\mu \phi = \partial_\mu \phi - \mathrm{i}g'[A_\mu, \phi], \quad D_\mu H = \partial_\mu H - \mathrm{i}g' A_\mu H,$$

$$\begin{aligned} V(\phi, H) =& a_1 \mathrm{tr}\left[\left(\phi - \frac{1}{\sqrt{15}}\nu\right)^2 \left(\phi + \frac{3\nu}{2\sqrt{15}}\right)^2\right] \\ & + a_2(2\mathrm{tr}\phi^2 - \nu^2)^2 + a_3(H^+ H - \omega^2)^2 \\ & + a_4 H^+ \left(\phi + \frac{3}{2\sqrt{15}}\nu\right)^2 H, \end{aligned}$$

$$a_i > 0, \quad \nu \sim 10^{14}\mathrm{GeV}, \quad \omega \sim 10^2\mathrm{GeV}, \quad g' = \left(\frac{8}{3}\right)^{1/2} e,$$

这里 g' 是 SU(5) 规范耦合常数, e 是正电子电荷. 群生成元 λ^α 满足 $\mathrm{tr}\lambda^a\lambda^b = \frac{1}{2}\delta^{ab}, \lambda^{+a} = \lambda^a$. Higgs 场 ϕ 和 H 分别是 SU(5) 的 24 维和 5 维表示. 它们的如下真空平均值将 SU(5) 破缺到 $\mathrm{SU}(3)_c \times U(1)_{em}$

$$\langle\phi\rangle = \nu \mathrm{diag}\left[\sqrt{\frac{1}{15}}, \quad \sqrt{\frac{1}{15}}, \quad \sqrt{\frac{1}{15}}, \quad \frac{-3}{2\sqrt{15}}, \quad \frac{-3}{2\sqrt{15}}\right],$$

$$\langle H\rangle = \mathrm{Col.}(0, 0, 0, 0, \omega).$$

与 (3.6.1) 式相应的能量-动量张量是

$$\begin{aligned} T_\nu^\mu =& -2g^{\mu\alpha}g^{\rho\beta}\mathrm{tr}(F_{\alpha\beta}F_{\nu\rho}) + \frac{1}{2}\delta_\nu^\mu g^{\rho\alpha}g^{\sigma\beta}\mathrm{tr}(F_{\rho\sigma}F_{\alpha\beta}) \\ & + 2g^{\mu\rho}\mathrm{tr}(D_\rho\phi D_\nu\phi) - \delta_\nu^\mu g^{\rho\sigma}\mathrm{tr}(D_\rho\phi D_\sigma\phi) \\ & + 2g^{\mu\rho}(D_\rho H)^+(D_\nu H) - \delta_\nu^\mu g^{\rho\sigma}(D_\rho H)^+(D_\sigma H) + \delta_\nu^\mu V(\phi, H). \end{aligned} \tag{3.6.2}$$

从 (3.6.1) 式可求出关于 A_μ, $g^{\mu\nu}$, ϕ, H 的运动方程如下:

$$\begin{cases} R^{\mu\nu} - 1/2 g^{\mu\nu} R = \delta\pi G T^{\mu\nu}, \\ (\sqrt{-g})^{-1} D_\nu(\sqrt{-g} g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} F_{\rho\sigma}) = -\mathrm{i}g' g^{\mu\nu}[\phi, D_\nu\phi] \\ \qquad\qquad -\mathrm{i}g' g^{\mu\nu}\lambda^a(H^+\lambda^a D_\nu H - (D_\nu H)^+\lambda^\alpha H), \\ (\sqrt{-g})^{-1} D_\mu(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} D_\nu\phi) = -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial V(\phi, H)}{\partial\phi}, \\ (\sqrt{-g})^{-1} D_\mu(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} D_\nu H) = -\dfrac{\partial V(\phi, H)}{\partial H^+}. \end{cases} \tag{3.6.3}$$

具有球对称性的最一般的静态度规可表示为

$$g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(\mathrm{e}^A, -\mathrm{e}^B, -r^2, -r^2\sin^2\theta).$$

这里 $\mu,\nu = t,r,\theta,\varphi, A$ 和 B 仅仅是 r 的函数. 为了求得球对称解, 对 A_ν, ϕ, H, 假定

$$\begin{cases} H(r) = \dfrac{1}{g'}\ \mathrm{Col.}(0,0,0,0,h(r)), \\ \phi(r) = \dfrac{1}{g'}\mathrm{diag}(\phi_1(r),\phi_1(r),\phi_2(r) \\ \qquad\qquad +\phi_3(r)\hat{r}\cdot\tau, -2(\phi_1(r)+\phi_2 2(r))), \\ A_l(r) = \dfrac{1}{g'}\mathrm{diag}\bigg(J_1(r),J_1(r),J_2(r)+\dfrac{1}{2}J_3(r)\hat{r}\cdot\tau, \\ \qquad\qquad -2(J_1(r)+J_2(r))\bigg), \\ A_i(r) = \dfrac{K(r)-1}{g'r}.(\boldsymbol{T}\times\hat{\boldsymbol{r}})_i, \\ T = \dfrac{1}{2}\mathrm{diag}(0,0,\tau,0), \quad \hat{\boldsymbol{r}} = \dfrac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}. \end{cases} \tag{3.6.4}$$

上述形式是球对称且拓扑稳定的. 这里球对称定义为 $\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{T}$ 的不变性 $(L = \mathrm{i}\boldsymbol{r}\times\nabla)$.

利用上述假定, 耦合 EYMH 方程 (3.6.3) 简化为下面的径向方程:

$$\begin{cases} \mathrm{e}^{-B}(rB'-1)/r^2 + 1/r^2 = 8\pi G T_t^t, \\ -\mathrm{e}^{-B}(rA'+1)/r^2 + 1/r^2 = 8\pi G T_r^r, \\ -\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-B}\left[A'' + \dfrac{1}{2}A'^2 - \dfrac{1}{2}A'B' + (A-B)'/r\right] = 8\pi G T_\theta^\theta = 8\pi G T_\varphi^\varphi, \\ (rJ_1)'' - \dfrac{1}{2}r(A+B)'J_1' + \dfrac{2}{5}r\mathrm{e}^B(J_1+J_2)h^2 = 0, \\ (rJ_2)'' - \dfrac{1}{2}r(A+B)'J_2' + \dfrac{2}{5}r\mathrm{e}^B(J_1+J_2)h^2 = 0, \\ (rJ_3)'' - \dfrac{1}{2}r(A+B)'J_3' + \dfrac{2}{5}r\mathrm{e}^B(J_1+J_2)h^2 - 2\mathrm{e}^B J_3K^2/r = 0, \\ K'' + \dfrac{1}{2}(A-B)'K' - \mathrm{e}^B K(K^2 - 1 + 4r^2\phi_3^2 - \mathrm{e}^{-A}(rJ_3)^2)/r^2 = 0 \\ (r\phi_1)'' + \dfrac{1}{2}r(A-B)'\phi_1' = -\dfrac{1}{2}g'^2 r\mathrm{e}^B\dfrac{\partial V}{\partial\phi_1}, \\ (r\phi_2)'' + \dfrac{1}{2}r(A-B)'\phi_2' = -\dfrac{1}{2}g'^2 r\mathrm{e}^B\dfrac{\partial V}{\partial\phi_2}, \\ (r\phi_3)'' + \dfrac{1}{2}r(A-B)'\phi_3' - 2\mathrm{e}^B K^2\phi_3/r^2 = \dfrac{1}{2}g'^2 r\mathrm{e}^B\dfrac{\partial V}{\partial\phi_3}, \\ (rh)'' + \dfrac{1}{2}r(A-B)'h_3' + 4r\mathrm{e}^{B-A}(J_1+J_2)^2 h = -rg'^2\mathrm{e}^B\dfrac{\partial V}{\partial h}. \end{cases} \tag{3.6.5}$$

能-动张量则成为

$$
\begin{cases}
T_t^t = \dfrac{1}{g'^2}\{\mathrm{e}^{-A-B}[2J_1'^2 + 4(J_1' + J_2')^2 + 2J_2'^2 + J_3'^2/2] \\
\quad +\mathrm{e}^{-B}K'^2/r^2 + \mathrm{e}^{-A}J_3^2K^2/r^2 \\
\quad +(K^2-1)^2/2r^4 + \mathrm{e}^{-B}[2\phi_1'^2 + 4(\phi_1' + \phi_2')^2 \\
\quad +2\phi_2'^2 + 2\phi_3'^2] + 4\phi_3^2K^2/r^2 \\
\quad +4\mathrm{e}^{-A}(J_1+J_2)^2h^2 + h'^2/r^2 + g'^2V(\phi, H)\}, \\
T_r^r = \dfrac{1}{g'^2}\{\mathrm{e}^{-A-B}[2J_1'^2 + 4(J_1' + J_2')^2 + 2J_2'^2 + J_3'^2/2] \\
\quad -\mathrm{e}^{-B}K'^2/r^2 + \mathrm{e}^{-A}J_3^2K^2/r^2 + (K^2-1)^2/2r^4 \\
\quad -\mathrm{e}^{-B}[2\phi_1'^2 + 4(\phi_1' + \phi_2')^2 + 2\phi_2'^2 + 2\phi_3'^2] + 4\phi_3^2K^2/r^2 \\
\quad -4\mathrm{e}^{-A}(J_1+J_2)^2h^2 - h'^2/r^2 + g'^2V(\phi, H)\}, \\
T_\theta^\theta = \dfrac{1}{g'^2}\{\mathrm{e}^{-A-B}[2J_1'^2 + 4(J_1' + J_2')^2 + 2J_2'^2 + J_3'^2/2] \\
\quad +\mathrm{e}^{-B}[2\phi'^2 + 4(\phi_1' + \phi_2')^2 + 2\phi_2'^2 + 2\phi_3'^2] \\
\quad -(K^2-1)^2/2r^4 - 4\mathrm{e}^{-A}(J_1+J_2)^2h^2 \\
\quad +h'^2/r^2 + g'^2(V\phi, H)\} = T_\varphi^\varphi.
\end{cases}
\tag{3.6.6}
$$

从方程组 (3.6.5) 的第一和第二两个方程, 可以导出

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{e}^{-B}}{r}\cdot(A+B)' =& 8\pi G(T_t^t - T_r^r) \\
=& \frac{16\pi G}{g'^2}[\mathrm{e}^{-B}\{2(\phi_1')^2 + 4(\phi_1' + \phi_2')^2 \\
&+ 2(\phi_2')^2 + 2\phi_3'^2\} + \mathrm{e}^{-A}J_3^2K^2/r^2 \\
&+ \mathrm{e}^{-B}K'^2/r^2 + h'^2/r^2 + 4\mathrm{e}^{-A}(J_1+J_2)^2h^2] \geqslant 0.
\end{aligned}
\tag{3.6.7}
$$

我们将寻求运动方程的静态球对称解, 故要求 $T_t^t = T_r^r$. 利用 (3.6.7) 式, 有

$$
\begin{cases}
A + B = C(\text{常数}), \quad \phi_i' = 0,\ i = 1, 2, 3, \\
h' = 0, \quad K' = 0, \quad J_3K = 0, \quad (J_1+J_2)h = 0.
\end{cases}
\tag{3.6.8}
$$

在下面的讨论中, 将令常数 C 等于零. 这样得到的度规是渐近平直的. 利用 (3.6.8) 式及无穷远处 Higgs 场趋于其真空平均值这一边界条件和 J_i, K 所满足的运动方程, 得到

$$
\phi_1 = \sqrt{\frac{1}{15}}\nu g', \quad \phi_2 = -\frac{1}{4\sqrt{15}}\nu g', \quad \phi_3 = \frac{5}{4\sqrt{15}}\nu g',
$$

$$
h = \omega g', \quad J_1 + J_2 = 0, \quad K = 0.
$$

$$J_i = \begin{cases} 0, \\ b_i/r + c_i, \quad 且\ b_1 = -b_2,\ c_1 = -c_2. \end{cases} \tag{3.6.9}$$

这里 b_i, c_i 是积分常数. 注意 $J_i = 0$ 的情形对应磁单极解, 而 $J_i \neq 0$ 的情形则与所谓双荷解相对应. 把以上结果代入 (3.6.2) 式便有

$$T_t^t = T_r^r = -T_\theta^\theta = -T_\varphi^\varphi = \frac{1 + 4b_1^2 + 4b_2^2 + b_3^2}{2g'^2 r^4}. \tag{3.6.10}$$

求解关于 A, B 的方程, 可得

$$\mathrm{e}^A = \mathrm{e}^{-B} = 1 - \frac{2GM}{r} + \frac{4\pi G(1 + 4b_1^2 + 4b_2^2 + b_3^2)}{g'^2 r^2}. \tag{3.6.11}$$

这里 M 是积分常数, 它代表本文所求得解的质量.

由于这里所得度规是渐近平直的, 因而, 可利用相应场在无穷远处球面上的积分来求场方程解所具有的电荷、磁荷和色荷. 电磁场强度可以定义为

$$F'_{\mu\nu} \equiv \frac{2}{g'}\mathrm{tr}(F_{\mu\nu}(r)Q(r)). \tag{3.6.12}$$

这里电荷算子 $Q(r) \underset{r\to 0}{\sim} \to \mathrm{e}\,\mathrm{diag}(-1/3,\ -1/3,\ 1/3 - 2\hat{r}/3\cdot\tau,\ 0)$. 而通常的电场强度 $E(r)$ 和磁场强度 $B(r)$ 由下式给出:

$$\begin{aligned} E_i(\boldsymbol{r}) &\equiv F'_{0i}(r) = \frac{2}{g'}\mathrm{tr}(F_{0i}(\boldsymbol{r})Q(\boldsymbol{r})), \\ B_i(\boldsymbol{r}) &\equiv \frac{1}{g'}\mathrm{tr}(\varepsilon_{ijk}F_{jk}(\boldsymbol{r})Q(\boldsymbol{r})). \end{aligned} \tag{3.6.13}$$

从 (3.6.4) 和 (3.6.9) 式, 可以求得

$$\begin{cases} F_{ij}(\boldsymbol{r}) = -\dfrac{2}{g'r^2}T_a(\varepsilon_{jab}\hat{r}_b\hat{\boldsymbol{r}}_i - \varepsilon_{iab}\hat{r}_b\hat{\boldsymbol{r}}_j - \varepsilon_{ija}) \\ \qquad\qquad -\dfrac{1}{g'r^2}\varepsilon_{ijb}\hat{r}_b\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{T}, \\ F_{0i}(\boldsymbol{r}) = \dfrac{\hat{r}_i}{g'r^2}\mathrm{diag}\left(b_1, b_1, b_2 + \dfrac{b_3}{2}\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{\tau}, 0\right). \end{cases} \tag{3.6.14}$$

这样

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) \underset{r\to\infty}{\sim} \frac{\hat{r}}{2\mathrm{e}r^2}, \quad \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \underset{r\to\infty}{\sim} \frac{-b_1 + b_2 - b_3}{2\mathrm{e}}\cdot\frac{\hat{r}}{r^2}. \tag{3.6.15}$$

而对 $\mathrm{SU(3)}_c$. 色电场 $\boldsymbol{E}^a(\boldsymbol{r})$ 和色磁场 $\boldsymbol{B}^a(\boldsymbol{r})$, 有

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}_i^a(\boldsymbol{r}) \equiv 2\boldsymbol{T}_r(\boldsymbol{F}_{0i}(\boldsymbol{r})\lambda^a(\boldsymbol{r})) \underset{r\to\infty}{\sim} \dfrac{4\pi(4b_1 - b_3)}{\sqrt{8}\mathrm{e}}\dfrac{\hat{\boldsymbol{r}}}{4\pi\boldsymbol{r}^2}\delta^{a^8}, \\ \lambda^a 是\ \text{Gell-Mann}\ 矩阵, \quad a = 1, \cdots, 8, \\ \boldsymbol{B}_i^a(\boldsymbol{r}) \equiv T_r(\varepsilon_{ijk}F_{ij}(\boldsymbol{r})\lambda^a(\boldsymbol{r})) \underset{r\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{3}}\dfrac{\hat{\boldsymbol{r}}}{g'r^2}\delta^{a^8}. \end{cases} \tag{3.6.16}$$

从上述结果可以看出, 场方程解所具有的电荷 Q、磁荷 P 和 QCD 色荷 C^a 分别是

$$Q=\frac{4\pi(-b_1+b_2-b_3)}{2\mathrm{e}},\quad P=\frac{4\pi}{2\mathrm{e}},$$
$$C^a=\frac{4\pi(4b_1-b_3)}{\sqrt{8}\mathrm{e}}\delta^{a^8}. \tag{3.6.17}$$

因此, 所得度规便可表示为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}S^2=&\left(1-\frac{2GM}{r}+\frac{3G}{8\pi r^2}\left(P^2+\frac{2}{3}(Q^2+(C^8)^2)\right)\right)\mathrm{d}t^2\\&-\left(1-\frac{2GM}{r}+\frac{3G}{8\pi r^2}\left(P^2+\frac{2}{3}(Q^2+C^8)^2\right)\right)^{-1}\mathrm{d}r^2\\&-r^2(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2).\end{aligned} \tag{3.6.18}$$

从度规表达式 (3.6.18) 容易证明, 存在如下事件视界:

$$r_H=GM\pm\sqrt{(GM)^2-\frac{3G}{8\pi}\left(P^2+\frac{2}{3}(Q^2+(C^8)^2)\right)}. \tag{3.6.19}$$

因此, 如果

$$\frac{3G}{8\pi}\left(P^2+\frac{2}{3}(Q^2+(C^8)^2)\right)\leqslant(GM)^2, \tag{3.6.20}$$

则我们所得的解就代表一个黑洞, 它除了带有通常的电荷和磁荷外, 还带有 $\mathrm{SU}(3)_c$ 色荷.

下面我们给出耦合 EYMH 方程组 (3.6.3) 的一个稳态轴对称解. 对于稳态轴对称情形, 时空度规可表示为如下形式:

$$\mathrm{d}S^2=X\mathrm{d}t^2-Y\mathrm{d}r^2-Z\mathrm{d}\theta^2-V\mathrm{d}\varphi^2-2W\mathrm{d}t\mathrm{d}\varphi. \tag{3.6.21}$$

这里 X,Y,Z,V,W, 只是 r,θ 的函数. 为了寻求场方程的稳态轴对称解, 将球对称的 Dokos Tomaras 假定推广为如下的轴对称形式:

$$\begin{aligned}&A_0(r,\theta)=\frac{1}{g'\Sigma}\mathrm{diag}\left(B_1,B_1,B_2+\frac{\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{\tau}}{2}B_3,-2(B_1+B_2)\right),\\&A_r=0,\quad A_\theta(r,\theta)=\frac{C}{g'\Sigma}(\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{R})_\theta,\\&A_\varphi(r,\theta)=\frac{D}{g'\Sigma}(\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{R})_\varphi,\\&\phi(r,\theta)=\frac{1}{g'\Sigma}\mathrm{diag}(F_1,F_1,F_2+F_3\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{\tau},-2(F_1+F_2)),\\&H(r,\theta)=\frac{1}{g'}\mathrm{Col}(0,0,0,0,/(r,\theta)),\end{aligned} \tag{3.6.22}$$

其中

$$
\begin{aligned}
&T = 1/2\mathrm{diag}(0,0,\tau,0), \quad \hat{\boldsymbol{r}} = \frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|},\\
&R = \sin\theta\cos\varphi\boldsymbol{e}_x + \sin\theta\sin\varphi\boldsymbol{e}_y + E(r,\theta)\cos\theta\boldsymbol{e}_z,\\
&\Sigma = r + a^2\cos^2\theta.
\end{aligned}
$$

B_i, C, D, E, F_i, I 均是 r,θ 的函数. 显然, 当转动参数 $a=0$ 时, (3.6.22) 式应回到 (3.6.4) 式, 故应有

$$
\begin{cases}
B_i/\Sigma = J_i(r), \quad \Sigma^{-1}C = (K(r)-1)r^{-1},\\
D/\Sigma = (K(r)-1)/r, \quad a=0.\\
E = 1, \quad F_i/\Sigma = \phi_i(r), \quad I = h(r).
\end{cases}
\tag{3.6.23}
$$

对于 $a \neq 0$, 即轴对称情形, 将 (3.6.21) 和 (3.6.22) 代入耦合 EYMH 方程组 (3.6.3), 我们很幸运地找到了场方程的一个严格解如下:

$$
\begin{cases}
B_1 = b_1 r = -B_2 = b_2 r, \quad B_3 = b_3 r - a\cos\theta,\\
C = -\dfrac{\Sigma}{r}\cdot\dfrac{1}{\sin^2\theta + E\cos^2\theta},\\
D = -(r + b_3 a\cos\theta), \quad E = \dfrac{r^2 + a^2 - b_3 r a\sin\theta\tan\theta}{r_2 + b_3 r a\cos\theta},\\
F_1 = \sqrt{\dfrac{1}{15}}\nu g'\Sigma, \quad F_2 = -\dfrac{1}{4\sqrt{15}}\nu g'\Sigma,\\
F_3 = \dfrac{5}{4\sqrt{15}}\nu g'\Sigma, \quad I = \omega g',
\end{cases}
\tag{3.6.24}
$$

$$
\text{及}
\begin{cases}
X = 1 - \dfrac{G}{\Sigma}\left[2Mr - \dfrac{3}{8\pi}\left(P^2 + \dfrac{2}{3}(Q^2 + (C^8)^2)\right)\right],\\
Y = \Sigma/\Delta, \quad Z = \Sigma,\\
V = \left\{r^2 + a^2 + \dfrac{G}{\Sigma}\left[2Mr - \dfrac{3}{8\pi}\times\left(P^2 + \dfrac{2}{3}(Q^2 + (C^8)^2)\right)\right]a\sin^2\theta\right\}\sin^2\theta,\\
W = -\dfrac{G}{\Sigma}\left[2Mr - \dfrac{3}{8\pi}\left(P^2 + \dfrac{2}{3}(Q^2 + (C^8)^2)\right)\right]a\sin^2\theta,\\
\Delta = r^2 + a^2 - G\left[2Mr - \dfrac{3}{8\pi}\left(P^2 + \dfrac{2}{3}(Q^2 + (C^8)^2)\right)\right],
\end{cases}
\tag{3.6.25}
$$

其中, b_i 是积分常数, P, Q, C^8 的值由 (3.6.17) 式给出. 可以看出, M 代表质量, a 代表单位质量的角动量. 至于 P, Q, C^8, 利用与上节同样的分析方法, 即可得出它们分别代表磁荷、电荷和 $\mathrm{SU}(3)_c$ 色荷.

从度规表达式 (3.6.25), 可以证明存在如下事件视界:

$$r_H^{\pm} = GM \pm \left[(GM)^2 - a^2 - \frac{3G}{8\pi}\left(P^2 + \frac{2}{3}(Q^2 + (C^8)^2)\right) \right]^{1/2} \tag{3.6.26}$$

因此, 若

$$a^2 + \frac{3G}{8\pi}\left(P^2 + \frac{2}{3}(Q^2 + (C^8)^2)\right) \leqslant (GM)^2, \tag{3.6.27}$$

则本节所给出的解就代表一个具有电荷、磁荷及 $SU(3)_c$ 色荷的旋转黑洞. 进一步, 在条件 (3.6.27) 下, 可求出黑洞的无限红移面为

$$r_{\pm}^{\infty} = GM \pm \left[(GM)^2 - a^2\cos^2\theta - \frac{3G}{8\pi}\left(P^2 + \frac{2}{3}(Q^2 + (C^8)^2)\right) \right]^{1/2} \tag{3.6.28}$$

注意　利用度规表达式 (3.6.21), (3.6.24) 和 (3.6.25), 可计算出 Einstein 张量 $E^\mu_\nu \equiv R^\mu_\nu - \frac{1}{2}\delta^\mu_\nu R$ 的非零分量为

$$\begin{aligned}
E^t_t =& \frac{1}{4Y\rho}\left[2X\partial_r^2 V + \partial_r V\partial_r X + 2W\partial_r^2 W + (\partial_r W)^2 - (X\partial_r V + W\partial_r W)\partial_r\left(\text{In}\frac{\rho Y}{Z}\right)\right] \\
&+ \frac{1}{4Z\rho}\left[2X\partial_\theta^2 V + \partial_\theta V\partial_\theta X + 2W\partial_\theta^2 W + (\partial_\theta W)^2 - (X\partial_\theta V + W\partial_\theta W)\partial_\theta\left(\ln\frac{\rho z}{Y}\right)\right] \\
&+ \frac{1}{4YZ}[2\partial_r^2 Z + 2\partial_\theta^2 Y - \partial_r Z\partial_r(\ln YZ) - \partial_\theta Y\partial_\theta(\ln YZ)], \\
E^t_\varphi =& -\frac{1}{4Y\rho}\left[2\partial_r(W\partial_r V - V\partial_r W) - (W\partial_r V - V\partial_r W)\partial_r\left(\ln\frac{\rho Y}{Z}\right)\right] \\
&- \frac{1}{4Z\rho}\left[2\partial_\theta(W\partial_\theta V - V\partial_\theta W) - (W\partial_\theta V - V\partial_\theta W)\partial_\theta\left(\ln\frac{\rho Z}{Y}\right)\right], \\
E^r_r =& \frac{1}{4Y\rho}[\partial_r\rho\partial_r(\ln Z) + \partial_r Z\partial_r V + (\partial_r W)^2] \\
&+ \frac{1}{4Z\rho}[2\partial_\theta^2\rho - \partial_\theta\rho\partial_\theta(\ln\rho Z) - \partial_\theta X\partial_\theta V - (\partial_\theta W)^2], \\
E^r_\theta =& -\frac{1}{4Y\rho}[2\partial_r\partial_\theta\rho - \partial_r\rho\partial_\theta(\ln\rho Y) - \partial_r(\ln Z)\partial_\theta\rho \\
&- (\partial_r X\partial_\theta V + \partial_\theta X\partial_r V + \partial_r W\partial_\theta W)], \\
E^\theta_\theta =& \frac{1}{4Y\rho}[2\partial_r^2\rho - \partial_r\rho\partial_r(\text{In}\rho Y) - \partial_r X\partial_r V - (\partial_r W)^2] \\
&+ \frac{1}{4Z\rho}[\partial_\theta\rho\partial_\theta(\ln Y) + \partial_\theta X\partial_\theta V + (\partial_\theta W)^2], \\
E^\varphi_\varphi =& \frac{1}{4Y\rho}\left[2V\partial_r^2 X + \partial_r X\partial_r V + 2W\partial_r^2 W + (\partial_r W)^2\right. \\
&\left. - (V\partial_r X + W\partial_r W)\partial_r\left(\ln\frac{\rho Y}{Z}\right)\right]
\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{4Z\rho}\left[2V\partial_\theta^2 X+\partial_\theta X\partial_\theta V+2W\partial_\theta^2 W+(\partial_\theta W)^2\right.$$
$$\left.-(V\partial_\theta X+W\partial_\theta W)\partial_\theta\left(\ln\frac{\rho Y}{Z}\right)\right]+\frac{1}{4YZ}[2\partial_r^2 Z+2\partial_\theta^2 Y$$
$$-\partial_r Z\partial_r(\ln YZ)-\partial_\theta Y\partial_\theta\ln(YZ)],$$

这里 $\rho=XV+W^2$, $\sqrt{-g}=(\rho YZ)^{1/2}$. 从 (3.6.22) 和 (3.6.24), 经过冗长的计算, 有

$$F_{tr}=\frac{1}{g'\Sigma^2}\mathrm{diag}(\Gamma_1,\Gamma_1,\Gamma_2+\Gamma_3\hat{r}\cdot\tau/2,-2(\Gamma_1+\Gamma_2)),$$
$$F_{t\theta}=\frac{a\sin\theta}{g'\Sigma^2}\mathrm{diag}(\Lambda_1,\Lambda_1,\Lambda_2+\Lambda_3\hat{r}\cdot\tau/2,0),\quad F_{t\varphi}=0,$$
$$F_{\theta\varphi}=\frac{1}{g'\Sigma^2}\mathrm{diag}(0,0,\Lambda_3(r^2+a^2)\sin\theta\hat{r}\cdot\tau/2,0),$$
$$F_{\varphi r}=\frac{1}{g'\Sigma^2}\mathrm{daig}(0,0,-\Gamma_3 a\sin^2\theta\hat{r}\cdot\tau/2,0)\quad F_{r\theta}=0,$$
$$D_\mu\phi=0,\quad \mu=t,r,\theta,\varphi,\quad D_\mu H=0,\quad \mu=t,r,\theta,\varphi,$$

(在推导 $D_\mu H=0$ 时, 利用了关系 $B_1=-B_2$,) 其中

$$\Gamma_1=b_1(r^2-a^2\cos^2\theta),\quad \Gamma_2=b_2(r^2-a^2\cos^2\theta),$$
$$\Gamma_3=-2ra\cos\theta+b_3(r^2-a^2\cos^2\theta),$$
$$(B_1=-B_2\Rightarrow b_1=-b_2\Rightarrow \Gamma_1+\Gamma_2=0),$$
$$\Lambda_1=-2b_1 ra\cos\theta,\quad \Lambda_2=-2b_2 ra\cos\theta,$$
$$\Lambda_3=-2b_3 ra\cos\theta-(r^2-a^2\cos^2\theta)$$
$$(B_1=-B_2\Rightarrow b_1=-b_2\Rightarrow \Lambda_1+\Lambda_2=0).$$

为了得到能–动张量的明显表达式, 将用到逆变度规张量 $g^{\mu\nu}$. 按照 (3.6.21), 它们可写为

$$g^{tt}=\frac{V}{\rho},\quad g^{rr}=-\frac{1}{Y},\quad g^{\theta\theta}=-\frac{1}{Z},$$
$$g^{\varphi\varphi}=\frac{X}{\rho},\quad g^{t\varphi}=-\frac{W}{\rho},\quad \rho=XV+W^2.$$

将上述式子代入 (3.6.2), 可求得能量–动量张量的非零分量为

$$T_t^t=\frac{3}{64\pi^2}\left(P^2+\frac{2}{3}(Q^2+(C^8)^2)\right)\cdot\frac{1}{\Sigma^3}(r^2+a^2(1+\sin^2\theta))=-T_\varphi^\varphi,$$

$$T_{\varphi}^{t} = -\frac{3}{32\pi^2}\left(P^2 + \frac{2}{3}(Q^2 + (C^8)^2)\right) \cdot \frac{1}{\Sigma^3}(r^2 + a^2)a\sin^2\theta,$$

$$T_{t}^{\varphi} = \frac{3}{32\pi^2}\left(P^2 + \frac{2}{3}(Q^2 + (C^8)^2)\right) \cdot \frac{a}{\Sigma^3},$$

$$T_{r}^{r} = \frac{3}{64\pi^2}\left(P^2 + \frac{2}{3}(Q^2 + (C^8)^2)\right) \cdot \frac{a}{\Sigma^3} = -T_{\theta}^{\theta}.$$

利用前面所给出的一系列结果, 经验证 (3.6.24) 和 (3.6.25) 式的确是耦合 EYMH 方程组 (3.6.3) 的一个严格解.

第 4 章　经典黑洞热力学

1973 年, Bekenstein 指出, 可以在黑洞物理学中引入热力学概念 —— 黑洞也具有温度和熵. 黑洞的熵是以它的面积表征的. 与此相联系, 我们首先讨论黑洞物理学中最重要的一个定理.

4.1　经典黑洞的面积不减定理

经典 Schwarzschild 黑洞的面积唯一地取决于质量, 而经典 Schwarzschild 黑洞的质量不可能减少, 所以它的面积不减是不言而喻的. 一般黑洞没有这么简单, 面积不减这一结论是需要证明的.

面积不减定理的一般证明是霍金于 1972 年给出的.

Penrose 于 1968 年给出一定理, 其内容是：黑洞的视界以零短程线为其母线 (generator)；沿着逆时间方向母线可能在视界上的某一焦散点 (caustic) 离开视界而进入外部空间, 顺着时间方向母线一旦进入视界将不会再离开视界, 而且母线永不相交叉; 母线通过视界上任一点 (焦散点除外) 有一条且仅有一条. 此定理的证明如下.

过视界上任一点都只有一条零短程线. 如果有两条零短程线在视界上一点处相交, 则过此点的局部光锥一定要与视界相交, 这显然是不可能的. 这表明, 视界以零短程线为母线, 且母线在视界上永不相交.

如果沿着顺时针方向, 母线在视界上一点离开视界, 则沿此母线上的点的逆时方向, 母线的切矢量就是该点过去局部光锥与视界的切矢量. 又沿这一母线的顺时针方向, 母线只能在该点的未来局部光锥面上, 由于零短程线在该点的切矢量是唯一的, 故沿顺时针方向, 该点的母线就是未来局部光锥与视界的切线. 这就证明了, 一旦母线进入视界就将永不离开视界.

我们认为光波的波长足够短, 以至于在局部时空中可以把它看作平面波. 这样, 光的传播便遵守几何光学的基本定律.

定义波矢量

$$\kappa_\mu = \frac{\partial\theta}{\partial x^\mu}, \quad \theta\text{为等位相面},$$

可以证明

$$\kappa_{\nu;\mu}\kappa^\mu = 0. \tag{4.1.1}$$

实际上, 我们有

$$\frac{\mathrm{D}\kappa_\mu}{\mathrm{d}\lambda}=\frac{\mathrm{d}\kappa_\mu}{\mathrm{d}\lambda}+\Gamma^\nu_{\mu\rho}\kappa_\nu U^\rho=\frac{\partial\kappa_\mu\mathrm{d}x^\rho}{\partial x^\rho\mathrm{d}\lambda}+\Gamma^\nu_{\mu\rho}\kappa_\nu U^\rho$$
$$=\left(\frac{\partial\kappa_\mu}{\partial x^\rho}+\Gamma^\mu_{\mu\rho}\kappa_\nu\right)U^\rho=\kappa_{\mu;\rho}U^\rho=0,\quad U^\rho\sim\kappa^\rho.$$

矢势可以展开为

$$A_\mu=(a_\mu+\varepsilon b_\mu+\varepsilon^2c_\mu+\cdots)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(x,t)/\varepsilon},\tag{4.1.2}$$

其中

$$\theta=\kappa_\mu x^\mu,$$

$\varepsilon\sim\frac{\lambda}{L}$, $\lambda\equiv\frac{\lambda}{2\pi}$, $\lambda\ll L$, L 即几何光学适用的空间线度. 由广义相对论真空麦克斯韦方程

$$F_{\mu\nu}=A_{\nu;\mu}-A_{\mu;\nu},$$
$$F^{\mu\nu}_{;\nu}=0,$$
$$A^\mu_{;\mu}=0,\tag{4.1.3}$$

可以导出

$$-A^{\mu\nu}_{;\nu}+R^\mu_\nu A^\nu=0.\tag{4.1.4}$$

实际上

$$F^{\mu\nu}_{;\nu}=g^{\mu\lambda}g^{\nu\rho}F_{\lambda\rho;\nu}=g^{\mu\lambda}g^{\nu\rho}(A_{\lambda;\rho}-A_{\rho;\lambda})_{;\nu}=A^{\mu\nu}_{;\nu}-A^{\nu\mu}_{;\nu}=0.$$

而

$$A^{\nu\mu}_{;\nu}=g^{\mu\lambda}g^{\nu\rho}A_{\rho;\lambda\nu}=g^{\mu\lambda}g^{\nu\rho}(-R^{\alpha\cdots}_{\rho\lambda\nu}A_\alpha+A_{\rho;\nu\lambda})$$
$$=-R^{\alpha\nu\mu}_{\cdots\nu}A_\alpha+A^{\nu\mu}_{;\nu}=-R^{\alpha\nu\mu}_{\cdots\nu}A_\alpha.$$

此即 (4.1.4) 式. 由 (4.1.2) 式可以得到

$$A^\mu_{;\nu}=\left[(a^\mu+\varepsilon b^\mu+\cdots)_{;\nu}+\frac{\mathrm{i}}{\varepsilon}\kappa_\nu(a^\mu+\varepsilon b^\mu+\cdots)\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/\varepsilon},$$
$$-A^{\mu\nu}_{;\nu}+R^\mu_\nu A^\nu=\left[\frac{1}{\varepsilon^2}\kappa^\nu\kappa_\nu(a^\mu+\varepsilon b^\mu+\cdots)\right.$$
$$-2\frac{\mathrm{i}}{\varepsilon}\kappa^\nu(a^\mu+\varepsilon b^\mu+\cdots)_{;\nu}-\frac{\mathrm{i}}{\varepsilon}\kappa^\nu_{;\nu}(a^\mu+\varepsilon b^\mu+\cdots)$$
$$\left.-(a^\mu+\varepsilon b^\mu+\cdots)^\nu_{;\nu}+R^\mu_\nu(a^\nu+\varepsilon b^\nu+\cdots)\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/\varepsilon}=0.$$

合并同阶项, 令其为零, 得到

$$\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right),\quad \kappa^\nu\kappa_\nu a^\mu = 0 \quad \text{或} \quad \kappa_\nu\kappa^\nu = 0,$$

此式表明波矢量为零矢量

$$\left(\frac{1}{\varepsilon}\right),\quad \kappa^\nu\kappa_\nu b^\mu - 2\mathrm{i}\left(\kappa^\nu a^\mu_{;\nu} + \frac{1}{2}\kappa^\nu_{;\nu}a^\mu\right) = 0.$$

于是得到矢量振幅的传播方程

$$a^\mu_{;\nu}\kappa^\nu + \frac{1}{2}\kappa^\nu_{;\nu}a^\mu = 0. \tag{4.1.5}$$

对标量振幅的传播方程而言, 先引入

$$a_\mu = af_\mu,$$

f_μ 是单位极化矢量且 $f_\mu \cdot f^\mu = 1$. 则

$$\begin{aligned} 2a\kappa^\mu a_{;\mu} &= \kappa^\mu a^2_{;\mu} = \kappa^\mu(a_\nu a^\nu)_{;\mu} = \kappa^\mu a_{\nu;\mu}a^\nu + \kappa^\mu a_\nu a^\nu_{;\mu} \\ &= 2\kappa^\mu a^\nu_{;\mu}a_\nu = -\kappa^\mu_{;\mu}a^\nu a_\nu = -a^2\kappa^\mu_{;\mu}, \end{aligned}$$

故得标量振幅的传播方程为

$$\kappa^\mu a_{;\mu} = -\frac{1}{2}a\kappa^\mu_{;\mu}. \tag{4.1.6}$$

我们可以把上式写成一个微分守恒定律

$$\kappa^\mu a^2_{;\mu} + a^2\kappa^\mu_{;\mu} = 0,$$

即

$$(a^2\kappa^\mu)_{;\mu} = 0.$$

取如图 5-13 所示的光束超曲面, 应用高斯定理, 有

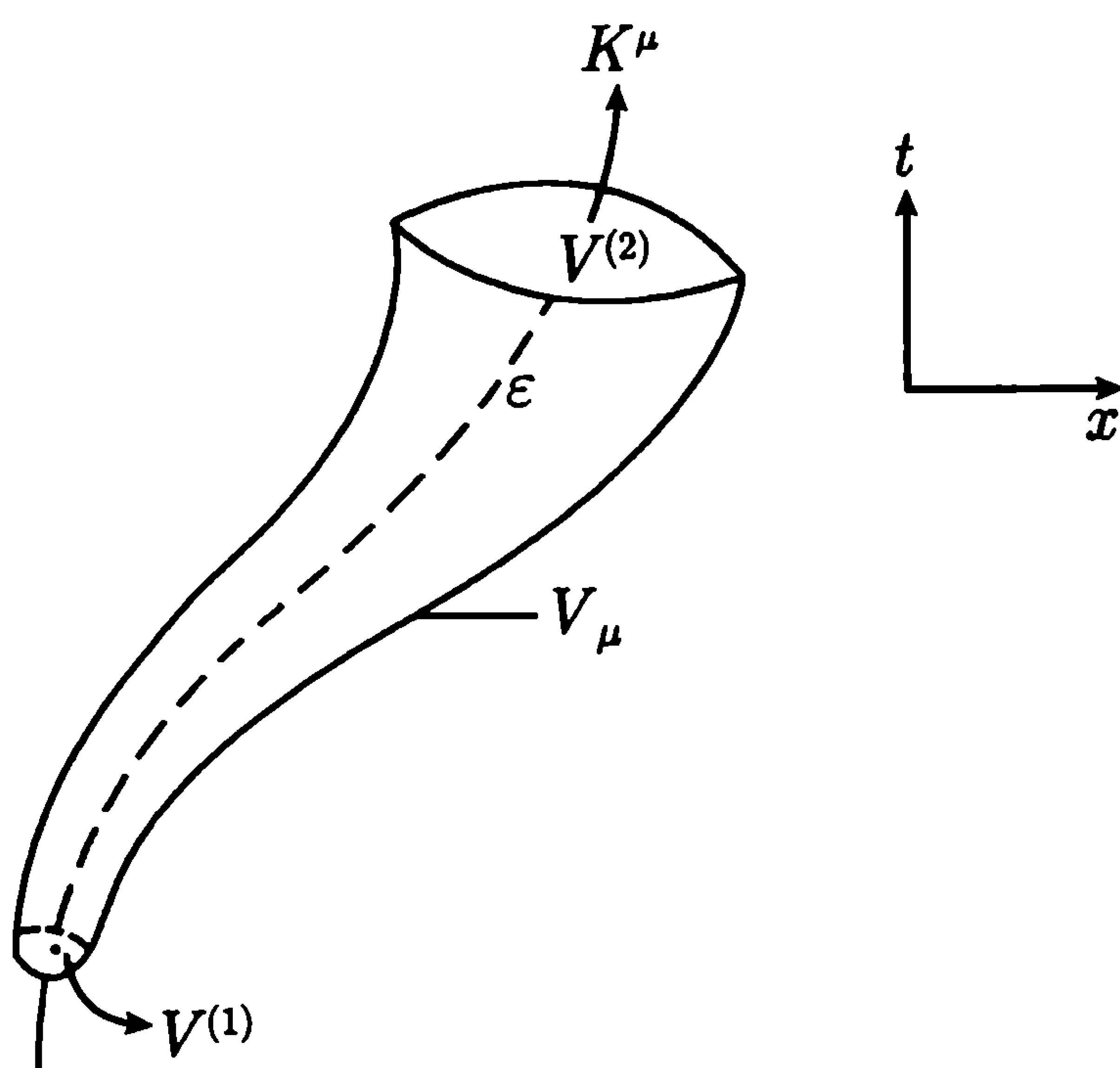


图 5-13

$$\int_\Sigma (a^2\kappa^\mu)_{;\mu}\mathrm{d}\Sigma = \int_V (a^2\kappa^\mu)\mathrm{d}V_\mu$$
$$= -\int_{V(1)} (a^2\kappa^\mu)\mathrm{d}V_\mu + \int_{V(2)} (a^2\kappa^\mu)\mathrm{d}V\mu = 0. \tag{4.1.7}$$

式中 Σ 是四维体积, V 是三维超曲面, 侧面与零短程线平行, 上下截面 (端面) 与零短程线垂直. 由此可以得到积分守恒量

$$\int (a^2\kappa^\mu)\mathrm{d}V_\mu = \text{const.}$$

它在光的传播过程中保持不变, 这自然解释为光通量.

对于一个无穷小光束而言, 设它在 t_0 时刻的截面或等位相面为 σ, 则上述积分守恒量可改写为

$$a^2\sigma = 常数.$$

亦即

$$\frac{\mathrm{d}(a^2\sigma)}{\mathrm{d}\lambda} = (a^2\sigma)_{;\mu}\kappa^\mu = 0,$$

式中 λ 是沿某一零短程线的仿射参量.

利用 (4.1.6) 式即得在光束传播过程中, 光束截面积的变化规律

$$\kappa^\mu\sigma_{;\mu} = \kappa^\mu_{;\mu}\sigma. \tag{4.1.8}$$

最后, 我们由自由电磁场方程和 Einstein 引力场方程来推导一个重要的几何光学定理, 即光线束聚焦定理

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma^{1/2}}{\mathrm{d}\lambda^2} = -\left(\delta^2 + \frac{1}{2}R_{\mu\nu}\kappa^\mu\kappa^\nu\right)\sigma^{1/2}, \tag{4.1.9}$$

式中

$$\delta^2 \equiv \frac{1}{2}\kappa_{\mu;\nu}\kappa^{\nu;\mu} - \frac{1}{4}(\kappa^\mu_{;\mu})^2.$$

实际上我们有

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\sigma^{1/2}}{\mathrm{d}\lambda} &= \kappa^\mu(\sigma^{1/2})_{;\mu} = \kappa^\mu\sigma_{;\mu}\frac{1}{2}\sigma^{-1/2} \\
&= (\kappa^\mu_{;\mu})\sigma\cdot\frac{1}{2}\sigma^{-1/2} = \frac{1}{2}(\kappa^\mu_{;\mu})\sigma^{1/2}, \\
\frac{\mathrm{d}^2\sigma^{1/2}}{\mathrm{d}\lambda^2} &= \frac{1}{2}[(\kappa^\mu_{;\mu})\sigma^{1/2}]_{;\nu}\kappa^\nu \\
&= \frac{1}{2}[(\kappa^\mu_{;\mu})_{;\nu}\kappa^\nu\sigma^{1/2} + \kappa^\mu_{;\mu}(\sigma^{1/2})_{;\nu}\kappa^\nu] \\
&= \frac{1}{2}\left[(\kappa^\mu_{;\mu\nu})\kappa^\nu + \frac{1}{2}(\kappa^\mu_{;\mu})^2\right]\sigma^{1/2} \\
&= \frac{1}{2}\left[(\kappa^\mu_{;\mu\nu})\kappa^\nu - R^\mu_{\alpha\nu\mu}\kappa^\alpha\kappa^\nu + \frac{1}{2}(\kappa^\mu_{;\mu})^2\right]\sigma^{1/2}.
\end{aligned}$$

又由 $\kappa^{\mu}_{;\nu}\kappa^{\nu}=0$ 得

$$(\kappa^{\mu}_{;\nu}\kappa^{\nu})_{;\mu}=0=\kappa^{\mu}_{;\nu\mu}\kappa^{\nu}+\kappa^{\mu}_{;\nu}\kappa^{\nu}_{;\mu},$$

或

$$\kappa^{\mu}_{;\nu\mu}\kappa^{\nu}=-\kappa^{\mu}_{;\nu}\kappa^{\nu}_{;\mu},$$

以之代入上式即得 (4.1.9) 式. 现引入能量正定条件

$$T_{00}\geqslant 0.$$

在 (4.1.9) 式中 $\delta^2=\dfrac{1}{2}\kappa_{\mu;\nu}\kappa^{\nu;\mu}-\dfrac{1}{4}(\kappa^{\mu}_{;\mu})^2$ 是一个广义协变标量, 引入局部惯性系后, 可令 $\kappa_{\mu}=(\kappa_0,\kappa_3)$, $\kappa^{\mu}=(\kappa_0,-\kappa_3)$,

$$\delta^2=\frac{1}{4}(\kappa_{0,0}-\kappa_{0,3})^2\geqslant 0,$$

而

$$\begin{aligned}R_{\mu\nu}\kappa^{\mu}\kappa^{\nu}&=\left(\frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}+\kappa T_{\mu\nu}\right)\kappa^{\mu}\kappa^{\nu}\\&=\frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}\kappa^{\mu}\kappa^{\nu}+\kappa T_{\mu\nu}\kappa^{\mu}\kappa^{\nu}=\kappa T_{\mu\nu}\kappa^{\mu}\kappa^{\nu}.\end{aligned}$$

上述不变量在局部随动惯性系中, $T_{03}=T_{30}=0$.

$$\kappa T_{\mu\nu}\kappa^{\mu}\kappa^{\nu}=\kappa(T_{00}\kappa_0\kappa_0+T_{33}\kappa_3\kappa_3)=\kappa(T_{00}+T_{33})\kappa_0^2.$$

考虑到 $T_{00}=\rho c^2$ 是能量密度, T_{33} 是压强 p, 已知的物态均满足 $\rho c^2\gg p$, 故仅需 T_{00} 或能密度非负, 即有

$$R_{\mu\nu}\kappa^{\mu}\kappa^{\nu}\geqslant 0(\text{所谓零会聚条件}).$$

这就最后证明了

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma^{1/2}}{\mathrm{d}\lambda^2}\leqslant 0. \tag{4.1.10}$$

即光束截面增长率 $\dfrac{\mathrm{d}\sigma^{1/2}}{\mathrm{d}\lambda}$ 沿光束传播方向永不增加.

下面我们证明霍金的**面积不减定理**: 若宇宙监督原理成立, 能量正定条件成立, 则沿着时间方向, 所有黑洞的总面积永不减少.

实际上, 可以把视界上的母线分成无限多个无穷小线束, 对于任一线束有 (4.1.10) 式, 即

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma^{1/2}}{\mathrm{d}\lambda^2}\leqslant 0\quad\text{或}\quad\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left(\frac{\mathrm{d}\sigma^{1/2}}{\mathrm{d}\lambda}\right)\leqslant 0.$$

设当 $\lambda=\lambda_0$ 时, $\left.\dfrac{\mathrm{d}\sigma^{1/2}}{\mathrm{d}\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_0}<0$, 在此点 $\sigma^{1/2}(\lambda)$ 曲线单调下降, 则当 $\lambda_1>\lambda_0$ 时, 应有

$$\left.\frac{\mathrm{d}\sigma^{1/2}}{\mathrm{d}\lambda}\right|_{\lambda_1>\lambda_0}\leqslant\left.\frac{\mathrm{d}\sigma^{1/2}}{\mathrm{d}\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_0}$$

所以在 λ_1 点, 曲线仍然单调下降. 又因为

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma^{1/2}}{\mathrm{d}\lambda^2}\leqslant 0,$$

所以曲线还是凸的, 肯定要与 λ 轴相交. 这就是说, 经过有限长时间 [对应于 $(\lambda-\lambda_0)$], 使得 $\sigma^{1/2}=0$, 在视界上同一线束中的诸多条母线互相交叉, 这违背 Penrose 定理. 因此, 要么是由于我们的假设 $\dfrac{\mathrm{d}\sigma^{1/2}}{\mathrm{d}\lambda}<0$ 不合理; 要么线束中的母线在交叉之前已落入奇点, 这导致奇点裸露, 不符合宇宙监督原理. 既然前提是遵守宇宙监督原理和 Penrose 定理的, 就只能是 $\dfrac{\mathrm{d}\sigma^{1/2}}{\mathrm{d}\lambda}\geqslant 0$. 即任一母线束的截面积在顺时针方向不减少, 故整个视界面积 (线束截面面积之和) 永不减少, 于是证明了黑洞视界面积不减定理.

4.2　经典黑洞的温度和熵

考虑一个由热源、冷源和工作物质组成的热机 (Geroch 引力热机), 如图 5-14 所示.

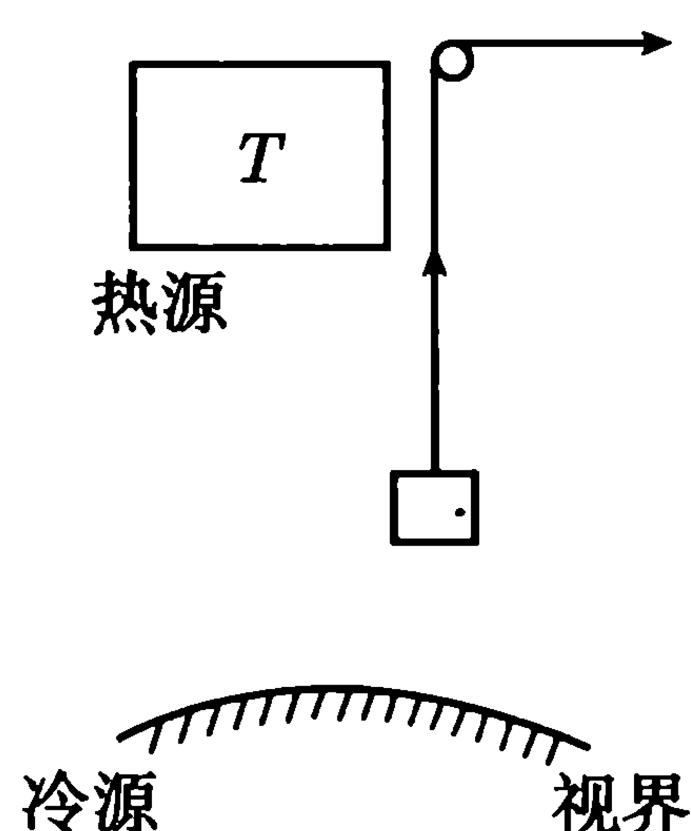


图 5-14

冷源: 克尔–纽曼黑洞.

热源: 距黑洞无限远处一个含有 (温度为 T 的) 黑体辐射的大热库.

工作物质: 盒子和缆绳.

循环过程: 盒子由热源处装满热辐射, 缓慢地移到黑洞视界附近, 这一过程系统 (引力) 对外做功 A_1; 打开盒子, 将质量为 $\delta\mu$ 的辐射注入黑洞; 盒子关上, 缓慢地升至热库处, 这一过程外界对系统做功 A_2.

在一个循环过程中, 系统对外界做功 (A_1-A_2). 从热源吸出热量 $Q=\delta\mu$. 此热机的效率为

$$\eta=\frac{A_1-A_2}{Q}=\frac{A_1-A_2}{\delta\mu}. \tag{4.2.1}$$

设盒子 (静止的) 中心与黑洞视界的固有距离为 d, 我们下面将证明, 这时盒子和黑洞的结合能为

$$B = \mu(1 - \kappa d). \tag{4.2.2}$$

式中 μ 为盒子在渐近平直空间的质量, κ 是黑洞表面的引力加速度, d 远小于黑洞半径. 我们有

$$\begin{aligned} A_1 &= B = \mu(1 - \kappa d), \\ A_2 &= (\mu - \delta\mu)(1 - \kappa d), \\ A_1 - A_2 &= \delta\mu(1 - \kappa d), \end{aligned}$$

于是 (4.2.1) 给出效率

$$\eta = 1 - \kappa d. \tag{4.2.3}$$

下面证明式 (4.2.2).

有电磁场存在时, 质点的哈密顿主函数

$$S = \int L \mathrm{d}\tau$$

满足哈密顿–雅可比方程

$$g^{\mu\nu}\left(\frac{\partial S}{\partial x^\mu} - eA_\mu\right)\left(\frac{\partial S}{\partial x^\nu} - eA_\nu\right) + \mu^2 = 0. \tag{4.2.4}$$

式中 e 和 μ 分别为荷电质点的电荷和静质量, A_μ 为电磁 4 矢, τ 为固有时. L 可写为

$$L = \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\partial S}{\partial x^\mu}\dot{x}^\mu. \tag{4.2.5}$$

于是广义动量可写为

$$P_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = \frac{\partial S}{\partial x^\mu}. \tag{4.2.6}$$

克尔–纽曼时空有两个 Killing 矢量: $\frac{\partial}{\partial t}$ 和 $\frac{\partial}{\partial \varphi}$. 广义动量的 4 个分量可表示为

$$\begin{aligned} P_r &= \frac{\partial S}{\partial r} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}R(r), \\ P_\theta &= \frac{\partial S}{\partial \theta} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}H(\theta), \\ P_\varphi &= \frac{\partial S}{\partial \varphi} = m, \\ P_t &= \frac{\partial S}{\partial t} = -\omega, \end{aligned} \tag{4.2.7}$$

式中 $R(r)$ 和 $H(\theta)$ 分别表示分离变量后的径向函数和横向函数, m 为磁量子数, ω 为质点能量. 分离变量后, 径向方程和横向方程具有形式

$$\varDelta\left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)^2-\frac{1}{\varDelta}[-\omega(r^2+a^2)+Ma+Qer]^2+\mu^2r^2=-K, \tag{4.2.8}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\theta}\right)^2+\left(\frac{M}{\sin\theta}-a\omega\sin\theta\right)^2+\mu^2a^2\cos^2\theta=K. \tag{4.2.9}$$

式中 M, Q 和 a 分别为黑洞的质量, 电荷和比角动量, K 为分离变量常数.

$$\varDelta=(r-r_+)(r-r_-)=r^2+a^2+Q^2-2Mr, \tag{4.2.10}$$

$$r_\pm=M\pm\sqrt{M^2-a^2-Q^2}. \tag{4.2.11}$$

把 (4.2.7) 代入 (4.2.8), 得到

$$[\omega(r^2+a^2)-(aP_\varphi+Qer)]^2=(P_r\varDelta)^2+(\mu^2r^2+K)\varDelta. \tag{4.2.12}$$

解此方程, 得到

$$\omega=(\varOmega P_\varphi+eV_0)\pm\frac{1}{r^2+a^2}[(P_r\varDelta)^2+(\mu^2r^2+K)\varDelta]^{1/2}. \tag{4.2.13}$$

式中

$$\varOmega=\frac{a}{r^2+a^2},\quad V_0=\frac{Qr}{r^2+a^2}. \tag{4.2.14}$$

对于无限远处的观测者, 相对克尔–纽曼黑洞视界面静止的质点满足

$$\begin{aligned}&r=\text{const},\quad \theta=\text{const},\quad \dot{\varphi}=-\frac{g_{03}}{g_{33}},\\&P_r=P_\theta=0,\\&P_\varphi=\mu U_3=\mu g_{3\alpha}U^\alpha=\mu\left(g_{03}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}+g_{33}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau}\right)=0.\end{aligned} \tag{4.2.15}$$

由此可知

$$m=0, \tag{4.2.16}$$

即在拖曳系中观测, 质点不转动. 考虑不带电质点的正能态, (4.2.13) 可简化为

$$\omega=\frac{1}{r^2+a^2}[(\mu^2r^2+K)\varDelta]^{1/2}. \tag{4.2.17}$$

设 δ 很小, 且有

$$r=r_++\delta, \tag{4.2.18}$$

则

$$r^2+a^2\approx(r_+^2+a^2)\left(1+\frac{2r_+\delta}{r_+^2+a^2}\right),$$

$$\mu^2 r^2 + K \approx (\mu^2 r^2 + K)\left(1 + \frac{2r_+\delta\mu^2}{\mu^2 r_+^2 + K}\right),$$
$$\Delta \approx 2\delta(r_+ - M). \tag{4.2.19}$$

将上式代入 (4.2.17), 略去高阶小量, 得到

$$\omega \approx \frac{(\mu^2 r_+^2 + K)^{1/2}}{r_+^2 + a^2}[2\delta(r_+ - M)]^{1/2}. \tag{4.2.20}$$

式中 δ 为坐标距离, 应该用固有距离表之. 固有距离 (纯空间距离) 具有形式

$$\mathrm{d}l^2 = \gamma_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j = g_{11}\mathrm{d}r^2 + \left(g_{33} - \frac{g_{03}^2}{g_{00}}\right)\mathrm{d}\varphi^2. \tag{4.2.21}$$

将克尔-纽曼度规代入上式, 并注意 $\Delta \sim \delta \to 0$, 得到

$$\mathrm{d}l \approx \frac{\rho}{\Delta^{1/2}}\mathrm{d}r. \tag{4.2.22}$$

与 δ 对应的固有距离是

$$d = \int_{r_+}^{r_+ + \delta}\frac{\rho}{\Delta^{1/2}}\mathrm{d}r \approx \left[\frac{r_+^2 + a^2\cos^2\theta}{r_+ - r_-}\right]^{1/2}\int_{r+}^{r_+ + \delta}(r - r_+)\mathrm{d}r. \tag{4.2.23}$$

注意我们用了 δ 很小这一近似条件, 下面不再写近似于的符号,

$$d = 2\delta^{1/2}\left[\frac{r_+^2 - a^2\cos^2\theta}{r_+ - r_-}\right]^{1/2}, \tag{4.2.24}$$

$$\delta = \frac{d^2(r_+ - r_-)}{4(r_+^2 + a^2\cos^2\theta)}. \tag{4.2.25}$$

代入 (4.2.20), 得到

$$\omega = \kappa d\left[\frac{\mu^2 r_+^2 + K}{r_+^2 + a^2\cos^2\theta}\right]^{1/2}, \tag{4.2.26}$$

式中

$$\kappa = \frac{r_+ - r_-}{2(r_+^2 + a^2)} \tag{4.2.27}$$

为视界表面的引力加速度.

由 (4.2.15), (4.2.16) 和 (4.2.9) 可得

$$K = \omega^2 a^2 \sin^2\theta + \mu^2 a^2 \cos^2\theta, \tag{4.2.28}$$

代入 (4.2.26), 得到

$$\omega = \mathrm{d}\kappa\left[\mu^2 + \frac{\omega^2 a^2 \sin^2\theta}{r_+^2 + a^2\cos^2\theta}\right]^{1/2}. \tag{4.2.29}$$

由 (4.2.26) 知 ω 和 d 是同阶小量, 故右端括号中第二项与第一项比较可略去, 于是有

$$\omega = \mu\kappa d. \tag{4.2.30}$$

此即视界面附近一质点具有的引力势能 (无限远处观测). 此质点若静止于无限远处, 其能量为 μ, 因此, 当此质点静止于视界面附近时, 其引力结合能为

$$B = \mu - \omega = \mu(1 - \kappa d).$$

此即式 (4.2.2).

下面我们继续讨论 Geroch 引力热机的效率 (4.2.3). 当 $d \to 0$, 则 $\eta \to 1$ Ceroch(1971) 由此指出第二类永动机的可能性. 但是 Bekenstein(1973) 指出, 量子力学原理不允许 $b = 0$, 给出了盒子大小的下限, 因此效率仍然小于 1.

假设盒子是边长为 l 的正方体, 盒内充满温度为 T 的热辐射. 显然热辐射的最大波长为

$$\lambda_{\max} = l,$$

或

$$\nu_{\min} = c/l.$$

根据维恩位移定律

$$\nu_m^w = 2.822kT/h,$$

式中 k 为波尔兹曼常数. 我们有

$$\nu_{\min} < \nu_m^w,$$

即

$$\frac{1}{2} > \frac{\beta}{T}, \quad \beta = \frac{2\pi\hbar c}{2 \times 2.822k} \approx \frac{\hbar c}{k}.$$

于是有

$$d > \frac{l}{2} > \frac{\beta}{T}.$$

代入 (4.2.3), 得到

$$\eta < 1 - \frac{\beta\kappa}{T}. \tag{4.2.31}$$

另一方面, 由卡诺定理知道

$$\eta < 1 - \frac{T_B}{T}. \tag{4.2.32}$$

式中 T_B 为黑洞 (冷源) 的温度. 人们发现, 式 (4.2.31) 和 (4.2.32) 惊人地相似, 黑洞具有温度

$$T_B = \beta\kappa, \tag{4.2.33}$$

$$T_B = \beta\kappa/c^2 = \hbar\kappa/ck \quad (\text{CGS 单位}). \tag{4.2.34}$$

此式表明, 黑洞的热力学量和它的引力参量有着密切的联系. 由于式中还含有普朗克常数, 此式表明黑洞温度还具有量子论方面的性质.

由上面的讨论可知, 式 (4.2.34) 适用于克尔黑洞和克尔–纽曼黑洞. 对于 Schwarzschild 黑洞这一特殊情况, 我们有

$$\kappa = \frac{c^4}{4GM}, \quad \beta = \frac{\hbar c}{k},$$
$$T_B = \frac{\hbar c^3}{4GMk} \sim 10^{-7}\frac{M_\odot}{M}. \tag{4.2.35}$$

此式表明 Schwarzschild 黑洞的温度由其引力质量唯一确定. 质量越大的黑洞, 温度越低. 当 $M \sim M_\odot$, 则 $T_B \sim 10^{-7}$K. 可见质量大的黑洞温度接近绝对零度. 而当 $M \sim 10^{15}g$, $T_B \sim 10^{12}$K. 可见原初小黑洞的温度极高, 约为太阳中心温度 ($\sim 10^7$K) 的 10 万倍.

黑洞具有非零温度, 按热力学第二定律, 黑洞应该有辐射, 即黑洞不是黑的, 这与经典黑洞理论矛盾. 要解决这一矛盾, 必须突破经典 (非量子) 的概念. 1974 年, 霍金论证了黑洞的量子辐射, 从而解决了这一矛盾. 我们将在第 6 章中专门讨论黑洞的量子辐射.

现在我们继续讨论建立在黑洞温度概念基础上的黑洞热力学问题.

在热力学中, 可以证明, 对于一个转动物体有

$$\delta M = T\delta S + \Omega\delta J. \tag{4.2.36}$$

考虑到 (4.2.33), 式 (3.3.2) 可写为

$$\delta M = T\delta\left(\frac{A}{8\pi\beta}\right) + \Omega\delta J. \tag{4.2.37}$$

比较上二式, 可认为黑洞作为一热力学系统, 具有熵

$$S_B = \frac{A}{8\pi\beta}. \tag{4.2.38}$$

黑洞的熵与其表面积成正比, 即与其引力半径的平方或质量平方成正比. 因此, 一颗恒星的质量为 M, 熵为 S_M, 则坍缩成黑洞后, 其熵与原来的熵之比为

$$\frac{S_B}{S_M} = \alpha M. \tag{4.2.39}$$

对于太阳, $S_\odot \approx 10^{42}\text{erg}\cdot\text{K}^{-1}$, 当 $M_B = M_\odot$ 时, 有 $S_B \approx 10^{60}\text{erg}\cdot\text{K}^{-1}$, 所以

$$\frac{S_B}{S_\odot} = \alpha M_\odot = 10^{18},$$

从而有

$$\alpha = \frac{10^{18}}{M_\odot}.$$

(4.2.39) 具体化为

$$\frac{S_B}{S_M} = 10^{18}\frac{M}{M_\odot}. \tag{4.2.40}$$

可见恒星坍缩为黑洞的过程中熵增加, 信息量减少.

Bekenstein 曾指出, 在上式中令

$$\frac{S_B}{S_M} = 1,$$

得到

$$M_{\min}^B = 10^{15}\text{g}, \quad r_{\min} \approx 10^{-13}\text{cm}. \tag{4.2.41}$$

这是可以坍缩为黑洞的恒星质量下限, 就是原初小黑洞的质量下限. 这类最小的原初小黑洞所含核子数为 10^{39}, 恰等于静电与引力的比值, 它的寿命恰等于宇宙的年龄. 这些看似巧合的事情究竟反映了自然界的什么内在规律至今尚不清楚.

4.3　黑洞热力学的基本定律

前面的讨论可以总结为黑洞热力学的四条基本定律.

1. **热力学第零定律**

黑洞可以定义温度. 由于稳态黑洞的表面引力加速度在视界面上是恒定的, 因此可以按 (4.2.33) 定义温度.

2. **热力学第一定律**

$$\delta M = T\delta S + \Omega\delta J + V\delta Q.$$

式中

$$T = \beta\kappa, \quad S = \frac{A}{8\pi\beta}, \quad V = \frac{r+Q}{r_+^2 + a^2}.$$

3. **热力学第二定律**

$$\delta(S_B + S_m) \geqslant 0,$$

式中 S_m 为黑洞周围物质的熵. 即含黑洞的系统的总熵沿顺时针方向永不减少.

4. **热力学第三定律**

不可能通过任何有限步骤把黑洞的表面引力加速度 κ 降到零.

下一章将讨论黑洞热力学的量子修正, 假定读者已经熟悉热力学中各个量和各个方程, 熟悉量子统计和量子场论的知识.

第 5 章　黑洞热力学的量子理论

5.1　离壳与即壳

按照黑洞物理中的热力学类比, 爱因斯坦引力理论中的黑洞熵 (4.2.38) 可写为

$$S^{\mathrm{BH}} = \frac{A^{\mathrm{H}}}{4l_p^2}, \tag{5.1.1}$$

式中 A^{H} 是黑洞视界面积, $l_p = (\hbar G/c^3)^{1/2}$ 是普朗克长度. 在黑洞物理中, Bekenstein-Hawking 熵 S^{BH} 的基本地位与普通热力学中的相同. 它可以由含黑洞系统的自由能对系统温度的偏导数决定. 在欧氏方案中, 自由能直接与真空爱因斯坦方程的规则欧氏解 (Gibbons-Hawking 瞬子) 的欧氏作用量相联系. 按照热力学第一定律, 黑洞的热力学熵定义为

$$\mathrm{d}F = -S^{\mathrm{TD}}\mathrm{d}T. \tag{5.1.2}$$

式中 T 为系统温度, 自由能既含经典 (主级) 贡献, 又含量子 (单圈) 修正. 因此, 热力学熵除了含经典 (主级) 部分 S^{BH} 以外, 还应含有量子修正 S_1^{TD}

$$S^{\mathrm{TD}} = S^{\mathrm{BH}} + S_1^{\mathrm{TD}}. \tag{5.1.3}$$

为了得到 S^{TD}, 须比较两个平衡位形, 为此, 通常确定 S^{TD} 的计算都以规则 G-H 瞬子作为背景度规. 这种计算方法称为即壳 (on shell) 方法.

黑洞热力学的基本问题是其统计力学基础. 这个问题包括三部分: ①定义黑洞的内在自由度; ②计算统计力学熵 $S^{\mathrm{SM}} = -\mathrm{tr}(\hat{\rho}^{\mathrm{H}}\ln\hat{\rho}^{\mathrm{H}})$, 密度矩阵 $\hat{\rho}^{\mathrm{H}}$ 描述动力学自由度; ③建立 S^{SM} 和 S^{TD} 之间的关系.

为避免歧义, 我们使用了“统计力学熵”, 以强调 S^{SM} 是按统计力学规则计算得到的. 至于密度矩阵 $\hat{\rho}$, 其形式和性质依赖于具体模型, 本章我们考虑一类模型, 黑洞的内部自由度就是其量子激发, 这种想法最近有不少文献采用. 这类模型的共同特点是所考虑的 $\hat{\rho}$ 是热的, 有大量文章就各种黑洞模型计算了统计力学熵. 我们下面力图阐明这些计算结果和可观测的热力学黑洞熵 S^{TD} 之间的关系.

应该指出, 对于黑洞, S^{TD} 和 S^{SM} 之间的关系并不简单. 通常的热力学系统, $S^{\mathrm{TD}} = S^{\mathrm{SM}}$. 而黑洞具有与其他热力学系统不同的性质. 在热平衡态下, 黑洞质量 M 是温度 T 的普适函数. 但是质量唯一决定黑洞几何, 从而决定了描述其量子激发的哈密顿的内禀参数. 这个性质带来两个后果: ① S^{TD} 与 S^{SM} 对黑洞来说是不相同的; ②计算 S^{SM} 并与 S^{TD} 比较要用离壳 (off shell) 方法. 这就是必须把温度 T

和黑洞质量 M 看成独立参数. 这导致当 $T \neq T_{\rm BH} \equiv (8\pi M)^{-1}$ 时, 不存在规则真空欧氏解. 这样, 只能考虑非真空引力场方程解的背景度规, 或者去掉视界附近的时空, 使解不完整, 二者必居其一. 在这两种情况下, 自由能的计算都会遇到问题, 甚至其结果会依赖于具体离壳方法的选择.

下面我们将给出黑洞熵不同定义之间的关系. 我们还将讨论并比较各种离壳方法 (砖墙, 顶角奇异性, 钝锥, 体积截断), 以及它们与即壳方法之间的联系. 我们就一个简化了的 2 维模型说明这些联系. 这是因为在这简化模型中所有计算都能精确进行. 可以明显给出热力学熵与统计学熵不同, 我们可以找到单圈修正的 $S^{\rm TD}$ 和 $S^{\rm SM}$ 之间的关系. 其中一主要结果是, 在所考虑的二维模型中, 量子场对热力学熵的单圈贡献 $S_1^{\rm TD}$ 可写成

$$S_1^{\rm TD} = S^{\rm SM} - S_{\rm Rin}^{\rm SM} + \Delta S. \tag{5.1.4}$$

式中 $S_{\rm Rin}^{\rm SM}$ 是在 Rindler 空间所计算的统计力学熵, ΔS 是一附加的有限修正, 来源于量子效应引起的视界改变. 用砖墙和体积截断方法所计算的熵直接和 $S^{\rm SM}$ 相关, 它正比于 $\ln\epsilon$, 在二维情况下是发散的, 其中 ϵ 是离视界的距离. 另外, 用顶角奇异性和钝锥方法计算的熵与 $(S^{\rm SM} - S_{\rm Rin}^{\rm SM})$ 相符. 因为 $S^{\rm SM}$ 中的对数发散项恰好与 Rindler 熵中的发散项抵消, 所以它是有限的.

如所知, 决定自由能的单圈有效作用量含局域紫外发散. 为了得到定义很好的有限量, 须重整化. 通常假设裸经典作用量所包含的局域结构与单圈计算中出现的相同. 在重整化过程中, 通过对经典作用量中耦合常数的重新定义, 可以去掉局域单圈发散性. 在我们的讨论中, 假设此重整化一开始就已完成, 我们把重整化的可观测量当作即壳解的参数, 这时, 重整化的单圈有效作用量是有限的. 影响此解的量子修正可视为对大质量 (远大于普朗克质量) 黑洞的微扰, 我们发现, 用可观测参数表示的所有黑洞热力学特征量都是有限的, 且其定义不需要普朗克尺度的物理知识. 下面我们首先重温欧氏方案的主要特征, 并给出我们要讨论的熵的一般定义, 然后讨论二维模型和即壳、离壳方案.

5.2 欧氏方案和热力学熵

用欧氏方案解决黑洞热力学问题的出发点是配分函数 $Z(\beta)$ 和有效作用量 $W(\beta)$. 一个有黑洞存在的系统, 其自由能由路径积分定义

$$\mathrm{e}^{-w(\beta)} = Z(\beta) = \int [\mathrm{D}\phi]\mathrm{e}^{-I[\phi]}, \tag{5.2.1}$$

式中 $I[\phi]$ 是欧氏经典作用量, 而所有的物理量 ϕ, 包括引力场 $g_{\mu\nu}$, 在欧氏时间 τ 上都假定为周期性的或反周期性的 (依赖于统计), 周期为 β_∞. (5.2.1) 中的度规是渐

近平直的, 参数 β_∞ 的倒数是空间无穷远处测得的温度. 假定积分测度 $[D\phi]$ 是协变测度.

计算 W 的标准方法是用半经典近似. 若 ϕ_0 是 $I[\phi]$ 的稳态点, 即若

$$\left.\frac{\delta I}{\delta \phi}\right|_{\phi=\phi_0}=0, \tag{5.2.2}$$

则有分解式

$$I[\phi_0+\widetilde{\phi}]=I[\phi_0]+I_2[\widetilde{\phi}]+\cdots, \tag{5.2.3}$$

式中 I_2 是线性化作用量中对涨落 $\widetilde{\phi}$ 为二阶的部分, 而省略号代表 $\widetilde{\phi}$ 的高阶项. 由此可得

$$Z(\beta)=\mathrm{e}^{-I[\phi_0]}\int[\mathrm{D}\widetilde{\phi}]\mathrm{e}^{-I_2[\widetilde{\phi}]}\equiv \mathrm{e}^{-I[\phi_0]}Z_1(\beta). \tag{5.2.4}$$

式中对 $\widetilde{\phi}$ 的高斯积分可用相应的波算符 D_j 的行列式表示

$$Z_1(\beta)\equiv Z_1[\phi_0(\beta)]=\prod_j\{\det[-\mu^2D_j(\phi_0)]\}^{\pm 1/2}. \tag{5.2.5}$$

算符 D_j 由作用量的二阶部分 $I_2=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int \mathrm{d}x\sqrt{g}\widetilde{\phi}D_j\widetilde{\phi}$ 决定, 其显式依赖于自旋 j. 例如, 对于 d 维空间中共形不变的无质量标量场, $D_0=\Delta-(d-2)[4(d-1)]^{-1}R$. 式中 $\Delta=\nabla_\mu\nabla^\mu$ 是拉普拉斯算符, R 是标曲率. 常数 μ^2 是一任意的重整化参数, 量纲为长度, 且不依赖于场位形 ϕ. 由 (5.2.5) 可以写出单圈近似下的有效作用量

$$W(\beta)=I[\phi_0(\beta)]-\ln Z_1(\beta)\equiv I[\phi_0(\beta)]+W_1[\phi_0(\beta)]. \tag{5.2.6}$$

单圈贡献 $W_1[\phi_0]$ 是紫外发散的, 且像通常一样, 经典作用量这样选择, 使得只要重新定义 I 中的耦合常数, 就能去掉 W_1 中相应的局域发散性. 现在, 我们假定这些程序已经完成, 且经典作用量是用重整化参数写出来的, ϕ_0 为其极值点. W_1 是重整化的单圈作用量. (5.2.5) 中参数 μ 选择的任意性对应于重整化后作用量可附加一有限部分.

为了把这个一般方案运用于黑洞情况, 我们假设黑洞不旋转, 不荷电, 且不存在对称性破缺, 使得所有场的平均值除引力场外均为零. 而且, 为了给出引力场 (真空) 方程的渐近平直解, 取重整化宇宙常数为零. 其解代表一个 Gibbons-Howking 瞬子, 它在欧氏视界处规则. 在爱因斯坦理论中, 此瞬子由 Schwarzschild 度规描述, 且只依赖于一个常数, 即黑洞质量 m, 这一度规在视界处规则的具体含意是 $\beta_\infty=\beta_H=8\pi m$.

当考虑量子修正时, 须记住, 对给定边界条件 (τ 上的周期性) 的系统, 黑洞与周围的热辐射处于平衡状态, 而此辐射也将对可观测的热力学量有贡献. 对于无限

大尺度的热浴 (heat bath), 此贡献是无限大, 而且黑洞与无限大热浴的平衡是不稳定的. 因此, 必须从一开始就考虑由一有限尺度的边界面 B 包围的黑洞. 我们假定此面不能被场穿透. 这一点可以由相应的边界条件保证. 为简单起见, 设 B 是球面, 半径为 r_B, 黑洞位于球心处. 对于史瓦希黑洞, 若 $r_B < 3m$, 则热稳定性便得到保证. 最后, 在这一问题的描述中, 参数 β 是在 B 上测得的温度的倒数. 另外, 我们假定所有必要的要求都已达到, 不再重复讨论.

(5.2.6) 中的重整化有效作用量 W 是由一个特殊的经典解计算得到的. 它本身由泛函定义

$$W[\phi] = I[\phi] + W_1[\phi], \tag{5.2.7}$$

其中场 ϕ 任意, 边界条件已选定. 极值点

$$\left.\frac{\delta W}{\delta \phi}\right|_{\phi=\overline{\phi}} = 0 \tag{5.2.8}$$

描述一修正的场位形; 与经典解之差为量子修正: $\overline{\phi} = \phi_0 + \hbar\phi_1$. 须强调的是, 如果对单圈效应感兴趣, ϕ_0 和 $\overline{\phi}$ 的 W 值之差将是普朗克常量 $\hbar$ 的二阶项

$$W(\beta) = W[\phi_0(\beta)] = W[\overline{\phi}(\beta)] + o(\hbar^2). \tag{5.2.9}$$

这可由 (5.2.8) 式得出, 只要量子修正解和经典解满足同样的边界条件.

r_B 固定, 自由能 $F(\beta) = \beta^{-1}W(\beta)$ 对温度倒数 β 的变化便可确定黑洞的热力学熵

$$S^{\mathrm{TD}}(\beta) = \beta^2 \frac{\mathrm{d}F(\beta)}{\mathrm{d}\beta} = \left(\beta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\beta} - 1\right) W(\beta). \tag{5.2.10}$$

我们记得, 重整化有效作用量 $W(\beta)$ 是即壳计算的, 即 $\beta_\infty = 8\pi m$. 热力学熵可写为

$$S^{\mathrm{TD}} = S_0^{\mathrm{TD}} + S_1^{\mathrm{TD}}. \tag{5.2.11}$$

可以证明

$$S_0^{\mathrm{TD}} = \left(\beta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\beta} - 1\right) I[\phi_0(\beta)] \tag{5.2.12}$$

就是 (5.1.1) 给出的 B-H 熵 S^{BH}, 而

$$S_1^{\mathrm{TD}}(\beta) = \left(\beta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\beta} - 1\right) W_1[\phi_0(\beta)] \tag{5.2.13}$$

表示量子修正. 此修正也含黑洞外热辐射的熵. 由构成来看, 热力学熵 S^{TD} 定义得很好且有限. 所有的计算都是即壳的, 即在一引力场方程的规则完整欧氏解上做出的. 此解的参数仅由重整化耦合常数表示.

5.3 模型描述：即壳结果

在四维情况下, S_1^{TD} 的计算相当复杂, 为了讨论 S_1^{TD} 的性质及其与 S^{SM} 的联系, 我们考虑一个能够精确计算的简化二维模型. 虽然这些量的二维和四维显式不同, 但研究二维模型可以对四维情况做出一些确定的结论. 为保留与四维情况最大限度的相似性, 我们考虑二维 dilaton 引力. 其作用量为

$$I = -\frac{1}{4}\int_{M^2}[r^2R + 2(\nabla r)^2 + 2]\sqrt{\gamma}\mathrm{d}^2x \\ -\frac{1}{2}\int_{\partial M^2} r^2(k-k_0)\mathrm{d}y + \frac{1}{2}\int\sqrt{\gamma}\varphi_{,\mu}\varphi^{,\mu}\mathrm{d}x. \tag{5.3.1}$$

二维度规 γ, dilaton 场 r 和标量场 φ 是这一问题的动力学变量. R 为 γ 的曲率, k 为 ∂M^2 的外曲率. 若标量场 φ 不存在, 此作用量可由四维欧氏爱因斯坦作用量

$$I^{(4)} = -\frac{1}{16\pi}\int_{M^4} R^{(4)}\sqrt{g}\mathrm{d}^4x - \frac{1}{8\pi}\int_{\partial M^4}(K^{(4)} - K_0^{(4)})\sqrt{h}\mathrm{d}^3x \tag{5.3.2}$$

通过球对称度规

$$\mathrm{d}s^2 = \gamma_{ab}\mathrm{d}x^a\mathrm{d}x^b + r^2\mathrm{d}\omega^2 \tag{5.3.3}$$

退化得到. 这里 γ_{ab} 是二维度规, r 是二维流形上的标函数, $\mathrm{d}\omega^2$ 是单位球上的线元, $K_0^{(4)}$ 是标准删除项, 且 $k_0 = K_0^{(4)}$.

由于二维作用量与四维作用量是退化相关的, 场对 (γ_0, φ_0) 显然是泛函数 I 的极值点, 其中 $\varphi_0 = 0; \gamma_0$ 是二维 Schwarzschild 度规

$$\mathrm{d}s^2 = f\mathrm{d}\tau^2 + f^{-1}\mathrm{d}r^2, \quad f = 1 - r_+/r. \tag{5.3.4}$$

$r = r_+$ 处的规则化条件要求 τ 是周期性的, 且周期为 $\beta_H = 4\pi r_+$. 具有度规 (5.3.4) 的 G-H 瞬子, 即规则完整欧氏流形, 如图 5-15(a) 所示.

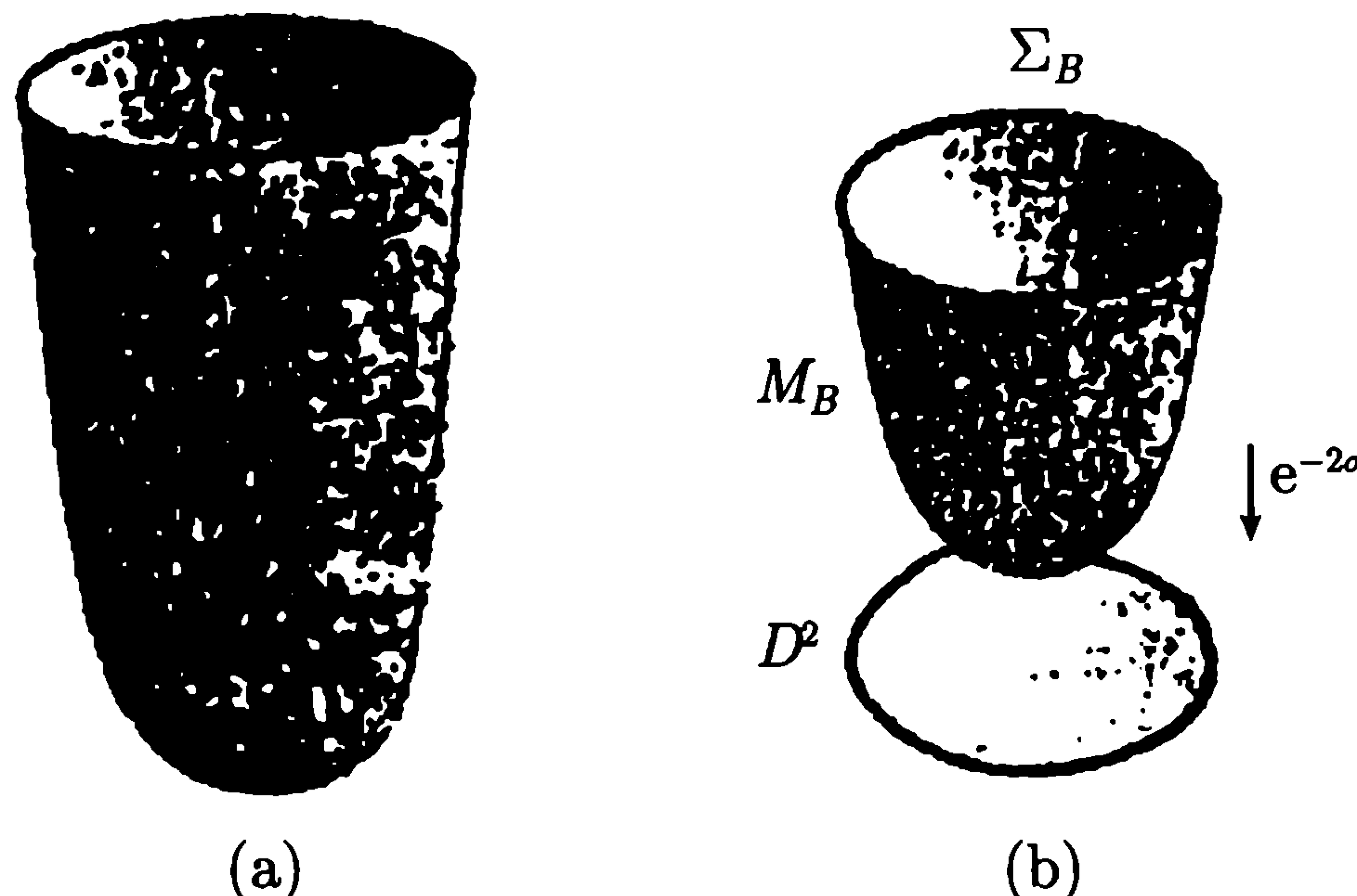


图 5-15

考虑 G-H 瞬子上外边界 $\Sigma_B(r=r_B$, 图 5-15(b)) 内的区域 M_B. 若在面 Σ_B 上固定边界条件, 而 β 是线 $r=r_B$ 的固有长度, 则由边界条件 (β, r_B) 表示的区域 M_B 的经典欧氏作用量为

$$I(\beta, r_B)=I[\gamma_0, \varphi_0]=3\pi r_+^2-4\pi r_+ r_B+\beta r_B. \tag{5.3.5}$$

式中 r_+ 由下式定义:

$$\beta=4\pi r_+\left(1-\frac{r_+}{r_B}\right)^{1/2} \tag{5.3.6}$$

β 为 r_B 处温度的倒数. 当 $r_B\to\infty$ 时, $\beta=4\pi r_+$. 经典作用量简化为

$$I(\beta)=\frac{1}{16\pi}\beta^2. \tag{5.3.7}$$

按照 5.2 节中的一般讨论, 有效作用量的单圈贡献为

$$W_1(\beta)=\frac{1}{2}\ln\det(-\mu^2\Delta). \tag{5.3.8}$$

这里, 重整化的行列式是在二维瞬子 (5.3.4) 的区域 M_B 上计算的. 为了具体讨论, 我们假定场 φ 在包围黑洞的边界 Σ_B 上遵从狄里赫利边界条件. 作用量中去掉的发散项是

$$W_1^{\text{div}}[M_B]=-\frac{1}{8\pi\delta}\int_{M_B}\sqrt{\gamma}\mathrm{d}^2x+\frac{\ln\delta}{12}\chi[M_B], \tag{5.3.9}$$

$$\chi[M_B]=\frac{1}{4\pi}\left(\int_{M_B}R\sqrt{\gamma}\mathrm{d}^2x+2\int_{\Sigma_B}k\sqrt{h}\mathrm{d}y\right). \tag{5.3.10}$$

式中 δ 是紫外规则化参数, $\chi[M_B]$ 是 G-H 瞬子 M_B 的欧拉示性数. 为了去掉体积发散性 $\int_{M_B}$, 须在裸经典作用量中引入宇宙常数 λ. 重整化之后我们令它等于 $-1/2$, 见 (5.3.1) 式. 要去掉 (5.3.10) 中其他发散项, 需在 (5.3.1) 中引入附加项, 但由于此项仅为拓扑不变量, 故可略去.

应用共形变换, 单圈有效作用量 $W_1(\beta)$ 可表为显式. 注意度规 (5.3.4) 可写为

$$\mathrm{d}s^2=\left(1-\frac{r_+}{r}\right)\mathrm{d}\tau^2+\left(1-\frac{r_+}{r}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2=\mathrm{e}^{2\sigma}\mathrm{d}\tilde{s}^2, \tag{5.3.11}$$

$$\mathrm{d}\tilde{s}^2=\mu^2(x^2\mathrm{d}\tilde{\tau}^2+\mathrm{d}x^2). \tag{5.3.12}$$

这里

$$\tilde{\tau}=\frac{\tau}{2r_+},\quad 0\leqslant\tilde{\tau}\leqslant 2\pi,$$

$$x=\left(\frac{r-r_+}{r_B-r_+}\right)^{1/2}\mathrm{e}^{(r-r_B)/2r_+},\quad 0\leqslant x\leqslant 1, \tag{5.3.13}$$

且共形因子 σ 为

$$\sigma(r)=\frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{r_B-r_+}{r}\right)+\frac{r_B-r}{r_+}+2\ln\left(\frac{2r_+}{\mu}\right)\right]. \tag{5.3.14}$$

为保持量纲一致, 在平直空间度规 (5.3.12) 中引入了量纲为长度的参数 μ. 上述共形变换

$$\gamma_{\mu\nu}\sim\widetilde{\gamma}_{\mu\nu}=\mathrm{e}^{-2\sigma}\gamma_{\mu\nu} \tag{5.3.15}$$

是区域 M_B 到平直二维单位盘 D^2(用 μ 的单位测量) 上的映射. 可以证明, μ 的选择不影响物理结果.

对于共形场, 此映射下 W_1 的变换式在后面 5.11 节中给出. 用 C 表示单位盘 D^2[(5.3.12) 式] 的重整化单圈有效作用量, 采用关系式 (5.11.9), 得到

$$W_1(\beta,r_B)=\widetilde{W}_1[\beta,y(\beta,r_B)]. \tag{5.3.16}$$

式中 $y=r_+/r_B$, 而且

$$\widetilde{W}_1(\beta,y)=\frac{1}{48}\left[-\frac{2}{y}+2\ln y+17-2y-13y^2\right]-\frac{1}{6}\ln\frac{\beta}{2\pi\mu}+C. \tag{5.3.17}$$

此二式需作些解释. 首先, 不仅边界处的温度倒数 β 依赖于“半径” r_B, 单圈有效作用量也依赖于 r_B. 对给定的 r_B 和 β, 引力半径 r_+ 由式 (5.3.6) 定义. 为了简化表达, 我们采用无量纲变量 $y=r_+/r_B$, 而不用 r_B. (5.3.6) 式意味着 y 是由关系式

$$y(1-y)^{1/2}=\frac{\beta}{4\pi r_B} \tag{5.3.18}$$

定义的 β 和 r_B 的函数.

自由能和热力学熵的各自单圈贡献 F_1 和 S_1^{TD} 由下列公式确定:

$$F_1(\beta,r_B)=\beta^{-1}W_1(\beta,r_B),$$
$$S_1^{\mathrm{TD}}=\beta\left.\frac{\partial W_1(\beta,r_B)}{\partial\beta}\right|_{r_B}-W_1(\beta,r_B). \tag{5.3.19}$$

W_1 的导数可用 $\widetilde{W}_1$ 的导数表示

$$\left.\frac{\partial W_1(\beta,r_B)}{\partial\beta}\right|_{r_B}=\left.\frac{\partial\widetilde{W}_1(\beta,y)}{\partial\beta}\right|_{y}+\left.\frac{\partial\widetilde{W}_1(\beta,y)}{\partial y}\right|_{\beta}\left.\frac{\partial y}{\partial\beta}\right|_{r_B}, \tag{5.3.20}$$

式中

$$\left.\frac{\partial y}{\partial\beta}\right|_{r_B}=\frac{2y(1-y)}{\beta(2-3y)}. \tag{5.3.21}$$

后一等式来源于 (5.3.18). 根据 (5.3.19)~(5.3.21), 最后得到

$$
\begin{aligned}
S_1^{\mathrm{TD}}(y,\beta) =& \frac{1}{48(2-3y)}\left[\frac{8}{y} - 13y - 28y^2 + 13y^3\right] \\
& - \frac{1}{24}\ln\ y + \frac{1}{6}\ln\frac{\beta}{2\pi\mu} - \frac{17}{48} - C.
\end{aligned} \tag{5.3.22}
$$

此量是有限的. 无量纲常数 C 不依赖于系统的参数, 而反映熵定义中的不确定性. 对于进一步讨论, 这不确定性并不重要, 因此这项和其他类似常数可省略. 当 r_B 很大 ($r_B \gg r_+$ 或 $y \ll 1$) 时, S_1^{TD} 中的主要项是 $\frac{\pi}{3}r_B\beta^{-1}$. 此项和一维无质量标量量子热气体的熵相合. 我们所考虑的情况总是 $r_B < \frac{3}{2}r_+$, 所以上面的限制只有形式上的意义. 当 $r_B = \frac{3}{2}r_+$ 时, $S_1^{\mathrm{TD}} = \infty$, 致使 $y = \frac{3}{2}$ 时热容量为无限大. 可以预见, 4 维情况下这些量有相同的行为.

5.4　离 壳 方 法

在前面的讨论中我们用到了 (5.3.6) 式. 它可以写成 $\beta_\infty = \beta_{\mathrm{H}}$. 其中 $\beta_\infty = \beta(1-r_+/r_B)^{-1/2}$, 是无限远处观测到的边界 Σ_B 处的温度的倒数, $(1-r_+/r_B)^{-1/2}$ 是红移因子. β_{H} 是 Hawking 温度倒数 (也是在无限远处测量的). $\beta_\infty = \beta_{\mathrm{H}}$ 明显给出了热辐射和黑洞之间的平衡条件. 也正因为有这一条件, 我们才谈及即壳量.

下面我们讨论另一种方法 —— 离壳方法, 其中背景度规不满足 $\beta_\infty = \beta_{\mathrm{H}}$. 这时有效作用量的单圈贡献为三个变量 ($\beta, r_B$ 和 r_+) 的函数:

$$
W_1^* = W_1^*(\beta, r_+, r_B, \cdots).
$$

用上标 $*$ 表示此量依赖于离壳方案的选择, W_1^* 的自变量中的省略号表示它还可能依赖于某些附加参数, 这些参数由于离壳方案的不同而不相同. 因为这些参量并不重要, 故下面将不再表示出来.

在一般情况下, 离壳熵定义为离壳自由能 $F^* = \beta^{-1}W^*$ 对温度变化的反应. 条件是系统的参数 (r_B) 和黑洞参数 (r_+) 固定. 按这个定义, 单圈离壳熵为

$$
S_1^* = \beta\frac{\partial W_1^*}{\partial\beta}\bigg|_{r_B, r_+, \cdots} - W_1^*. \tag{5.4.1}
$$

这里假定计算结束后要回到即壳极限. 这就是说, 令 S_1^* 中的 r_+ 等于即壳值, 此值由解相应的引力场方程确定.

如果不采用 r_B 和 r_+, 而采用无量纲变量

$$
y = y(r_B, r_+) = \frac{r_+}{r_B},
$$

$$\alpha = \alpha(\beta, r_B, r_+) = \frac{\beta_\infty}{\beta_{\rm H}} = \frac{\beta}{4\pi r + \sqrt{1 - \dfrac{r_+}{r_B}}}, \tag{5.4.2}$$

则 W_1^* 和 S_1^* 的显式就可以变得很简单. 变量 α 是离壳参数. 当系统即壳时, $\alpha = 1$. 定义

$$W_1(\beta, r_B, r_+, \cdots) = \widetilde{W}_1(\beta, \alpha(\beta, r_B, r_+), y(r_+, r_B), \cdots). \tag{5.4.3}$$

当固定 r_+ 和 r_B 时, y 也固定, 于是 (5.4.2) 表明 α 正比于 β. 因此有

$$S_1^* = \beta \frac{\partial \widetilde{W}_1^*(\beta, \alpha, y, \cdots)}{\partial \beta}\bigg|_{\alpha, y, \cdots} + \alpha \frac{\partial \widetilde{W}_1^*(\beta, \alpha, y, \cdots)}{\partial \alpha}\bigg|_{\beta, y, \cdots} - W_1^*. \tag{5.4.4}$$

如前所说, 当计算完毕后, 须令 $\alpha = 1$. 于是 S_1^* 相应的即壳值只依赖于边界条件 β 和 r_B. 做了一般的讨论之后, 下面我们讨论具体的离壳方法.

5.5 砖墙模型

1. 有效作用量

作为离壳方法的第一个例子, 我们讨论所谓"砖墙模型"(brick-wall model), 它由't Hooft 提出, 随后有诸多文章讨论. 其基本思想是在离黑洞视界很近的地方 (固有距离为 ϵ), 引入一附加的类光边界 Σ_ϵ. Σ_B 和 Σ_ϵ 之间的区域表示为 $M_{B,\epsilon}$(图 5-16), 按't Hooft 的意见, 进一步假设场 φ 在两边界 Σ_B 和 Σ_ϵ 处都满足狄里赫利条件. 砖墙模型的出发点是在区域 $M_{B,\epsilon}$ 中的无质量标量场的配分函数 $Z_1^{\rm BW}(\beta)$:

$$\ln\ Z_1^{\rm BW}(\beta) = -\frac{1}{2}\ln\det(-\mu^2\Delta). \tag{5.5.1}$$

式中 β 为 Σ_B 处测得的温度的倒数. "ln det"理解为重整化量, Δ 是区域 $M_{B,\epsilon}$ 内满足狄里赫利条件的标量场的拉普拉斯算符. 由于内边界 Σ_ϵ 的存在, 热气体不能穿透的黑洞视界附近区域就被完全消除掉了. 因此, 无论参数 β 和 m 的关系如何,

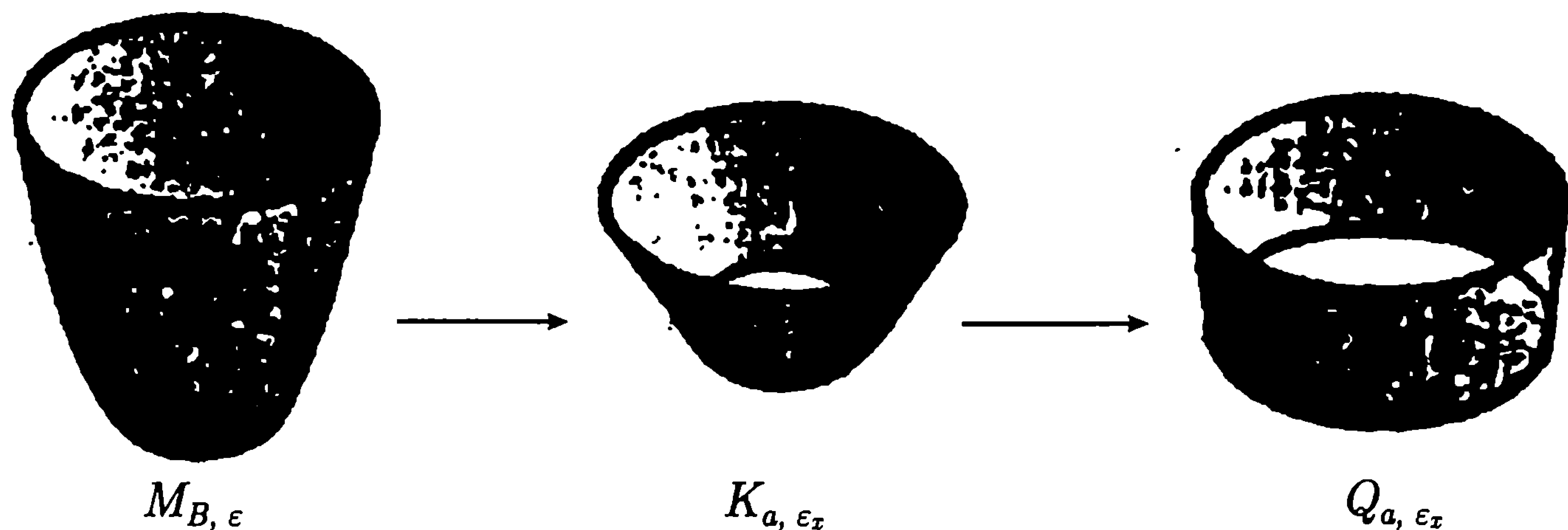


图 5-16

这系统都不是奇异的, 而且砖墙模型适用于离壳情况. 为了区别用这一离壳方法算得的量, 我们用缩写字母 BW 作为上标, 相应的配分函数 Z_1^{BW} 和作用量 W_1^{BW} 不仅依赖于 β 和 r_B, 也依赖于 ϵ 和视界处的 dilaton 值 r_+. 现在我们的任务是求出 $W_1^{\mathrm{BW}}(\beta, r_B, r_+, \epsilon)$.

显然, 这一问题可以简化为某种"标准"二维平直区域的有效作用量的计算. 我们取圆柱面为这一区域 (图 5-16).

一个比较方便的方法是分两次完成共形变换.

首先, 采用映射 (5.3.15), 其中 σ 由 (5.3.14) 给出, 在此变换下, 度规形式为

$$\mathrm{d}\tilde{s}^2 = \mu^2(x^2\mathrm{d}\tilde{\tau}^2 + \mathrm{d}x^2), \quad 0 \leqslant \tilde{\tau} \leqslant 2\pi\alpha,\ \epsilon_x \leqslant x \leqslant 1. \tag{5.5.2}$$

此空间的嵌入图见上图. 它是圆锥 C_α 在面 $\Sigma_B(x=1)$ 和 $\Sigma_\epsilon(\epsilon_x)$ 之间的部分 K_{α,ϵ_x}, $x = \epsilon_x$ 的值和固有距离 ϵ 的联系为

$$\epsilon_x = \epsilon\frac{2\pi\alpha}{\beta}\sqrt{y}\exp\left(\frac{y-1}{2y}\right). \tag{5.5.3}$$

式中参数 y 和 α 由 (5.4.2) 式确定.

其次, 把 K_{α,ϵ_x} 映射到度规为 $\mu^2(\mathrm{d}\tilde{\tau}^2 + \mathrm{d}z^2)$ 的圆柱 Q_{α,ϵ_z} 上:

$$\mathrm{d}\tilde{s}^2 = \mu^2(x^2\mathrm{d}\tilde{\tau}^2 + \mathrm{d}x^2) = x^2[\mu^2(\mathrm{d}\tilde{\tau}^2 + \mathrm{d}z^2)], \quad z = -\ln\ x. \tag{5.5.4}$$

此柱面周长为 $2\pi\alpha$, 母线长为 $\epsilon_z = -\ln\epsilon$(在 μ 单位下).

因此, 只要知道"标准"柱 Q_{α,ϵ_z} 的有效作用量 $W_1[Q_{\alpha,\epsilon_z}]$, 通过共形变换, 就可以得到作用量 $W_1^{\mathrm{BW}}(\beta, r_B, r_+, \epsilon)$. 可以证明

$$W_1[Q_{\alpha,\epsilon_z}] = -\ln\ \mathrm{tr}\mathrm{e}^{-2\pi\alpha\mu\hat{H}}. \tag{5.5.5}$$

式中 $\hat{H}$ 是满足狄里赫利边界条件的无质量标量场在区间 $(0, \mu\epsilon_z)$ 内的哈密顿. 于是, 对于 $\epsilon_z \gg 1$ 有

$$W_1[Q_{\alpha,\epsilon_z}] = -\frac{1}{12\alpha}\epsilon_z - \frac{1}{2}\ln\frac{\pi\alpha}{\epsilon_z} + o\left(\frac{1}{\epsilon_z}\right). \tag{5.5.6}$$

尺度参量 μ 在上式中不出现是因为柱面上的作用量有尺度不变性. 共形变换下有效作用量 $W_1[K_{\alpha,\epsilon_z}]$ 为

$$W_1[K_{\alpha,\epsilon_x}] = W_1[Q_{\alpha,\epsilon_z}] - \frac{\alpha}{12}\epsilon_z, \tag{5.5.7}$$

而变换 (5.3.15) 给出

$$W_1[M_{B,\epsilon}] = W_1[K_{\alpha,\epsilon_x}] + \alpha f(y), \tag{5.5.8}$$

$$f(y) = -\frac{1}{48}\left(-\frac{2}{y} + 2\ln\ y + 2y + 13y^2 - 13\right). \tag{5.5.9}$$

应用 (5.5.6)~(5.5.8), 可以得到最后结果. 用 $(\beta,\alpha,y,\epsilon)$ 写出的有效作用量 $W_1^{\mathrm{BW}}(\beta, r_B, r_+,\epsilon)$ 为

$$W_1^{\mathrm{BW}}(\beta,r_B,r_+,\epsilon)=\widetilde{W}_1^{\mathrm{BW}}(\beta,\alpha(\beta,r_B,r_+),y(r_B,r_+),\epsilon), \tag{5.5.10}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{W}_1^{\mathrm{BW}}(\beta,\alpha,y,\epsilon)=&\frac{1}{12}\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)\ln\frac{2\pi\alpha\epsilon}{\beta}\\&-\frac{1}{2}\ln\frac{\pi\alpha}{\ln(\beta/2\pi\alpha\epsilon)}+\frac{\alpha}{48}(15-2y-13y^2)\\&+\frac{1}{24\alpha}\left(1-\frac{1}{y}+\ln\ y\right)+o(\ln^{-1}(\beta/\epsilon)).\end{aligned} \tag{5.5.11}$$

当 $\alpha=1$, 就是即壳情况, 此时作用量可以写成和的形式

$$\begin{aligned}\widetilde{W}_1^{\mathrm{BN}}(\beta,\alpha=1,y,\epsilon)=&\widetilde{W}_1(\beta,y)+\frac{1}{6}\ln\epsilon\\&-\frac{1}{2}\ln\frac{\pi}{\ln(\beta/2\pi\epsilon)}+o(\ln^{-1}(B/\epsilon)).\end{aligned} \tag{5.5.12}$$

式中区域 M_B 上的热力学作用量 $\widetilde{W}_1(\beta,y)$ 由式 (5.3.17) 给出, 而附加项来源于墙的存在, 当 $\epsilon\to 0$ 时它对数发散.

2. 熵

砖墙模型的熵 S_1^{BW} 由 (5.4.1) 用 W_1^{BW} 给出. 写成 $(\beta,\alpha,y,\epsilon)$ 的形式为

$$\begin{aligned}S_1^{\mathrm{BW}}(\beta,\alpha,y,\epsilon)=&\frac{1}{12\alpha}\left(2\ln\frac{\beta}{2\pi\alpha\epsilon}-\ln\ y+\frac{1}{y}-1\right)\\&+\frac{1}{2}\ln\frac{\pi\alpha}{\ln(\beta/2\pi\alpha\epsilon)}+o(\ln^{-1}(\beta/\epsilon)).\end{aligned} \tag{5.5.13}$$

令 $\alpha=1$ 便得到 S_1^{BW} 的即壳值.

这里应注意, 重整化参数 μ 未出现于 (5.5.11) 和 (5.5.13), 故砖墙作用量 W_1^{BW} 和熵 S_1^{BW} 都不含有 μ. 这是因为在常共形变换下, 有效作用量需附加一正比于流形的欧拉示性数的项. 但是 $M_{B,\epsilon}$ 与柱面的拓扑相同, 欧拉示性数为零. 因此, 有效作用量在常共形变换下不变, 并不含 μ. 另一方面, 完全规则瞬子的欧拉示性数与 D^2 相同, 都不为零. 结果共形反常积分不为零, 因而 μ 作为维数变换的参数出现在热力学作用量和熵中.

下面我们证明, 砖墙熵 (5.5.13) 和统计力学熵相合并可写成

$$S_1^{\mathrm{BW}}(\beta,\alpha,y,\epsilon)=-\mathrm{tr}[\hat{\rho}_\epsilon^{\mathrm{H}}(\beta)\ln\hat{\rho}^{\mathrm{H}}(\beta)]. \tag{5.5.14}$$

式中 $\hat{\rho}^{\mathrm{H}}(\beta)$ 是黑洞附近区域 $M_{B,\epsilon}$ 中的无质量气体的热密度矩阵, β 是 Σ_B 处测得的温度的倒数. 在't Hooft 的砖墙模型中, 这种热气体被认为是黑洞的内部自由度.

为了证明 (5.5.14) 式, 我们先把 $S_1^{\rm BW}$ 的表示式改写一下. (5.5.7) 和 (5.5.8) 式给出

$$W_1^{\rm BW}(\beta, r_B, r_+, \epsilon) = \alpha f(y) - \frac{\alpha\epsilon_z}{12} + W_1[Q_{\alpha,\epsilon_z}]. \tag{5.5.15}$$

为了得到 $S_1^{\rm BW}$, 我们固定 r_B, r_+ 和 ϵ. 于是 y 不依赖于 β, 而 α 正比于 β, 结果 (5.5.15) 中前两项对 $S_1^{\rm BW}$ 无贡献, 故有

$$S_1^{\rm BW} = \left(\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha} - 1\right) W_1[Q_{\alpha,\epsilon_z}] = \frac{1}{6\alpha}\epsilon_z + \frac{1}{2}\ln\frac{\pi\alpha}{\epsilon_z} + o(\epsilon_z^{-1}). \tag{5.5.16}$$

易证此式和 (5.5.13) 相合. 注意 $W_1[Q_{\alpha,\epsilon_z}]$ 由 (5.5.5) 给出, 量 $(1-\beta(\partial/\partial\beta))\ln {\rm tre}^{-\beta\hat{H}_L}$ 可写成

$$-{\rm tr}[\hat{\rho}_L(\beta)\ln\hat{\rho}_L(\beta)].$$

式中 $\hat{H}_L$ 是长 L 区域内的哈密顿, 而

$$\hat{\rho}_L(\beta) = \rho_0 {\rm e}^{-\hat{\beta}H_L}.$$

应用这些关系式, 可以把 (5.5.16) 写为

$$S_1^{\rm BW} = -{\rm tr}[\hat{\rho}_{\mu\epsilon_z}(2\pi\mu\alpha)\ln\hat{\rho}_{\mu\epsilon_z}(2\pi\mu\alpha)]. \tag{5.5.17}$$

此式表明 $S_1^{\rm BW}$ 是区间 $\mu\epsilon$ 内温度为 $(2\pi\mu\alpha)^{-1}$ 的一维热气体的熵 [由于前面说明的原因, μ 不出现在 (5.5.16) 中].

此结果可以用来证明 (5.5.14) 式, 因为密度矩阵 $\hat{\rho}_{\mu\epsilon_z}(2\pi\mu\alpha)$ 和黑洞密度矩阵 $\hat{\rho}^{\rm H}(\beta)$ 相合. 实际上, 我们用了保持对称性 (Killing 矢量) 的共形变换, 并没有影响边界条件. 在这些条件下, 共形无质量场的哈密顿是不变的, 故密度矩阵也是不变的. 但是要注意, 我们用来定义温度和距离的尺度会改变. 为了定义能量、温度等, 我们必须保证 Killing 矢量的归一性. 现在我们选择 (在外边界 Σ_B 处) 条件 $(\xi^2)_B = 1$. 若共形因子 σ 在边界处不为零, 则必须重新标度 $\xi^\mu \to \widetilde{\xi}^\mu = \exp(-\sigma_B)\xi^\mu$, 使得共形变换后, 在边界处有 $\widetilde{\xi}^2 = 1$. 我们有

$${\rm e}^{-\beta\hat{H}_L} = {\rm e}^{-\widetilde{\beta}\widetilde{H}_L}, \tag{5.5.18}$$

式中

$$\widetilde{\beta} = \exp(-\sigma_B)\beta, \quad \widetilde{H} = \exp(\sigma_B)\hat{H}.$$

$\tilde{L}$ 是共形相关度规 $\widetilde{\gamma}_{\mu\nu} = {\rm e}^{-z\sigma}\gamma_{\mu\nu}$ 中区间的固有长度.

特别是考虑到我们在第一步中用到的共形映射 (5.3.11) 和 (5.3.14), (5.5.18) 给出

$$\hat{\rho}_\epsilon^{\rm H}(\beta) = \hat{\rho}_{\mu\epsilon_x}^{\rm R}(2\pi\mu\alpha). \tag{5.5.19}$$

式中 $\hat{\rho}^{\rm H}$ 是初始黑洞密度矩阵, $\hat{\rho}^{\rm R}$ 是 Rindler 空间中的热密度矩阵, 其度规为

$$\mathrm{d}\tilde{s}^2 = \mu^2[x^2\mathrm{d}\tilde{\tau}^2 + \mathrm{d}x^2] = \left(\frac{X}{\mu}\right)^2 \mathrm{d}T^2 + \mathrm{d}X^2. \tag{5.5.20}$$

Rindler 空间的温度倒数 $2\pi\mu\alpha$ 是在边界 $X = \mu$ 处测量的, 此处满足 $g_{TT} = 1$. 参数 $\mu\epsilon_x$ 为内边界到视界的固有距离, 用 Rindler 度规测量. 注意固有距离并非共形不变量. 最后, 把 Rindler 空间映射到平直空间 [相应的有效作用量的变换 $K_{\alpha,\epsilon_x} \to Q_{\alpha,\epsilon_z}$ 由 (5.5.4) 式给出], 可以得到 Rindler 密度矩阵和区间内的密度矩阵之间的关系

$$\hat{\rho}^{\rm R}_{\mu\epsilon_x}(2\pi\mu\alpha) = \hat{\rho}_{\mu\epsilon_z}(2\pi\mu\alpha). \tag{5.5.21}$$

$S_1^{\rm BW}$ 的统计力学形式 (5.5.14) 便可由 (5.5.17)、(5.5.19) 和 (5.5.21) 得到.

5.6 顶角奇异性方法

我们可以不去掉视界附近的 ϵ-区域, 而直接研究完整的黑洞几何. 但是若 β_∞ 和 Hawking 值 β_H 不同, 时空不再是规则的, 因为视界 $r = r_+$(Killing 矢量的固定点) 处有角亏损为 $2\pi(1-\alpha)$ 的顶角奇异性. 这样的空间在顶角处具有类 δ 的曲率. 因此, 它不是真空爱因斯坦场方程的解. 我们称这空间为奇异瞬子, 用 M_B^α 表示 (图 5-17).

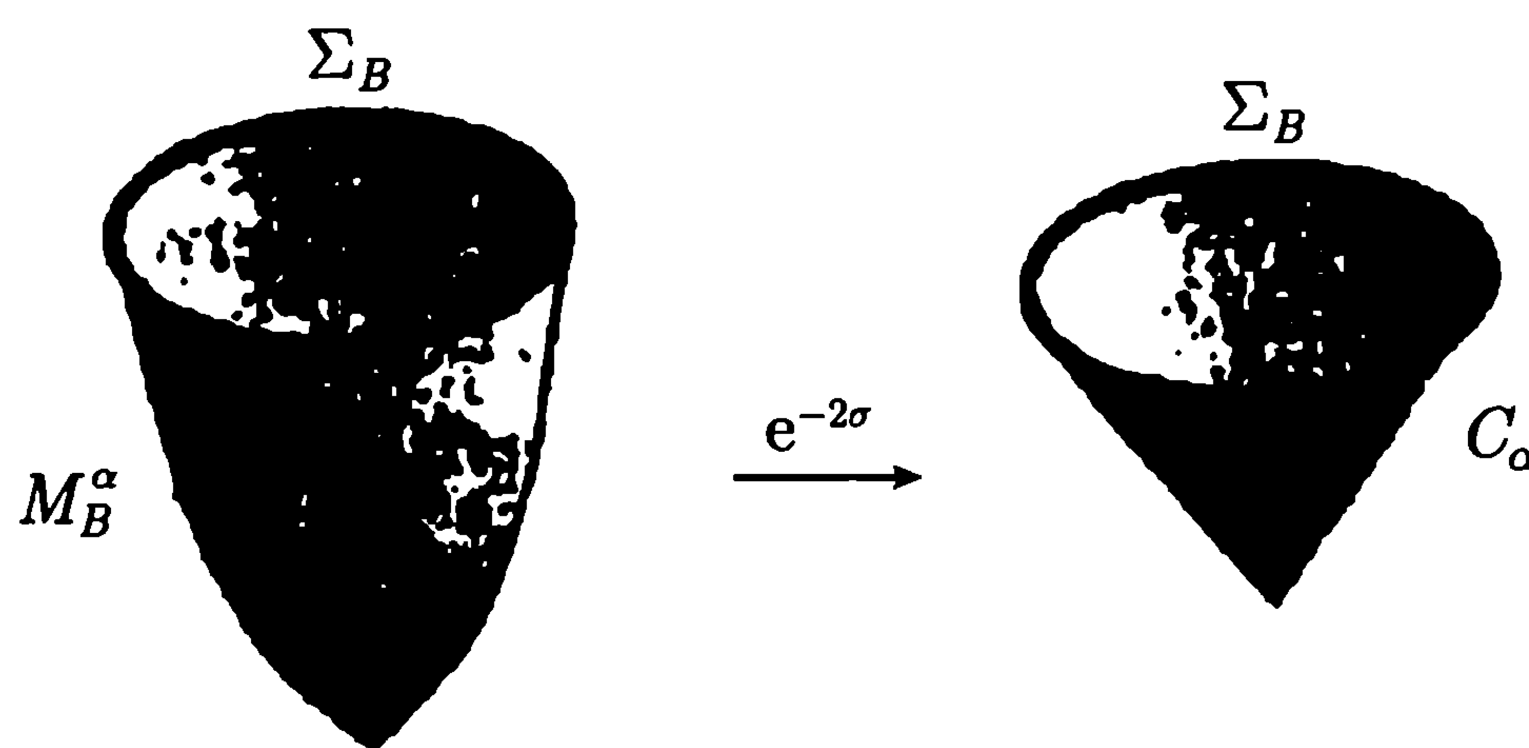


图 5-17

直接用这一流形做单圈计算是可能的. 我们把相应的方法称为顶角奇异性方法. 所得结果和规则空间的区别在于紫外发散性的结构. 顶角奇异性导致有效作用量中出现附加的、源于视界面的发散项; 重整化需要新的项. 但是重要的是这些项的数量级为

$$(\beta_\infty - \beta_H)^2 \sim (1-\alpha)^2,$$

故即壳时它们对黑洞熵和自由能均无贡献.

在二维情况下, 由 (5.11.2) 和 (5.11.3), 可将奇异瞬子 M_B^α 上作用量的发散部分写成:

$$W_l^{\rm div}[M_B^\alpha] = -\frac{1}{8\pi\delta}\int_{M_B^\alpha}\sqrt{\gamma}\mathrm{d}x^2 + \left(\frac{\ln\delta}{12}\chi[M_B^\alpha] + \frac{1}{2\alpha}(1-\alpha)^2\right). \tag{5.6.1}$$

$$\chi[M_B^\alpha]=\frac{1}{4\pi}\left(\int_{M_B^\alpha}R\mathrm{d}^2x+2\int_{\Sigma_B}k\mathrm{d}y+4\pi(1-\alpha)\right). \tag{5.6.2}$$

如 (5.3.9) 一样, 式中 δ 是紫外截断参数, R 是规则曲率. 量 $\chi[M_B^\alpha]$ 是 M_B^α 的欧拉示性数, 且与 Gibbons-Hawking 瞬子相同

$$\chi[M_B^\alpha]=\chi[M_B]=1.$$

因此, 精确到 $(1-\alpha)^2$, 规则瞬子的发散项与奇异情况相合 [比较 (5.3.9) 和 (5.6.1)], 而其差在即壳时不影响熵. 如前, 我们假设已重整化, 只采用重整化的量.

现在我们用顶角奇异性方法计算离壳有效作用量 W_1^{CS} 和熵 S_1^{CS}.

与前面的讨论相似, β 为 Σ_B 处的温度倒数, $\alpha=\beta_\infty/\beta_H$ 为离壳参数. 我们再次采用共形变换 (5.3.1). 但是现在它把奇异瞬子映射到标准锥 C_α, 其母线为单位长度 (以 μ 为单位)

$$\mathrm{d}\tilde{s}^2=\mu^2(x^2\mathrm{d}\tilde{\tau}^2+\mathrm{d}x^2),\quad 0\leqslant x\leqslant 1,\quad 0\leqslant\tau\leqslant 2\pi\alpha. \tag{5.6.3}$$

利用 (5.3.11)、(5.3.14) 和 (5.11.9) 式, 可以把有效作用量 W_1^{CS} 和 C_α 上的作用量联系起来. 如前, 用变量 (β,α,y) 写出, 此作用量为

$$W_1^{\mathrm{CS}}(\beta,r_B,r_+)=\widetilde{W}_1^{\mathrm{CS}}(\beta,\alpha(\beta,r_B,r_+),y(r_B,r_+)). \tag{5.6.4}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{W}_1^{\mathrm{CS}}(\beta,\alpha,y)=&-\frac{\alpha}{48}\left(2y+13y^2-15+4\ln\frac{\beta}{2\pi\mu\alpha}\right)\\&-\frac{1}{24\alpha}\left(\frac{1}{y}-1-\ln\ y+2\ln\frac{\beta}{2\pi\mu\alpha}\right)+C(\alpha).\end{aligned} \tag{5.6.5}$$

式中 $C(\alpha)$ 是单位锥的有效作用量, 当 $\alpha=1$ 时, 与单位盘 D^2 的有效作用量相同: $C(\alpha=1)=C$. 函数 $C(\alpha)$ 不含 μ, 并导致熵的一纯数项. 它的形式对我们不重要.

取即壳极限 $\alpha=1$ 时, 顶角奇异性消失, 故

$$\widetilde{W}_1^{\mathrm{CS}}(\beta,\alpha=1,y)=\widetilde{W}_1(y,\beta). \tag{5.6.6}$$

或 $\widetilde{W}_1(y,\beta)$ 是 (5.3.17) 给出的即壳有效作用量.

熵 S_1^{CS} 由 $\widetilde{W}_1^{\mathrm{CS}}(\beta,\alpha,y)$ 通过式 (5.4.4) 确定, 于是有

$$S_1^{\mathrm{CS}}(\beta,\alpha,y)=\frac{1}{12\alpha}\left(\frac{1}{y}-1-\ln\ y+2\ln\frac{\beta}{2\pi\mu\alpha}\right)+C^{\mathrm{CS}}(\alpha). \tag{5.6.7}$$

式中

$$C^{\mathrm{CS}}(\alpha)=\left(\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}-1\right)C(\alpha) \tag{5.6.8}$$

在 $\alpha=1$ 时是无关常数. 在顶角奇异性方法中, 重整化作用量 W_1^{CS} 和熵 S_1^{CS} 都是有限的.

5.7 钝锥方法

考虑前页图中的奇异瞬子和一系列在顶角处几何略有变化的规则流形 (如图 5-18), 这些几何, 黎曼曲率处处规则, 仅在视界附近和奇异瞬子不同. 我们称这种几何为"钝瞬子", 而把这种离壳延拓称为钝锥方法. 在这一方法中, 可以避免无限曲率流形的量子化和重整化问题. 计算的最后才去掉顶角奇异性的规则化.

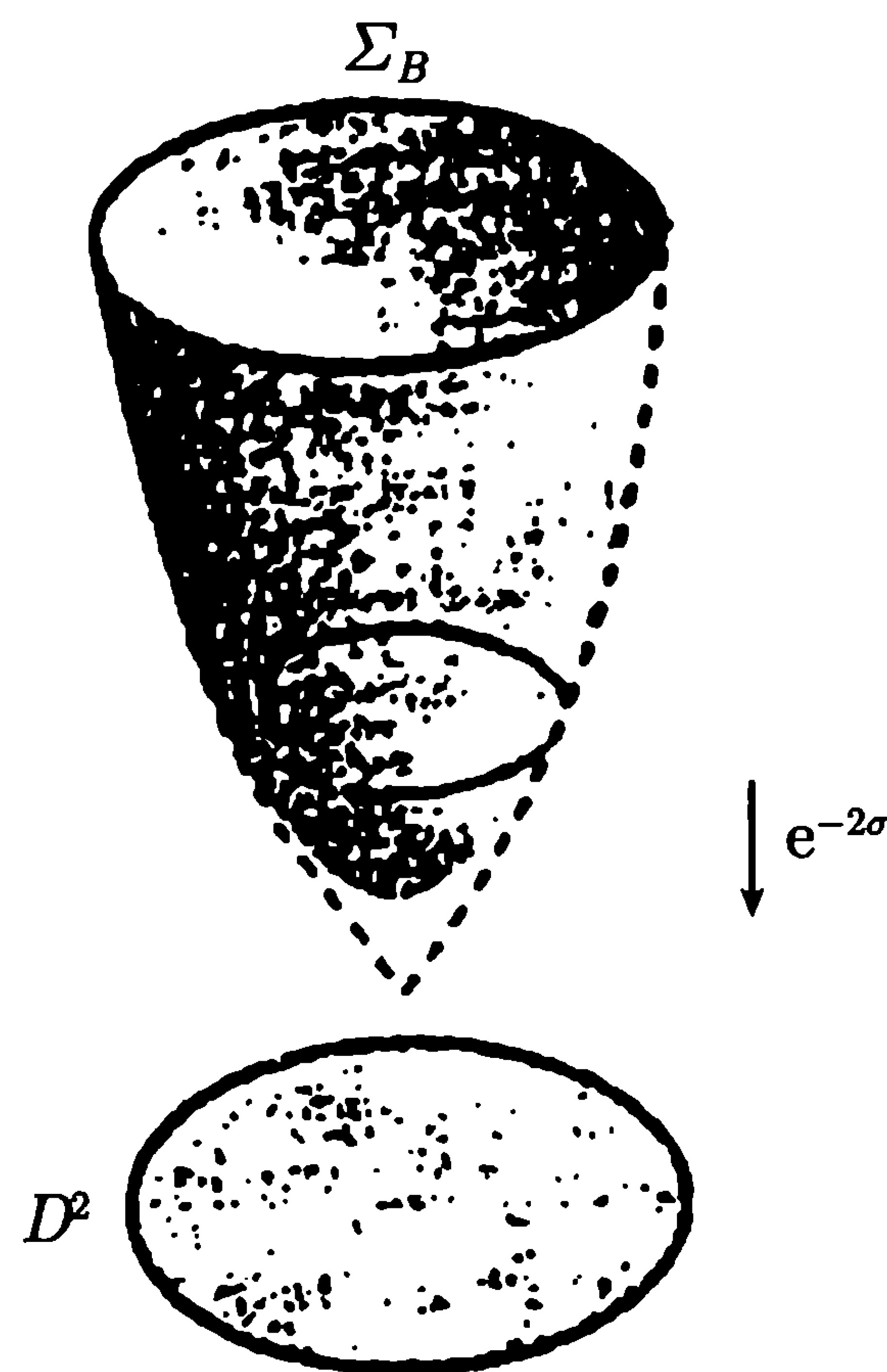


图 5-18

为了简化计算, 我们选择离壳延拓的一种特殊形式. 它由两个参量表征: 离壳参数 $\alpha=\beta_\infty/\beta_H$ 和一个新参数 η, 它描述钝瞬子顶点圆化的程度. 钝瞬子度规取为

$$\mathrm{d}s^2=\left(\frac{\beta}{2\pi}\right)^2(\rho^2\mathrm{d}\tau^2+b^2\mathrm{d}\rho^2),\quad 0\leqslant\tau\leqslant 2\pi,\quad 0\leqslant\rho\leqslant 1; \tag{5.7.1}$$

$$b=\frac{1}{(1-\rho^2+y\rho^2)^2}\frac{\rho^2+\alpha\eta^2}{\alpha\rho^2+\alpha\eta^2}.$$

区域的边界 Σ_B 位于 $\rho=1$, 其长为 β. 如前, 黑洞质量参数含于无量纲量 $y=r_+/r_B$ 中. 唯一确定钝瞬子的参数为 β,r_B,r_+ 和 η. 当 $\alpha=1$, 此度规和 G-H 瞬子度规相同.

为了计算钝瞬子上重整化的单圈有效作用量, 我们把这一钝瞬子映射到一单位盘 D^2 上. 首先考虑一任意的静态欧氏二维流形, 其线元 $\mathrm{d}s^2$ 和单位盘上线元 $\mathrm{d}\tilde{s}^2$ 共形

$$\mathrm{d}s^2=\left(\frac{\beta}{2\pi}\right)^2[a^2\mathrm{d}\tau^2+b^2\mathrm{d}\rho^2]=\exp(2\sigma)\mu^2[x^2\mathrm{d}\tilde{\tau}^2+\mathrm{d}x^2]. \tag{5.7.2}$$

式中

$$0\leqslant\tau\leqslant 2\pi,\quad 0\leqslant\tilde{\tau}\leqslant 2\pi,\quad 0\leqslant\rho\leqslant 1,\quad 0\leqslant x\leqslant 1.$$

于是, 度规系数 a, b 和共形因子

$$\sigma(\rho)=\ln\frac{a(\rho)}{a(1)}+\int_\rho^1\mathrm{d}\rho\frac{b}{a}+\ln\left(\frac{\beta}{2\pi\mu}\right) \tag{5.7.3}$$

都只含 ρ. 归一化条件要求

$$\sigma(1)=\ln\frac{\beta}{2\pi\mu}$$

和 $\widetilde{\tau}=\tau$.

把共形反常积分 (见 5.1.1 节) 用于度规 (5.7.2), 得到单圈有效作用量

$$W_1^{\mathrm{BC}}=-\frac{1}{6}\ln\left(\frac{\beta}{2\pi\mu}\right)-\frac{1}{12}\int_0^1 \mathrm{d}\rho\frac{(a'-b)^2}{ab}-\left(\frac{a'}{4b}\right)_{\rho=1}+\frac{1}{4}+C. \tag{5.7.4}$$

这里 $a'=\mathrm{d}a/\mathrm{d}\rho$, 常数 C(与前面类似) 是单位盘 D^2 的有效作用量. 在导出此式时已用到视界处度规的规则化条件 $(a'/b)|_{\rho=0}=1$. 对于钝瞬子度规 (5.7.1), 有

$$a=\rho,\quad b=\frac{1}{(1-\rho^2+y\rho^2)^2}\frac{\rho^2+\alpha\eta^2}{\alpha\rho^2+\alpha\eta^2}, \tag{5.7.5}$$

$$\sigma=\ln\rho+\frac{1}{2}\int_{\rho^2}^1 \mathrm{d}z\frac{z+\alpha\eta^2}{z(\alpha z+\alpha\eta^2)(1-z+yz)^2}+\ln\left(\frac{\beta}{2\pi\mu}\right).$$

钝锥有效作用量为

$$W_1^{\mathrm{BC}}(\beta,r_B,r_+,\eta)=\widetilde{W}_1^{\mathrm{BC}}(\beta,\alpha(\beta,r_B,r_+),y(r_B,r_+),\eta), \tag{5.7.6}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{W}_1^{\mathrm{BC}}(\beta,\alpha,y,\eta)=&-\frac{1}{6}\ln\left[\frac{\beta}{2\pi\mu}\right]-\frac{(\alpha-1)}{24\alpha}\frac{1}{(1+\eta^2-y\eta^2)^2}\ln\left|\frac{\eta^2}{1+\eta^2}\right|\\&+\frac{\alpha-1}{24}(1+\alpha\eta^2-y\alpha\eta^2)^2\ln\left|\frac{\alpha\eta^2}{1+\alpha\eta^2}\right|\\&+\frac{1}{24}\ln|y|\times\left[1-\frac{\alpha-1}{\alpha}\frac{1}{(1+\eta^2-y\eta^2)^2}\right]\\&+\frac{1}{24}(1-y)\left[2\alpha-\frac{1+\alpha\eta^2-y\alpha\eta^2}{\alpha y(1+\eta^2-y\eta^2)}\right]\\&-\frac{1}{48}\alpha(1-y)^2[1-2(\alpha-1)\eta^2]\\&-\frac{1}{4}\times\frac{\alpha+\alpha\eta^2}{1+\alpha\eta^2}y^2+\frac{1}{4}+C.\end{aligned} \tag{5.7.7}$$

参数 η 的作用类似于砖墙模式中的截断参数 ϵ. 当规则化参数 $\eta\to 0$ 时, 作用量变为

$$\begin{aligned}\widetilde{W}_1^{\mathrm{BC}}(\beta,\alpha,y,\eta)=&-\frac{1}{6}\ln\frac{\beta}{2\pi\mu}+\frac{1}{48}\left[-\frac{2}{\alpha y}+\frac{2}{\alpha}\ln y-2\alpha y\right.\\&\left.-13\alpha y^2+2(\alpha-1)\ln\alpha+\frac{2}{\alpha}+3\alpha+12\right]\\&+C+\frac{1}{24\alpha}(\alpha-1)^2\ln\eta^2+o(\eta^2).\end{aligned} \tag{5.7.8}$$

在即壳时 $(\alpha=1)$, 度规 (5.7.1) 变为 G–H 瞬子度规, 相应的即壳有效作用量为

$$\widetilde{W}_1^{\mathrm{BC}}(\beta,\alpha=1,y,\eta)=-\frac{1}{6}\ln\frac{\beta}{2\pi\mu}$$

$$+\frac{1}{48}\left[-\frac{2}{y}+2\ln y-2y-13y^2+17\right]+C. \tag{5.7.9}$$

与 (5.3.17) 给出的即壳作用量 $\widetilde{W}_1(\beta,y)$ 相同, 相应的钝锥熵当 $\eta=0$ 时有限, 且为

$$S_1^{\rm BC}(\beta,1,y,0)=\frac{1}{12y}-\frac{1}{12}\ln y+\frac{1}{6}\ln\frac{\beta}{2\pi\mu}-\frac{1}{2}-C. \tag{5.7.10}$$

此结果和顶角奇异性方法得到的熵 $S_1^{\rm CS}$ 相同 (差一个不重要的常数).

5.8 体积截断方法

本节, 我们再讨论一种黑洞有效作用量 W_1 的离壳定义. W_1 可以表示为某一拉格朗日密度 $\mathscr{L}_1(x)$ 对背景空间的体积分:

$$W_1=\int\sqrt{g}\mathrm{d}x\mathscr{L}(x). \tag{5.8.1}$$

相应的拉氏密度可写成热核算符在坐标表象中的对角元素的项:

$$\mathscr{L}_1(x)=-\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}s}{s}\langle x|\mathrm{e}^{s\triangle}|x\rangle, \tag{5.8.2}$$

于是, 对作用量本身有标准公式

$$W_1=\frac{1}{2}\ln\det(-\mu^2\triangle)=-\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}s}{s}\mathrm{tr}\mathrm{e}^{s\mu^2\triangle}. \tag{5.8.3}$$

现在考虑一奇异瞬子, 并对规则点 $r>r_+$ 计算 $\mathscr{L}_1(x)$. 令 Σ_ϵ 表示距视界一很小距离 ϵ 的面. 把积分限制在 Σ_ϵ 外的区域 $M_{B,\epsilon}$ 中, 如图 5-19 所示. 于是, 作用量 W_1 依赖于新参量 ϵ, 我们称这一离壳方法为体积截断方法, 相应的量用上标 VC 表示.

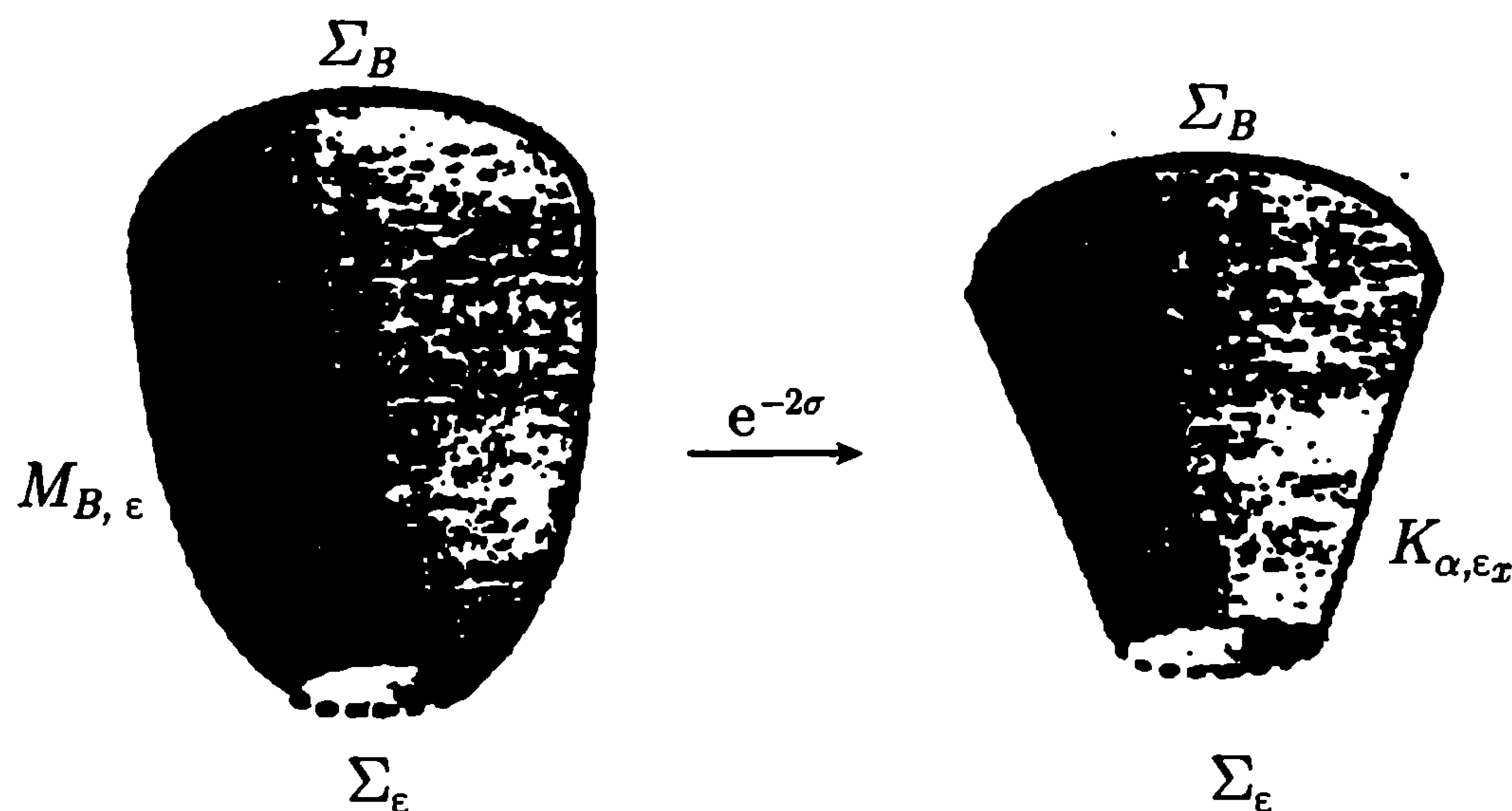


图 5-19

体积截断方法自然地来源于黑洞熵的动力学内部方案. 在这一方法中, 黑洞的内部自由度等同于在视界附近传播的场的态. 由于视界的量子涨落, 对于视界极近

处的传播模式, 其量子涨落幅相对较大, 故将这些模式区分为外部 (在视界外传播) 和内部 (在视界内传播) 是不可能的. 因此, 在此方案中计算黑洞统计力学熵时对模式的求和只能限制为视界涨落区域外的模式. 这等效于上述有效作用量体积分中的截断. 体积截断方法已被许多文章所采用. 黑洞度规被映射到一光学 (极端静态) 度规上, 视界则映射到无限远, 此光学空间的固有体积变成无限大. 为处理这种发散, 很自然地要把体积分限制在一有限区域. 这一方法可以就熵修正获得许多有趣的结果, 即使对高于二维的空间内的有质量场和非零自旋的共形场也能做到这一点.

在某种意义上, 体积截断法很像砖墙法. 但它们肯定是不同的. 因为体积截断法不需要在 Σ_ϵ 上满足任何边界条件. 它还和比 Σ_ϵ 更接近视界的区域内的量子场行为无关.

离壳黑洞解上的拉格朗日 $\mathscr{L}_1$ 的计算可以通过到顶角空间的共形变换进行, 由 (5.11.9) 有

$$\mathscr{L}_1 = \mathrm{e}^{-2\sigma}\mathscr{L}_1(C_\alpha) - \frac{1}{24\pi} \times [R\sigma - (\nabla\sigma)^2 + (2k\sigma + 3\sigma_{,\mu}n^\mu)\delta(r, r_B)]. \tag{5.8.4}$$

式中 $\mathscr{L}_1(C_\alpha)$ 是单位锥 C_α 上的拉格朗日, 只对视界外的区域适用. $\delta(r, r_B)$ 是不变 δ 函数, 可以在外边界处产生表面项. 因子 σ 见 (5.3.14) 式. 注意 (5.11.9) 式中由共形因子 σ 在顶角处的值决定的项对 W_1^{VC}[(5.8.4) 式中] 无贡献.

为找到 $\mathscr{L}_1(C_\alpha)$, 可采用顶角空间 (5.6.3) 上拉普拉斯算符的热核 $K_\alpha(x, x') = \langle x|\mathrm{e}^{s\triangle}|x'\rangle$ 的索末菲表象

$$\begin{aligned} K_\alpha(x, x', \widetilde{\tau} - \widetilde{\tau}') =& K(x, x', \widetilde{\tau} - \widetilde{\tau}') \\ &+ \frac{\mathrm{i}}{4\pi\alpha} \times \int_T \cot\left(\frac{w}{2\alpha}\right) K(x, x', \widetilde{\tau} - \widetilde{\tau}' + w)\mathrm{d}w, \end{aligned} \tag{5.8.5}$$

式中热核 $K(x, x', \widetilde{\tau} - \widetilde{\tau}')$ 是对单位盘 D^2 的. 积分路径 Γ 位于复平面上, 包括两条曲线, 从 $\mp\pi - (\widetilde{\tau} - \widetilde{\tau}') \pm \mathrm{i}\infty$ 到 $\mp\pi + (\widetilde{\tau} - \widetilde{\tau}') \pm \mathrm{i}\infty$, 与实轴的交点位于被积函数的极点 $(-2\pi\alpha, 0)$ 和 $(2\pi\alpha)$ 之间. 锥上的拉格朗日很容易计算, 只要代入 (5.8.5) 和 (5.8.3). 结果很简单:

$$\mathscr{L}_1(C_\alpha) = \mathscr{L}_1(D^2) - \frac{1}{24\pi x^2}\left(\frac{1}{\alpha^2} - 1\right). \tag{5.8.6}$$

式中 $\mathscr{L}_1(D^2)$ 是单位盘 D^2 上的拉格朗日密度. 由于它在 W_1^{VC} 中导致一无关紧要的常数项, 下面将略去它. 第二项产生于 (5.8.5) 中的积分, 而且当 $\alpha = 1$ 时为零. 在这一计算中, 先对 S 积分, 然后再用下面的公式:

$$\frac{\mathrm{i}}{8\pi\alpha}\int_\Gamma \frac{\cot(w/2\alpha)}{\sin^2 w/2}\mathrm{d}w = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{\alpha^2} - 1\right). \tag{5.8.7}$$

令 $W_1^{\mathrm{VC}}[C_\alpha]$ 为锥 C_α 上的有效作用量, 可由 (5.8.6) 式积分 (到点 $x=\epsilon_x$) 得到. 和前面类似, ϵ_x 与到视界的距离 ϵ 的关系由 (5.5.3) 给出. 这一泛函为

$$W_1^{\mathrm{VC}}[C_a] = \frac{1}{12}\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)\ln \epsilon_x^{-1}. \tag{5.8.8}$$

于是, 由 (5.8.6) 和 (5.8.3) 得到体积截断法中的完全有效作用量

$$\begin{aligned} W_1^{\mathrm{VC}}(\beta, r_B, r_+, \epsilon) =& W_1^{\mathrm{VC}}[C_\alpha] \\ & - \frac{1}{24}\pi\left\{\int_{M_{B,\epsilon}}[R\sigma - (\nabla\sigma)^2] + \int_{\Sigma_B}(2K\sigma + 3\sigma_{,\mu}n^\mu)\right\}. \end{aligned} \tag{5.8.9}$$

最后我们得到

$$\begin{aligned} W_1^{\mathrm{VC}}(\beta, r_B, r_+, \epsilon) =& \widetilde{W}_1^{\mathrm{VC}}(\beta, \alpha, (\beta, r_B, r_+), y(r_B, r_+), \epsilon), \\ \widetilde{W}_1^{\mathrm{VC}}(\beta, \alpha, y, \epsilon) =& \frac{1}{12}\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)\left(\ln\frac{\mu}{\epsilon} - \ln\frac{2\pi\mu\alpha}{\beta} - \frac{1}{2}\ln y - \frac{1}{2} + \frac{1}{2y}\right) \\ & + \frac{\alpha}{48\pi}\left(-\frac{2}{y} + 2\ln y - 2y \right. \\ & \left. - 13y^2 + 17 + 8\ln\frac{2\pi\mu\alpha}{\beta}\right) + o(\epsilon). \end{aligned} \tag{5.8.10}$$

即壳时 ($\alpha = 1$), 发散项 $\ln\epsilon$ 为零, $\widetilde{W}_1^{\mathrm{VC}}$ 和规则空间上的作用量 (5.3.17) 相同:

$$\widetilde{W}_1^{\mathrm{VC}}(\beta, \alpha = 1, y, \epsilon) = \widetilde{W}_1(\beta, y). \tag{5.8.11}$$

由作用量 (5.8.10) 得到的熵为

$$\widetilde{S}_1^{\mathrm{VC}}(\beta, \alpha, y, \epsilon) = \frac{1}{12\alpha}\left(2\ln\frac{\mu}{\epsilon} + 2\ln\frac{\beta}{2\pi\alpha} - \ln y - 1 + \frac{1}{y}\right). \tag{5.8.12}$$

即壳时, $\widetilde{S}_1^{\mathrm{VC}}$ 与顶角奇异性熵 $\widetilde{S}_1^{\mathrm{CS}}$ 只差一含 ϵ 的奇异项:

$$\widetilde{S}_1^{\mathrm{VC}}(\beta, \alpha = 1, y, \epsilon) = \widetilde{S}_1^{\mathrm{CS}}(\beta, \alpha = 1, y) + \frac{1}{6}\ln\frac{\mu}{\epsilon}. \tag{5.8.13}$$

熵 $\widetilde{S}_1^{\mathrm{VC}}$ 也可以写为

$$\widetilde{S}_1^{\mathrm{VC}}(\beta, \alpha, y, \epsilon) = \frac{1}{6\alpha}\ln\epsilon_x^{-1}. \tag{5.8.14}$$

故此量与从作用量 $W_1^{\mathrm{VC}}(C_\alpha)$ 得到的熵相合. 这种吻合的原因是用来区分 $W_1^{\mathrm{VC}}(\beta, \alpha, y, \epsilon)$ 和 $W_1^{\mathrm{VC}}(C_\alpha)$ 的反常项正比于 β, 且对 S_1^{VC} 没有贡献.

另外, S_1^{VC} 与尺度为 $\ln\epsilon^{-1}$ 的体积内的量子气体的热熵相同. 砖墙熵 S_1^{BW} 中的 $\ln\ln\epsilon^{-1}$ 项在体积截断熵中不出现, 因为 Σ_ϵ 处量子场边界条件不必满足, 而场可以自由地在边界上涨落.

5.9 离壳与即壳计算结果的比较

1. 离壳与即壳的有效作用量

本节我们讨论、比较表明黑洞热力学特征的离壳与即壳计算的结果. 先讨论有效作用量的已得结果. 为了表述方便, 引入记号

$$
\begin{aligned}
U(\beta,\alpha,y)=&-\frac{1}{6}\ln\left[\frac{\beta}{2\pi\mu}\right]\\
&+\frac{1}{48}\left[-\frac{2}{y}+2\ln y+17-2y-13y^2\right]\\
&+\frac{\alpha-1}{48\alpha}\left(\frac{2}{y}-2\ln y-2+15\alpha-2\alpha y-13\alpha y^2\right)\\
&-\frac{(\alpha-1)^2}{12\alpha}\ln\left(\frac{\beta}{2\pi\mu}\right)+\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)\ln\alpha.
\end{aligned}\tag{5.9.1}
$$

各种离壳方法得到的有效作用量单圈贡献可写为

$$
\widetilde{W}_1^{\mathrm{CS}}(\beta,\alpha,y)=U(\beta,\alpha,y)+C(\alpha),\tag{5.9.2}
$$

$$
\widetilde{W}_1^{\mathrm{BW}}(\beta,\alpha,y,\epsilon)=U(\beta,\alpha,y)+\frac{1}{12}\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)\ln\left(\frac{\epsilon}{\mu}\right)-\frac{1}{2}\ln\frac{\pi\alpha}{\ln(\beta/2\pi\alpha)},\tag{5.9.3}
$$

$$
\begin{aligned}
\widetilde{W}_1^{\mathrm{BC}}(\beta,\alpha,y,\eta)=&U(\beta,\alpha,y)+\frac{(\alpha-1)^2}{12\alpha}\ln\left(\frac{\eta\beta}{2\pi\alpha\mu}\right)\\
&+\frac{\alpha-1}{24}\ln\alpha-\frac{\alpha-5}{4}+C,
\end{aligned}\tag{5.9.4}
$$

$$
\widetilde{W}_1^{\mathrm{VC}}(\beta,\alpha,y,\epsilon)=U(\beta,\alpha,y)-\frac{1}{12}\left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)\ln\frac{\epsilon}{\mu},\tag{5.9.5}
$$

式中

$$
y=r_+/r_B,
$$

$$
\alpha(\beta,r_B,r_+)=\beta/(4\pi r+\sqrt{1-r_+/r_B}).
$$

常数 C 和 $C(\alpha)$ 分别是单位盘 D^2 和单位锥 C_α 上的有效作用量

$$
W_1=\frac{1}{2}\ln\det(-\mu^2\Delta).
$$

用同样的记号, 即壳单圈有效作用量表示为

$$
\widetilde{W}_1(\beta,y)=U(\beta,\alpha=1,y)+C.\tag{5.9.6}
$$

比较 (5.9.2)、(5.9.4) 和 (5.9.6), 得到

$$\begin{aligned}\widetilde{W}_1^{\mathrm{CS}}(\beta,\alpha=1,y)&=\widetilde{W}_1^{\mathrm{BC}}(\beta,\alpha=1,y,\eta)\\&=\widetilde{W}_1^{\mathrm{VC}}(\beta,\alpha=1,y,\epsilon)=\widetilde{W}_1(\beta,y),\end{aligned}\tag{5.9.7}$$

这里忽略了 (5.9.4) 和 (5.9.5) 中不重要的常数. 这就是说, 用顶角奇异性、钝锥、体积截断方法计算得到的单圈有效作用量的即壳值和即壳单圈有效作用量 $\widetilde{W}_1(\beta,y)$ 相同. $\widetilde{W}_1^{\mathrm{CS}}$ 总是有限的, 而 $\widetilde{W}_1^{\mathrm{BC}}$ 和 $\widetilde{W}_1^{\mathrm{VC}}$ 仅在即壳 $(\alpha=1)$ 时才是有限的 (即不含 $\ln\eta$ 或 $\ln\epsilon$ 发散项). 唯一发散的即壳值是砖墙有效作用量 $\widetilde{W}_1^{\mathrm{BW}}$.

(5.9.3) 式可以这样解释: 回忆有效作用量 $\widetilde{W}_1^{\mathrm{CS}}$ 的计算过程, 先是共形映射到锥 C_α 上 [见 (5.6.3) 式], 故 $\widetilde{W}_1^{\mathrm{CS}}$ 可以附加一作用量 $W_1[C_\alpha]=C[\alpha]$. 也可以映射到尺度为 ϵ 的锥 $C_{\alpha,\epsilon}$ 上. 这样两种计算结果是可以比较的, 只要采用 $W_1[C_\alpha]$ 和 $W_1[C_\alpha,\epsilon]$ 的差. 而这个差值容易得到, 因为这两个锥互为平凡伸缩

$$\mathrm{d}s^2(C_\alpha)=\left(\frac{\mu}{\epsilon}\right)^2\mathrm{d}s^2(C_{\alpha,\epsilon}).\tag{5.9.8}$$

由 (5.11.9) 得到

$$W_1[C_\alpha]=W_1[C_{\alpha,\epsilon}]+\frac{1}{12}\left(\frac{1}{\alpha}+\alpha\right)\ln\frac{\epsilon}{\mu}.\tag{5.9.9}$$

于是可以把 (5.9.3) 写为

$$W_1^{\mathrm{BW}}(\beta,\alpha,y,\epsilon)=W_1^{\mathrm{CS}}(\beta,\alpha,y)-W_1[C_{\alpha,\epsilon}]+W_1^{\mathrm{Cas}}(\beta,\alpha,\epsilon).\tag{5.9.10}$$

式中

$$W_1^{\mathrm{Cas}}(\beta,\alpha,\epsilon)=-\frac{1}{2}\ln\frac{\pi\alpha}{\ln(\beta/2\pi\alpha\epsilon)}\tag{5.9.11}$$

是 Casimir 效应的贡献.

2. 为什么熵的即壳和离壳单圈贡献会不同

在式 (5.9.7) 中, 所有 (除砖墙) 离壳有效作用量等于即壳有效作用量并不能保证相应的熵也相等. 而且正如下面我们将看到的, 所有离壳计算给出的熵都与即壳熵不同. 在给出具体关系式之前, 先看看这为什么会发生.

离壳计算的出发点是作为参数 β, r_B 和 r_+ 的函数的单圈作用量 W_1. 在砖墙和体积截断方法中, W_1 还含有 ϵ; 在钝锥方法中, 还含有 ϵ 和 η. 量 β 和 r_B 是确定这个问题的外参数. r_+ 由下面的即壳条件给出:

$$\alpha(\beta,r_B,r_+)=\frac{\beta}{4\pi r_+\sqrt{1-r_+/r_B}}=1.\tag{5.9.12}$$

先考虑顶角奇异性方法、钝锥和体积截断方法. 它们的作用量当即壳 (5.9.12) 时, 与 (5.3.16) 和 (5.3.17) 给出的热力学作用量 $W_1(\beta, r_B)$ 相同

$$W_1^*(\beta, r_B, r_+)|_{\alpha=1} = W_1(\beta, r_B). \tag{5.9.13}$$

式中星号代表 CS、BC 和 VC. 热力学熵 $S_1^{\rm TD}$ 由 (5.3.19) 给出

$$S_1^{\rm TD} = \beta \frac{\partial W_1(\beta, r_B)}{\partial \beta}\bigg|_{r_B} - W_1(\beta, r_B), \tag{5.9.14}$$

而即壳熵由 (5.4.1) 给出

$$S_1^* = \beta \frac{\partial W_1^*(\beta, r_B, r_+)}{\partial \beta}\bigg|_{r_B, r_+} - W_1^*(\beta, r_B, r_+).$$

注意计算 S_1^* 时 r_+ 是固定的. 由此可得两个熵之差:

$$\begin{aligned}\Delta S^* &= S_1^{\rm TD} - S_1^* \\ &= \beta \left(\frac{\partial}{\partial \beta} W_1(\beta, r_B) - \frac{\partial}{\partial \beta} W_1^*(\beta, r_B, r_+) \right) \bigg|_{\alpha=1}.\end{aligned} \tag{5.9.15}$$

显然, ΔS^* 不为零. 这说明为什么在一般情况下由离壳方法得到的黑洞熵单圈贡献和由即壳作用量经热力学计算得到的贡献不同.

3. **离壳熵与即壳熵的关系**

现在我们给出各种离壳熵的显式. 和前面类似, 假定在做完熵的计算后令 $\alpha = 1$. 得到的熵总认为是表征系统的参数 β 和 r_B 的函数. 为了简化, 我们以后略去这些说明. 也要注意, 有效作用量包含任意常数, 记为 C 和 $C(\alpha)$. 类似的常数当然也出现在熵中. 这些常数已出现在前面熵的表达式中. 它们可能对讨论与热力学第三定律有关的问题很重要, 但对我们现在讨论的问题并不重要, 因此我们将不再提及它们. 我们也略去当其他参数取极限值 ($\epsilon = 1$, $\eta = 0$) 时等于零的项.

比较方便的是从顶角奇异性方法得到的熵开始讨论. 由 (5.9.2) 式给出的有效作用量 $W_1^{\rm CS}(C(\alpha = 1) = 0)$, 或者由 (5.9.1) 式给出的 U, 得到

$$S_1^{\rm CS} = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{y} - 1 - \ln y + 2 \ln \frac{\beta}{2\pi\mu} \right). \tag{5.9.16}$$

令

$$S_1^{\rm T}(\epsilon) = \frac{1}{6} \ln \frac{\mu}{\epsilon}, \quad S_1^{\rm Cas}(\epsilon) = \frac{1}{12} \ln \frac{\pi}{\ln \dfrac{\beta}{2\pi\epsilon}}, \tag{5.9.17}$$

则前面所得各结果可表示为

$$S_1^{\mathrm{BW}} = S_1^{\mathrm{CS}} + S_1^{\mathrm{T}} + S_1^{\mathrm{Cas}}, \tag{5.9.18}$$

$$S_1^{\mathrm{VC}} = S_1^{\mathrm{CS}} + S_1^{\mathrm{T}}, \tag{5.9.19}$$

$$S_1^{\mathrm{BC}} = S_1^{\mathrm{CS}}. \tag{5.9.20}$$

这样, 钝锥方法和顶角奇异性方法给出相同的熵 (有限的). 砖墙方法和体积截断方法给出的表达式含发散项 $\ln \epsilon$. S_1^{BW} 和 S_1^{VC} 之差 S_1^{Cas} 来源于两种方法边界条件的不同. 以上所有离壳熵都和 (5.3.22) 式给出的热力学熵单圈贡献 S_1^{TD} 不同. 后者可写为

$$S_1^{\mathrm{TD}} = S_1^{\mathrm{CS}} + \Delta S. \tag{5.9.21}$$

式中

$$\begin{aligned}\Delta S &\equiv \beta \left(\frac{\partial r_+}{\partial \beta} \frac{\partial W_1^{\mathrm{CS}}}{\partial r_+} \bigg|_{\beta, r_B} \right)_{\alpha=1} \\ &= \frac{1}{48(2-3y)}(-14+26y-28y^2+13y^3) + \frac{1}{24}\ln y. \end{aligned} \tag{5.9.22}$$

(5.9.18) 式可以写成另一种便于解释的形式. 由 (5.5.16)、(5.5.17) 和 (5.5.21) 可得

$$S_1^{\mathrm{BW}} = -\mathrm{tr}[\hat{\rho}_\epsilon^{\mathrm{H}}(\beta) \ln \hat{\rho}_\epsilon^{\mathrm{H}}(\beta)]. \tag{5.9.23}$$

另一方面

$$S_1^{\mathrm{T}} + S_1^{\mathrm{Cas}} = S_\epsilon^{\mathrm{R}}(2\pi\mu) = -\mathrm{tr}[\hat{\rho}_\epsilon^{\mathrm{R}}(2\pi\mu) \ln \hat{\rho}_E^{\mathrm{R}}(2\pi\mu)]. \tag{5.9.24}$$

此式就是 Rindler 空间中距视界 (固有距离)ϵ 和 μ 的二镜面间无质量热辐射的熵. 距视界 μ 处测得的辐射温度为 $(2\pi\mu)^{-1}$. 故有

$$S_1^{\mathrm{CS}} = -\{\mathrm{tr}[\hat{\rho}_\epsilon^{\mathrm{H}}(\beta) \ln \hat{\rho}_\epsilon^{\mathrm{H}}(\beta)] - \mathrm{tr}[\hat{\rho}_\epsilon^{\mathrm{R}}(2\pi\mu) \ln \hat{\rho}_\epsilon^{\mathrm{R}}(2\pi\mu)]\}. \tag{5.9.25}$$

容易证明, 在内镜边界 (ϵ 处) 存在时, 只要等式右边的量是用体积截断法计算的, 同样的表达式仍然成立. 对于砖墙法和体积截断法, (5.9.25) 右边的每一项当 $\epsilon \to 0$ 时都发散, 但其差有限. 若形式地定义黑洞和 Rindler 度规背景中的密度矩阵

$$\hat{\rho}^{\mathrm{H}}(\beta) = \lim_{\epsilon\to 0} \hat{\rho}_\epsilon^{\mathrm{H}}(\beta), \hat{\rho}^{\mathrm{R}}(2\pi\mu) = \lim_{\epsilon\to 0} \hat{\rho}_\epsilon^{\mathrm{R}}(2\pi\mu), \tag{5.9.26}$$

则对于体积截断法和砖墙法, 有

$$S_1^{\mathrm{CS}}(\beta, \alpha=1, y) = -\{\mathrm{tr}[\hat{\rho}^{\mathrm{H}}(\beta) \ln \hat{\rho}^{\mathrm{H}}(\beta)] - \mathrm{tr}[\hat{\rho}^{\mathrm{R}}(2\pi\mu) \ln \hat{\rho}^{\mathrm{R}}(2\pi\mu)]\}. \tag{5.9.27}$$

采用 (5.9.21) 式, 我们最后得到

$$S_1^{\mathrm{TD}} = -\{\mathrm{tr}[\hat{\rho}^{\mathrm{H}}(\beta)\ln\hat{\rho}^{\mathrm{H}}(\beta)] - \mathrm{tr}[\hat{\rho}^{\mathrm{R}}(2\pi\mu)\ln\hat{\rho}^{\mathrm{R}}(2\pi\mu)]\} + \Delta S. \tag{5.9.28}$$

这一关系式表明, 热力学熵单圈修正可由统计力学熵用下面的方法得到：先减去 Rindler 熵以消除发散性, 再加上一有限的修正项 ΔS. 后面我们将证明, 第二项 ΔS 就是由于背景时空的量子修正引起的经典 B-H 熵的变化.

这里应提到, 为得到进入黑洞的熵流的正确表达式, Thorne 和 Zurek 提出从统计力学熵中减去黑洞热气的熵. 后者在视界附近和 $S_{\mathrm{Rin}}^{\mathrm{SM}}$ 相同. (5.9.28) 式可以用来证明这个假设. 但是, Thorne 和 Zurek 并未考虑我们这里讨论的熵的量子修正. (5.9.28) 式不仅解释了 S^{SM} 中的无限大体积是如何分割的, 还给出了熵的量子修正依赖于物理特性的精确表达式.

4. *熵和反作用效应*

含量子单圈修正的黑洞热力学熵为

$$S^{\mathrm{TD}} = S^{\mathrm{BH}}(r_+) + S_1^{\mathrm{TD}}. \tag{5.9.29}$$

式中

$$S^{\mathrm{BH}}(r_+) = \pi r_+^2$$

是 Bekenstein-Hawking 熵. 由于量子效应, 含量子修正的“真实解 $(\overline{\gamma}, \bar{r})$ 与经典 Schwarzschild 解 (γ, r) 不同. 特别是, dilaton 场在 $\overline{\gamma}$ 的视界处取值 $\bar{r}_+$ 与其经典值 r_+ 不同. 现在我们证明 (5.9.29) 式可以写成

$$S^{\mathrm{TD}} = \pi\bar{r}_+^2 + S_1^{\mathrm{CS}}. \tag{5.9.30}$$

证明的第一步是得到决定 $\bar{r}_+$ 的方程. 对于给定的边界条件 (β, r_B), 欧氏有效作用量的极值点确定一规则量子解, 这个解可由解场方程

$$\frac{\delta W}{\delta\overline{\gamma}} = \frac{\delta W}{\delta\bar{r}} = 0$$

得到, 解中的任意常数可由视界规则条件确定, 这样决定了 $\bar{r}_+$ 是 (β, r_+) 的函数. 对于常数的其他选择, 此解有类顶角奇异性. 我们称这解为量子奇异瞬子, 它遵从局域场方程, 但能给出 W 的整体极值点. 量子奇异瞬子由 (β, r_B) 和任意参数 $\bar{r}_+$ 确定. 我们将此解记为 $\overline{\gamma}(\bar{r}_+), \bar{r}(\bar{r}_+)]$. 在量子奇异瞬子上, 计算得到有效作用量为

$$\begin{aligned} W(\beta, r_B, \bar{r}_+) &\equiv W[\beta, r_B, \overline{\gamma}(\bar{r}_+), \bar{r}(\bar{r}_+)] \\ &= I[\beta, r_B, \overline{\gamma}(\bar{r}_+), \bar{r}(\overset{+}{r}{}_+)] + W_1^{\mathrm{CS}}[\beta, r_B, \overline{\gamma}(\bar{r}_+), \bar{r}(\bar{r}_-)]. \end{aligned} \tag{5.9.31}$$

W 的整体极值条件

$$\frac{\partial W(\beta, r_B, r_+)}{\partial r_+} = 0 \tag{5.9.32}$$

给出规则量子瞬子的视界半径 $\bar{r}_+ = \bar{r}_+(\beta, r_B)$. 在这些计算中, 我们只保留到 $\hbar$ 的一阶项. 因此, 可以把 (5.9.31) 中右边的第二项换成由经典奇异瞬子得到的 $W_1^{\rm CS}$

$$W_1^{\rm CS}[\beta, r_B, \overline{\gamma}(\bar{r}_+), \bar{r}(\bar{r}_+)] \to W_1^{\rm CS}[\beta, r_B, \gamma(\bar{r}_+), r(\bar{r}_+)].$$

也可以把 (5.9.31) 中经典作用量 I 中的 $[\overline{\gamma}(\bar{r}_+), r(\bar{r}_+)]$ 替换成经典奇异瞬子解 $[\gamma(\bar{r}_+), r(\bar{r}_+)]$, 只要保持 dilaton 场在视界处的值 $\bar{r}_+$ 不变. 为了证明这一点, 考虑经典作用量 (5.3.1) 的一般变分, 固定 r_B 和 β, 得到

$$\begin{aligned} I[\beta, r_B, \overline{\gamma}, \bar{r}] =& I[\beta, r_B, \gamma, r] \\ &+ \int \left[\left.\frac{\delta I}{\delta \gamma_{ab}}\right|_{\gamma_{ab}} (\overline{\gamma}_{ab} - \gamma_{ab}) + \frac{\delta I}{\delta r}\delta r \right] + r_{,\mu} n^\mu|_{r=r_+} \delta r_+ \\ &- 2\pi(1-\alpha) r_+ \delta r_+ + o(\hbar^2). \end{aligned} \tag{5.9.33}$$

假设 dilaton 场在顶角处的值为 r_+, 相应地由 (γ, r) 在 r_+ 处确定的角亏损记为 $2\pi(1-\alpha)$. (5.9.33) 表明, 若 γ 和 $\overline{\gamma}$ 的 r_+ 值相同, 且 (γ, r) 为经典方程 $\delta I/\delta\gamma_{ab} = 0$ 和 $\delta I/\delta r = 0$ 的解, 则由 $(\overline{\gamma}, r)$ 得到的经典作用量的值与经典值 $I[\beta, r_B, \gamma, r]$ 只差一量级为 $o(\hbar^2)$ 的项. 这就是为什么我们可以把 (5.9.31) 中的 $I[\beta, r_B, \overline{\gamma}(\bar{r}_+), \bar{r}(\bar{r}_+)]$ 换成由经典奇异瞬子所得的值 $I(\beta, r_B, r_+)$. 后者容易计算, 其表达式为

$$\begin{aligned} I(\beta, r_B, r_+) &= \beta E(r_B, r_+) - \pi r_+^2, \\ E(r_B, r_+) &\equiv r_B[1 - (1 - r_+/r_B)^{1/2}]. \end{aligned} \tag{5.9.34}$$

式中 E 为准局域能量.

定义量子视界“位置”$\bar{r}_+$ 的 (5.9.32) 可写为

$$\frac{\partial W_1^{\rm CS}(\beta, r_B, r_+)}{\partial r_+} = -2\pi\bar{r}_+(\overline{\alpha} - 1). \tag{5.9.35}$$

式中

$$\alpha = \alpha(\beta, r_B, r_+) = \beta[4\pi r_+\sqrt{1 - r_+/r_B}]^{-1},$$

$\overline{\alpha}$ 为与 $r_+ = \bar{r}_+$ 对应的经典离壳参数 α 的值. 对于经典规则瞬子, $\alpha = 1$. 这表明精确到 $\hbar^2$, 我们可以得到

$$2\pi\bar{r}_+(\overline{\alpha} - 1) = 2\pi r_+ \left(\frac{\partial \alpha}{\partial r_+}\right)_{\alpha=1} \Delta r_+. \tag{5.9.36}$$

式中 $\Delta r_+ = \bar{r}_+ - r_+$, 是量子修正引起的黑洞视界“位置”的改变. 由 α 的显式易得

$$\left(\frac{\partial \alpha}{\partial r_+}\right)_{\alpha=1} = -\left[\beta \frac{\partial r_+}{\partial \beta}\right]_{\alpha=1}^{-1}. \tag{5.9.37}$$

因此有

$$2\pi r_+ \Delta r_+ = \beta \left[\frac{\partial r_+}{\partial \beta} \frac{\partial W_1^{\mathrm{CS}}}{\partial r_+} \right]_{\alpha=1}, \tag{5.9.38}$$

且由 (5.9.22) 得到

$$\Delta S = 2\pi r_+ \Delta r_+. \tag{5.9.39}$$

于是, 精确到 $o(\hbar^2)$, 量 ΔS 可以写成

$$\Delta S = S^{\mathrm{BH}}(\bar{r}_+) - S^{\mathrm{BH}}(r_+).$$

另一方面, 考虑到 (5.9.21), 热力学熵 (5.9.29) 可以写为

$$S^{\mathrm{TD}} = S^{\mathrm{BH}}(r_+) + \Delta S + S_1^{\mathrm{CS}}.$$

至此我们便证明了 (5.9.31) 式.

5.10 小 结

现在讨论把即壳结果和各种离壳结果进行比较所得到的结果. 首先, 我们直接计算证明了, 由自由能对温度变分得到的黑洞热力学熵 S^{TD} 和由 $S^{\mathrm{SM}} = -\mathrm{tr}(\hat{\rho}^{\mathrm{H}} \ln \hat{\rho}^{\mathrm{H}})$($\hat{\rho}^{\mathrm{H}}$ 为黑洞内部自由度的密度矩阵) 确定的统计力学熵 S^{SM} 是不同的. 热力学熵包括主体部分 $S^{\mathrm{BH}} = A/4$ 和有限单圈修正 S_1^{TD}. 而 S_1^{TD} 可以由即壳有效作用量得到. 统计力学熵 S^{SM} 定义为一单圈量, 且其计算要用离壳方法. S^{SM} 可等同于体积截断熵 S_1^{VC}. 于是包含发散项 $\ln\epsilon$, 其中 ϵ 是使体积分有限而引入的固有距离截断. S^{SM} 中主要对数项也出现于砖墙模型中, 但一般地, 由于 Casimir 效应, S_1^{BM} 中有另一发散项 $\ln|\ln\epsilon|$.

S^{TD} 和 S^{SM} 不同的物理原因与作为热力学系统的黑洞的特殊性质有关. 黑洞的内部自由度由在黑洞几何内传播的激发来确定, 而这一几何又由质量参数唯一确定. 在热平衡态中, 质量是外部温度的函数. 因此, 要得到 S_1^{TD} 须改变温度. 这导致描述这些内部激发的哈密顿的改变. 另一方面, 在计算 S^{SM} 时, 黑洞质量和哈密顿是固定的.

我们已经证明, 黑洞的热力学熵可以表示为下面的形式:

$$S^{\mathrm{TD}} = S^{\mathrm{BH}}(\bar{r}_+) + [S^{\mathrm{SM}} - S^{\mathrm{SM}}_{\mathrm{Rin}}]. \tag{5.10.1}$$

式中 $S^{\mathrm{BH}}(\bar{r}_+) = \pi\bar{r}_+^2$ 是 B-H 黑洞的熵, $\bar{r}_+$ 是“量子”黑洞视界的“半径”. 第二项是黑洞和 Rindler 空间的统计力学熵之差. 二者的表达式分别为

$$S^{\mathrm{SM}} = -\mathrm{tr}[\hat{\rho}^{\mathrm{H}}(\beta) \ln \hat{\rho}^{\mathrm{H}}(\beta)]$$

和

$$S_{\text{Rin}}^{\text{SM}} = -\text{tr}[\hat{\rho}^{\text{R}}(2\pi\mu)\ln\hat{\rho}^{\text{R}}(2\pi\mu)].$$

删减法则自动去掉 S^{SM} 中的发散项.

我们曾在二维情况下用直接计算证明了式 (9.10.1), 但这似乎是普遍性质, 它(或其推广) 对四维情况肯定成立. 这是因为即壳重整化量 S^{TD} 总是有限的, 故 (5.10.1) 中的差项总会导致 S^{SM} 中体积发散的消除. 在四维情况下导出类似于 (5.10.1) 的关系的一种可行方法是利用光学度规, 使得所需的差项可由高温展开得到. 因此, 差项中奇异项 ϵ 的不同阶的系数必须与 Schwinger-De Witt 系数相联系.

顶角奇异性方法的一个显著特点是 (至少在二维情况下) 可以立即给出有限的结果

$$S_1^{\text{CS}} = S^{\text{SM}} - S_{\text{Rin}}^{\text{CS}}. \tag{5.10.2}$$

S_1^{CS} 有限而 S_1^{VC} 含有体积发散的数学原因与用来计算相应的有效作用量的流形拓扑不同有关. 对于 S_1^{VC}, 标准流形有柱面 (或环) 的拓扑; 而对于 S_1^{CS}, 拓扑为 D^2, 与 G-H 瞬子的拓扑相同. 当从标准单位盘 D^2 上切下一半径为 ϵ 的小盘而变成环时, 其数学操作可解释为减去缠绕熵 $S_{\text{Rin}}^{\text{SM}} = -\text{tr}(\hat{\rho}^{\text{R}}\ln\rho^{\text{R}})$.

再次强调, 在我们所采用的方法中, 一开始就已经完成了重整, 故只有可观测的有限耦合常数出现于结果中. 我们论证了某些离壳方法需要附加一截断参数 ϵ. 它与紫外截断 δ 完全无关, 见 (5.3.9) 和 (5.6.1). 而且参数 ϵ 只出现在中间运算过程中, 不含于最后的可观测结果中. 我们证明了物理可观测量的量子修正总可由即壳量得到. 于是, 对于质量远大于普朗克质量的黑洞而言, 可观测量的量子修正很小, 与普朗克尺度的物理无关. 这就区分了即壳量和离壳量, 如 S^{SM}.

还有一个更一般的问题要说明. 既然表征热平衡黑洞或表征黑洞从一平衡态到另一平衡态的跃迁的可观测量可以只由即壳量得到, 那么为什么在黑洞热力学中还要用离壳方法呢? 我们已经看到, 原因之一是建立统计力学熵和热力学熵之间关系的需要, 在这个意义上, 离壳方法可以看作计算和解释即壳量的有用工具. 但我们相信, 除了这个简单的理由以外, 一定还有更深层次的原因. 离壳方法对描述含黑洞系统的非平衡过程也会是有用的. 在这种情况下, 热力学系统的量子涨落和热涨落可由随机噪声来描述, 这相当于系统离壳情况. 因此, 可以想到, 由视界附近能量激增而激发的黑洞向平衡态过渡的过程, 会用到某些上述的离壳特性.

第 6 章　黑洞的量子效应

6.1　粒子对的自发产生过程

Zeldovich (1972),Starobinsky (1973) 和 Unruh (1974) 研究了稳态时空中粒子对的产生过程.

弯曲时空中自旋为零的荷电粒子的克莱因–高登方程具有形式

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}-\mathrm{i}\varepsilon A_\mu\right)\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}-\mathrm{i}\varepsilon A_\nu\right)\right]\phi(x)-\mu^2\phi(x)=0. \tag{6.1.1}$$

考虑稳态时空背景, 将克尔–纽曼度规代入, 上式可写为

$$\begin{aligned}&\left\{\partial_r\Delta\partial_r-\frac{1}{\Delta}[(r^2+a^2)\partial_t+a\partial_\varphi+\mathrm{i}Q\varepsilon r]^2-\mu^2r^2\right.\\&\left.+\frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta\sin\theta\partial_\theta+\left(\frac{1}{\sin\theta}\partial_\varphi+a\sin\theta\partial_t\right)^2-\mu^2a^2\cos^2\theta\right\}\varphi=0.\end{aligned} \tag{6.1.2}$$

此方程可分离变量. 令

$$\varphi=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m\varphi-\omega t)}\chi^{(\theta)}\psi^{(r)}, \tag{6.1.3}$$

得到

$$\left[-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\sin\theta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}+\left(\frac{m}{\sin\theta}-a\omega\sin\theta\right)^2+\mu^2a^2\cos^2\theta\right]\chi=K\chi, \tag{6.1.4}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}z^2}=-V\psi. \tag{6.1.5}$$

式中

$$V=\Delta(\mu^2r^2+K)-[\omega(r^2+a^2)-am-Q\varepsilon r]^2, \tag{6.1.6}$$

$$\mathrm{d}z=-\mathrm{d}r/\Delta. \tag{6.1.7}$$

由 (6.1.5) 知 $V>0$ 是禁区, 我们有 $V<0$, 或

$$[\omega(r^2+a^2)-am-Q\varepsilon r]^2-\Delta(\mu^2r^2+K)\geqslant 0. \tag{6.1.8}$$

在禁区内 $V>0$, 可把有效势 V 看作势垒. 为了看清这一点, 可引入 Tortoise 坐标

$$\frac{\mathrm{d}r^*}{\mathrm{d}r}=\frac{r^2+a^2}{\Delta}. \tag{①}$$

此时视界为

$$r^* = -\infty, \quad V \to -(\omega - m\Omega)^2,$$

空间无限远处为

$$r^* = \infty, \quad V \to -\omega^2,$$

中间为 $V > 0$. 所以 V 为具有一定宽度的势垒.

下面计算自真空中的粒子产生率. 利用量子场论中入射态和出射态的概念, 设外场局限于时空范围 Ω 内, 入射态和出射态分别为 Ω 的过去无限大和将来无限大的态. 分别以

$$P_i^{\text{in}}(x) \quad 和 \quad n_i^{\text{in}}(x) \equiv (P_i^{\text{in}}(x))^*$$

表示入射正能态和负能态, 则它们组成一正交归一的完备集

$$\begin{aligned} &(P_i^{\text{in}}, P_k^{\text{in}}) = \delta_{ik} = \pm(n_i^{\text{in}}, n_k^{\text{in}}), \\ &(P_i^{\text{in}}, n_k^{\text{in}}) = 0. \end{aligned} \tag{6.1.9}$$

式中正负号分别对应于费米子和玻色子.

任意场函数可以展开为

$$\varphi(x) = \sum_i [a_i^{\text{in}} P_i^{\text{in}}(x) + (a_i^{\text{in}}) + n_i^{\text{in}}(x)], \tag{6.1.10}$$

其中 a_i^{in} 和 $(a_i^{\text{in}})^+$ 分别是入射正能粒子的湮灭算符和产生算符. 它们满足下述量子条件:

$$[a_i^{\text{in}}, (a_i^{\text{in}})^+]_\pm = \delta_{ik}. \tag{6.1.11}$$

我们定义入射真空态 $|in>_{\text{vac}}$ 为

$$a_i^{\text{in}}|in>_{\text{vac}} = 0, \quad \forall i. \tag{6.1.12}$$

由此可得 $a_i^+ a_i|in>_{\text{vac}} = 0$, 即 $N_i^{\text{in}}|in>_{\text{vac}} = 0, \forall i$. N_i^{in} 为入射正能粒子数算符. 所以, (8.9.12) 式意味着入射真空态不含入射正能粒子.

完全类似, 我们也可以定义

$$P_i^{\text{out}}(x), \quad n_i^{\text{out}}(x) \quad 和 \quad |\text{out}>_{\text{vac}}.$$

所谓真空中产生粒子, 即入射真空态 $|\text{in}>_{\text{vac}}$ 中包含出射粒子, 或

$$n_i = {}_{\text{vac}}<\text{in}|(a_i^{\text{out}}) + a_i^{\text{out}}|in>_{\text{vac}} \neq 0, \tag{6.1.13}$$

其中 n_i 代表平均粒子数.

由

$$\varphi = \sum_i [a_i^{\text{in}} p_i^{\text{in}} + (a_i^{\text{in}}) + n_i^{\text{in}}] = \sum_i [a_i^{\text{out}} p_i^{\text{out}} + (a_i^{\text{out}}) + n_i^{\text{out}}],$$

两边同乘以 $(p_i^{\text{out}})^+$ 并利用 (8.9.9) 式可得

$$a_i^{\text{out}} = \sum_k [(p_i^{\text{out}}, p_k^{\text{in}}) a_k^{\text{in}} + (p_i^{\text{out}}, n_k^{\text{in}})(a_k^{\text{in}})^+], \tag{6.1.14}$$

$$(a_i^{\text{out}})^+ = \sum_k [(p_i^{\text{out}}, p_i^{\text{in}})^+ (a_k^{\text{in}})^+ + (p_i^{\text{out}}, n_k^{\text{in}})^+ a_k^{\text{in}}].$$

引入

$$\alpha_{ik} \equiv (p_i^{\text{out}}, p_k^{\text{in}}), \quad \beta_{ik} \equiv (p_i^{\text{out}}, n_k^{\text{in}}), \tag{6.1.15}$$

上两式便可简写为

$$\begin{aligned} a_i^{\text{out}} &= \sum_k (\alpha_{ik} a_k^{\text{in}} + \beta_{ik} a_k^{\text{in}+}), \\ (a_i^{\text{out}})^+ &= \sum_k [\alpha_{ik}^* (a_k^{\text{in}})^+ + \beta_{ik}^* a_k^{\text{in}}]. \end{aligned} \tag{6.1.16}$$

这就是 Bogoliubov 变换.

不难得出

$$p_i^{\text{out}} = \sum_k [\alpha_{ik} p_k^{\text{in}} + \beta_{in} n_k^{\text{in}}],$$

$$n_k^{\text{in}} = \sum_i [\beta_{ik} p_i^{\text{out}} + \alpha_{ik} n_i^{\text{out}}], \tag{6.1.17}$$

式中 β_{ik} 叫正负频混合系数.

由 (6.1.16) 式知 (6.1.13) 式中的 n_i 为

$$n_i = \sum_k \beta_{ik}^* \cdot \beta_{ik} = \sum_k |\beta_{ik}|^2 = \sum_k |(p_i^{\text{out}}, n_k^{\text{in}})|^2. \tag{6.1.18}$$

可见, 自真空中产生粒子, 或入射真空中包含出射粒子的关键是出现正负频的混合.

在弯曲时空中, 只要我们能定义正负频解, 就能定义产生和湮灭算符, 就能定义真空, 而只要两套不同的真空出现正负频混合, 就可以自真空中产生粒子.

在目前所考虑的 Klein 机制中, 正负频混合系数为

$$\beta_{ik} = (p_i^{\text{out}}, n_k^{\text{in}}),$$

正好就是透射率幅

$$T_{ik} = (p_i^{\text{out}}, n_k^{\text{in}}). \tag{6.1.19}$$

因此在 Klein 机制中, 强静电场引起正负能级的交错是产生正负频混合的原因.

(8.9.19) 式中 $|T_{ik}|^2 = |\beta_{ik}|^2$ 与自真空中以"k"标志的入射负能态 n_k^{in} 产生以"i"标志的出射正能态 p_i^{out} 的平均粒子数成正比, 而所产生的平均总粒子数为

$$N = \sum_i n_i \sim \sum_{i,k} |T_{ik}|^2, \tag{6.1.20}$$

式中"i", "k"等表示一组完备量子数集合.

考虑到守恒律的限制,

$$T_{ik} = T_i \delta_{ik} = T_{\omega_i \alpha_i} \delta(\omega_i - \omega_k) \delta_{\alpha_i \alpha_k},$$

其中 ω 表示初态或末态的能量, α 表示初态或末态的分立量子数, 则

$$n_i \sim |T_{ik}|^2 = |T_i|^2 = |T_{\omega_i \alpha_i}|^2 [\delta(\omega_i - \omega_k)]^2,$$

$$N = \sum_i n_i \sim \sum_{i,k} |T_{\omega_i \alpha_i}|^2 \delta(\omega_i - \omega_k) \frac{1}{2\pi} \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_i - \omega_k)t} \mathrm{d}t$$

$$= \sum_{i,k} |T_{\omega_i \alpha_i}|^2 \delta(\omega_i - \omega_k) \frac{1}{2\pi} \int \mathrm{d}t,$$

故

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} \sim \frac{V^2}{(2\pi)^6} \int \mathrm{d}\omega_i \int \mathrm{d}\omega_k \sum_{ki} |T_{\omega_i \alpha_i}|^2 \delta(\omega_i - \omega_k) \frac{1}{2\pi}$$

$$= \frac{V^2}{(2\pi)^6} \int \mathrm{d}\omega \sum_i \frac{1}{2\pi} |T_{\omega_i \alpha_i}|^2. \tag{6.1.21}$$

对于克尔–纽曼时空, 作类似处理, 可以得到黑洞外粒子对的产生率

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = \int \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} \sum_{m,k} |T|^2_{\omega,m,k}. \tag{6.1.22}$$

用 WKB 近似法, 可以计算

$$\xi = 2 \int V^{1/2} \mathrm{d}z, \tag{6.1.23}$$

$$|T^2| = \mathrm{e}^{-\xi},$$

式中积分沿势垒. 引入局部正交标架 ω_μ

$$\mathrm{d}\omega^\mu = \alpha^\mu_\nu \mathrm{d}x^\nu,$$

$$(\alpha^\mu_\nu) = \begin{bmatrix} \dfrac{\Delta^{1/2}}{\rho} & 0 & 0 & -\left(\dfrac{\Delta^{1/2}}{\rho} a \sin^2\theta\right) \\ 0 & \dfrac{\rho}{\Delta^{1/2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho & 0 \\ -\sin\theta \dfrac{a}{\rho} & 0 & 0 & \sin\theta \dfrac{r^2 + a^2}{\rho} \end{bmatrix} \tag{6.1.24}$$

此时克尔–纽曼度规具有形式

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}\omega_0^2 + \mathrm{d}\omega_1^2 + \mathrm{d}\omega_2^2 + \mathrm{d}\omega_3^2,$$

式中

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega^0 &= \frac{\Delta^{1/2}}{\rho}(\mathrm{d}t - a\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi),\\
\mathrm{d}\omega^1 &= \frac{\rho}{\Delta^{1/2}}\mathrm{d}r,\\
\mathrm{d}\omega^2 &= \rho\mathrm{d}\theta,\\
\mathrm{d}\omega^3 &= \sin\theta\cdot\frac{1}{\rho}[(r^2+a^2)\mathrm{d}\varphi - a\mathrm{d}t].
\end{aligned} \tag{6.1.25}$$

由于

$$a = \rho^2\sin\theta, \quad \alpha = |\alpha^\mu_\nu|,$$

我们得到

$$(\alpha^\mu_\nu) = \begin{bmatrix} \dfrac{r^2+a^2}{\Delta^{1/2}\rho} & 0 & 0 & \dfrac{a\sin\theta}{\rho} \\ 0 & \dfrac{\Delta^{1/2}}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{\rho} & 0 \\ \dfrac{a}{\Delta^{1/2}\rho} & & & \dfrac{1}{\rho\sin\theta} \end{bmatrix} \tag{6.1.26}$$

于是在正交标架中有

$$F_{\mu\nu} = \alpha^\tau_{\mu'}\alpha^\sigma_{\nu'}F_{\tau\sigma}. \tag{6.1.27}$$

电场和磁场的分量分别为

$$\begin{aligned}
E_1 &= \mathrm{e}\rho^{-4}(r^2 - a^2\cos^2\theta),\\
B_1 &= \mathrm{e}\rho^{-4}2ar\cos\theta.\\
E_0 &= E_2 = E_3 = B_0 = B_2 = B_3 = 0.
\end{aligned} \tag{6.1.28}$$

此式表明, 电场和磁场互相平行, 这是引入上述局部标架的结果.

在局部时空范围内, 我们采用平直时空近似和均匀电磁场近似. 在这种近似条件下, 海森伯和欧拉早就指出, 波函数可以由分离变量法求得. 自旋为 1/2 的解具有形式

$$\varphi = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_x x - \omega t)}u_n[(\varepsilon B)^{1/2}(y^2 + k_x/\varepsilon B)]\psi(z), \tag{6.1.29}$$

式中 u_n 为 n 阶谐振子的波函数, $\psi(z)$ 满足方程

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}\xi^2} + (\xi^2 - \lambda)\psi = 0, \tag{6.1.30}$$

$$\xi = \pi\mu\frac{2}{\varepsilon E_1} + 2\pi\left(n + \frac{1}{2} + \sigma_1\right)\frac{B_1}{E_1}. \tag{6.1.31}$$

透射率

$$T^2 = \mathrm{e}^{-\xi}, \tag{6.1.32}$$

在 $n = 0, \sigma = -1/2$ 时最大

$$u_n = N_n H_n(\alpha\xi)\exp\left(-\frac{1}{2}\alpha^2\xi^2\right). \tag{6.1.33}$$

$n = 0$ 时, 对应谐振子的基态或粒子只有沿 ω_1 方向的运动, $\sigma = -\frac{1}{2}$ 表示透射的费米子流是极化的, 分支比

$$\frac{\Gamma^2_{-1/2}}{\Gamma^2_{1/2}} = \exp(-2\pi B_1/E_1).$$

自旋为 1/2 的费米子, 所产生的总粒子对数为

$$N = \int \sqrt{g}\mathrm{d}^4x\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\varepsilon E_1}{\pi}\right)^2\frac{\pi B_1/E_1}{\mathrm{th}(\pi B_1/E_1)}\exp(-\pi\mu^2/\varepsilon E_1), \tag{6.1.34}$$

式中

$$g = \rho^4\sin^2\theta. \tag{6.1.35}$$

6.2 霍金辐射

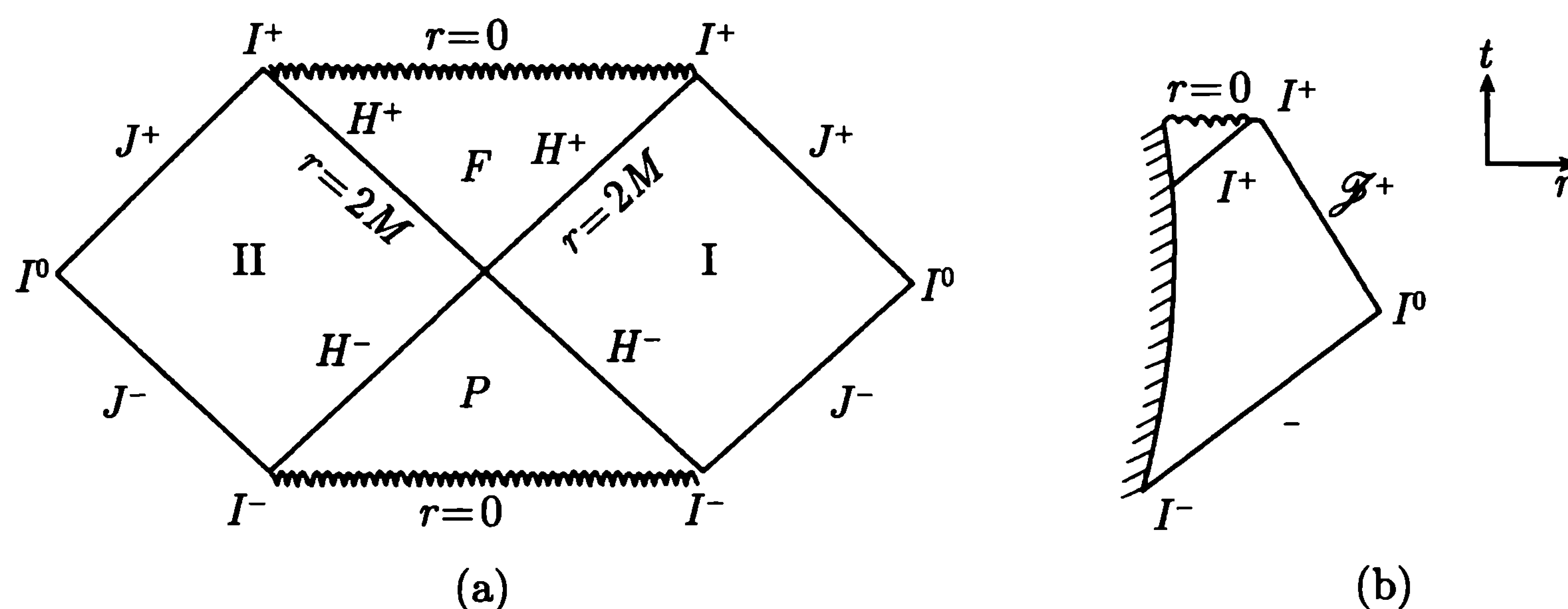
霍金 (1974) 发现, 黑洞像一个黑体一样, 具有温度 $T_B = \dfrac{\hbar\kappa}{ck}$ 标志的热辐射. 霍金计算的是一颗坍缩的恒星正在形成黑洞时的量子效应. 后来人们进一步研究发现, 完成坍缩后的永久黑洞以及任何一个具有未来世界的静态和稳态时空都具有完全相同的霍金辐射.

下面就介绍霍金所做的推导.

图 5-20(a) 所示为一已完成坍缩的 Schwarzschild 黑洞的 Penrose 图, 零无限远 J^+ 和 J^- 是渐近闵可夫斯基区. 对 I 区来说, 可以选择 $J^-\bigcup I^-\bigcup H^-$ 为 Cauchy 面. 图 5-20(b) 表示坍缩中的黑洞 (Schwarzschild 黑洞), 阴影部分为坍缩星体占据的部分. 此时 I 区的 Cauchy 面是 $I^-\bigcup J^-$, 而 J^+ 和 J^- 仍为渐近闵可夫斯基区.

设 $\mathscr{J}^-$ 处 $(t = -\infty, r = +\infty)$ 的入射标量波的正、负频解为

$$f_{\omega lm}(r,\theta,\varphi,t), f^*_{\omega lm}(r,\theta,\varphi,t).$$



(a)　　　　　　(b)

图 5-20

任一标量波函数可如下展开:

$$\varphi(x)=\sum_{l,m}\int \mathrm{d}\omega(a_{\omega lm}f_{\omega lm}+a^{+}_{\omega lm}f^{*}_{\omega lm}). \tag{6.2.1}$$

入射真空 $|0\rangle_{\text{in}}$ 的定义为

$$\begin{aligned}&a_{\omega lm}|0\rangle_{\text{in}}=0\\&\forall\omega,l,m,\end{aligned} \tag{6.2.2}$$

在 $t=+\infty$ 时的出射标量波可在 $\mathscr{J}^{+}(t=+\infty,r=+\infty)$ 和 $H^{+}(\dot{t}=+\infty,r=2m)$ 两处出现, 故 $t=+\infty$ 时的正、负频解分别为

$$(p_{\omega lm},p^{*}_{\omega lm})\mathscr{J}^{+}\text{处},\ (q_{\omega lm},q^{*}_{\omega lm})H^{+}\text{处}.$$

任一标量波函数可展开为

$$\varphi(x)=\sum_{l,m}\int \alpha\omega(b_{\omega lm}p_{\omega lm}+b^{+}_{\omega lm}p^{*}_{\omega lm}+c_{\omega lm}q_{\omega lm}+c^{+}_{\omega lm}q^{*}_{\omega lm}). \tag{6.2.3}$$

现在我们感兴趣的是计算正负频混合系数

$$\beta_{\omega lm;\omega' lm}=(p_{\omega lm}f^{*}_{\omega lm}), \tag{6.2.4}$$

及入射真空中所含出射粒子数

$$\underset{\text{in}}{\langle}\, 0|N^{\text{out}}_{\omega ln}|0\,\underset{\text{in}}{\rangle}=\underset{\text{in}}{\langle}\, 0|b^{+}_{\omega lm}b_{\omega lm}|0\,\underset{\text{in}}{\rangle}=\int \mathrm{d}\omega'|\beta_{\omega lm;\omega' lm}|^{2}. \tag{6.2.5}$$

为了简单, 我们讨论无质量标量粒子的产生.

坍缩星的终态对应的外部度规为 Schwarzschild 外部度规

$$\mathrm{d}s^{2}=\left(1-\frac{2m}{r}\right)\mathrm{d}t^{2}-\left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1}\mathrm{d}r^{2}-r^{2}\mathrm{d}\Omega^{2}. \tag{6.2.6}$$

在无质量标量场的情况下, 可以用分离变量法解克莱因–高登方程

$$\Delta_\mu \Delta^\mu_\varphi = 0. \tag{6.2.7}$$

令

$$\varphi(r,\theta,\varphi,t) \sim r^{-1} R_{\omega l}(r) Y_{lm}(\theta,\varphi) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}, \tag{6.2.8}$$

则得到径向方程

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^{*2}} R_{\omega l} + \left\{\omega^2 - [l(l+1)r^{-2} + 2mr^{-3}]\left(1 - \frac{2m}{r}\right)\right\} R_{\omega l} = 0, \tag{6.2.9}$$

式中

$$r^* \equiv r + 2m \ln\left|\frac{r}{2m} - 1\right|, \tag{6.2.10}$$

为 Tortoise 坐标.

引入有效势

$$V \equiv [l(l+1)r^{-2} + 2mr^{-3}](1 - 2mr^{-1}),$$
$$H \equiv \omega^2,$$

则 (6.2.9) 可写为

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^{*2}} R_{\omega l} + (H - V) R_{\omega l} = 0. \tag{6.2.11}$$

当 $r \to \infty (r^* \to \infty)$ 时, $V \to 0$, 于是得到解

$$P_{\omega lm} = r^{-1} \exp(-\mathrm{i}\omega u) Y_{lm} \quad (\text{出射波}), \tag{6.2.12}$$

$$f_{\omega lm} = r^{-1} \exp(-\mathrm{i}\omega v) Y_{lm} \quad (\text{入射波}), \tag{6.2.13}$$

式中

$$u = t - r^*, \quad v = t + r^*,$$

为双零 (类光) 坐标. 在这一坐标系中, Schwarzschild 度规具有形式

$$\mathrm{d}s^2 = (1 - 2mr^{-1})\mathrm{d}u\mathrm{d}v - r^2 \mathrm{d}\Omega^2. \tag{6.2.14}$$

从 $\mathscr{I}^-$ 来的入射波 $f_{\omega lm}$ 沿着零短程线 $v=$const 传播, 经过坍缩星中心, 然后“反射”, 沿着 u=const 到达 $\mathscr{I}^+$, 变成出射波 $p_{\omega lm}$(图 5-21).

由于星体的塌缩将引起出射波有一甚大的红移, 因此入射波 $f_{\omega' lm}$ 应有一甚高的频率 ω', 这样我们就可采用几何光学近似以讨论上述“反射”过程.

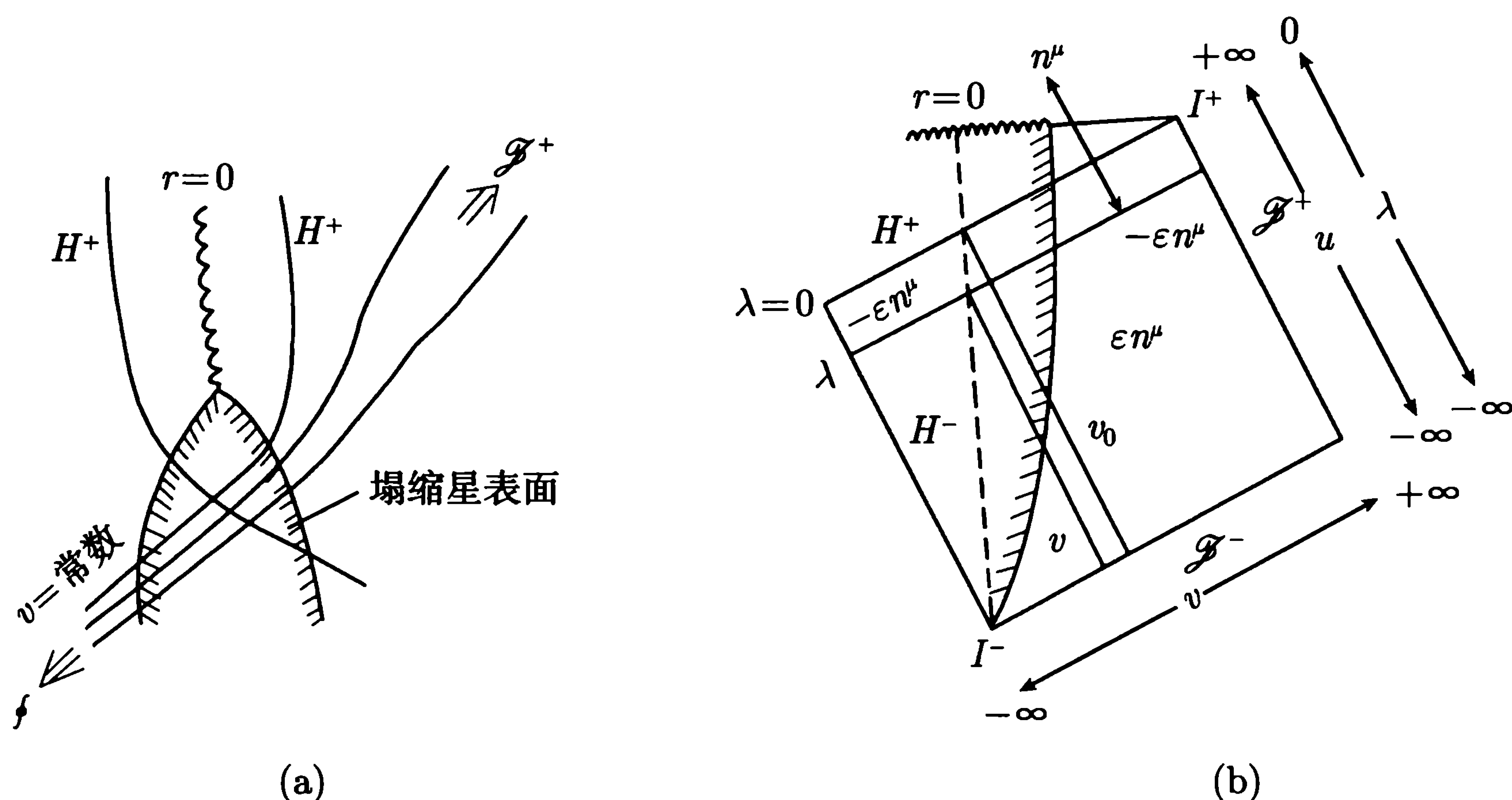


图 5-21

现在我们希望找出函数关系

$$u = u(v),$$

令 $v = v_0$ 是投射在塌缩星上而变为 H^+ 的入射线路径, 显然所有晚于 $v_0(v > v_0)$ 的入射线都不可能被"反射"出来, 只有早于 $v_0(v < v_0)$ 的入射线才可能被"反射"以形成出射线. 在 H^+ 某点作一指向未来的零矢 n^μ, 设 $-\varepsilon n^\mu$(ε 是一小正数) 是联结此点与一大 u 值的邻近世界线的矢量, 划出完整的 Penrose 图, 把矢量 $-\varepsilon n^\mu$ 沿 H^+ 平行移动到 H^+ 与 H^- 的交点处, 此时矢量 $-\varepsilon n^\mu$ 整个在 H^-, 取 $\lambda = -c\mathrm{e}^{-\kappa u}\left(c > 0, \kappa = \dfrac{1}{4m}\right)$ 为 H^- 上的母线的仿射参量, 在交点引入该点的局部惯性系, 则在交点, 有

$$\lambda = 0, \quad \mathrm{d}x^\mu/\mathrm{d}\lambda = n^\mu,$$
$$\frac{\mathrm{d}^2x^\mu}{\mathrm{d}\lambda^2} = \frac{\mathrm{d}n^\mu}{\mathrm{d}\lambda} = 0.$$

这表明, 在 $\lambda = 0$ 的邻域, n^μ 是一个常矢量, 因而 H^- 上矢量 $-\varepsilon n^\mu$ 的长度即

$$-\varepsilon n^\mu = \int_0^\lambda \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}\mathrm{d}\lambda = n^\mu \cdot \lambda = x^\mu(\lambda) - x^\mu(0).$$

由此得

$$\varepsilon = c\mathrm{e}^{-\kappa u}.$$

现在把矢量 $-\varepsilon n^\mu$ 移回原位置, 然后把它平移到 H^+ 与 v_0 的交点, 再沿 v_0 平移到极早时的大 r 处, 由于平移时矢量与短程线间的夹角不变, 所以矢量 $-\varepsilon n^\mu$ 将如图 5-21 所示把 v_0 与某个 v 连接起来, 即

$$v - v_0 = -\varepsilon n^\mu.$$

在 $r=+\infty$, 时空平直, 光线的切矢 $n^\mu=\dfrac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}$ 为一常数 D, 即

$$v-v_0=-\varepsilon D=-cD\mathrm{e}^{-\kappa u}.$$

故

$$u=u(v)=-4m\ln\left(\frac{v_0-v}{cD}\right). \tag{6.2.15}$$

可把出射波

$$P_{\omega lm}=N\omega^{-1/2}r^{-1}\exp(\mathrm{i}\omega u)Y_{lm}$$

改写为

$$\begin{aligned}&P_{\omega lm}=N\omega^{-1/2}r^{-1}\exp\left[\mathrm{i}4m\omega\ln\left(\frac{v_0-v}{cD}\right)\right]Y_{lm},\\&N=2^{-3/2}\cdot\pi^{-1}\quad(v<v_0),\\&N=0,\quad v>v_0.\end{aligned}$$

由

$$P_{\omega lm}=\int\mathrm{d}\omega'(\alpha_{\omega lm;\omega'lm}f_{\omega'lm}+\beta_{\omega lm;\omega'lm}f^*_{\omega'lm})$$

可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}v\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega'v}P_{\omega lm}=N\omega'^{-1/2}r^{-1}Y_{lm}\alpha_{\omega lm;\omega'lm},\\&\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}v\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega'v}P_{\omega lm}=N\omega'^{-1/2}r^{-1}Y_{lm}\beta_{\omega lm;\omega'lm},\end{aligned}$$

故

$$\alpha_{\omega lm;\omega'lm}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{v_0}\mathrm{d}v\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^{1/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega'v}\exp\left[\mathrm{i}4m\omega\ln\frac{v_0-v}{cD}\right], \tag{6.2.16}$$

$$\beta_{\omega lm;\omega'lm}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{v_0}\mathrm{d}v\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^{1/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega'v}\exp\left[\mathrm{i}4m\omega\ln\frac{v_0-v}{cD}\right], \tag{6.2.17}$$

显然

$$\beta_{\omega\omega'}=-\mathrm{i}\alpha_{\omega(-\omega')} \tag{6.2.18}$$

成立, $\alpha_{\omega(-\omega')}$ 可看作是把 $\alpha_{\omega\omega'}$ 延拓到负 ω' 轴上的结果, 但

$$\begin{aligned}\alpha_{\omega\omega'}&=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{v_0}\mathrm{d}v\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega'v}\left(\frac{v_0-v}{cD}\right)^{\mathrm{i}\frac{\omega}{\kappa}}\\&=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^{1/2}\left(\frac{v_0}{cD}\right)^{\mathrm{i}\frac{\omega}{\kappa}}\int_{-\infty}^{v_0}\mathrm{d}v\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega'v}\left(1-\frac{v}{v_0}\right)^{\mathrm{i}\frac{\omega}{\kappa}}\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^{1/2}\left(\frac{v_0}{cD}\right)^{\mathrm{i}\frac{\omega}{\kappa}} 2\pi(-\omega')^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{\kappa}-1}\cdot \mathrm{e}^{\omega}/\Gamma\left(-\mathrm{i}\frac{\omega}{\kappa}\right). \tag{6.2.19}$$

注意, 为了使积分收敛, 我们进行了代换

$$\omega' \to \omega' \to \mathrm{i}\epsilon.$$

$\omega'=0$ 是一个奇点, 为了把 ω' 从正值解析延拓到负值, 我们必须沿下半复 ω' 平面内的半圆周延拓过去 (图 5-22), 即

$$\omega' \to \omega' \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi},$$

故

$$\alpha_{\omega(-\omega')} = -\mathrm{i}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi})^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{\kappa}-1}\alpha_{\omega\omega'} = \mathrm{i}\mathrm{e}^{-\pi\frac{\omega}{\kappa}}\alpha_{\omega\omega'}, \tag{6.2.20}$$

$$\beta^*_{\omega\omega'}\beta_{\omega\omega'} = \mathrm{e}^{-2\pi\frac{\omega}{\kappa}}\alpha^*_{\omega\omega'}\alpha_{\omega\omega'}.$$

由

$$(p_\omega p_\omega) = 1$$

得

$$\int \mathrm{d}\omega'[(\alpha\alpha^*)_{\omega\omega'} - (\beta^*\beta)_{\omega\omega'}] = 1.$$

即

$$\langle N_{\omega lm}\rangle = \int \mathrm{d}\omega'|\beta_{\omega\omega'}|^2 = \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{2\pi\omega}{\kappa}}-1} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{\omega}{\kappa T}}-1}, \tag{6.2.21}$$

式中

$$T = \frac{\kappa}{2\pi k}\left(\frac{h\kappa}{2\pi kc}\right).$$

此即著名的霍金辐射公式.

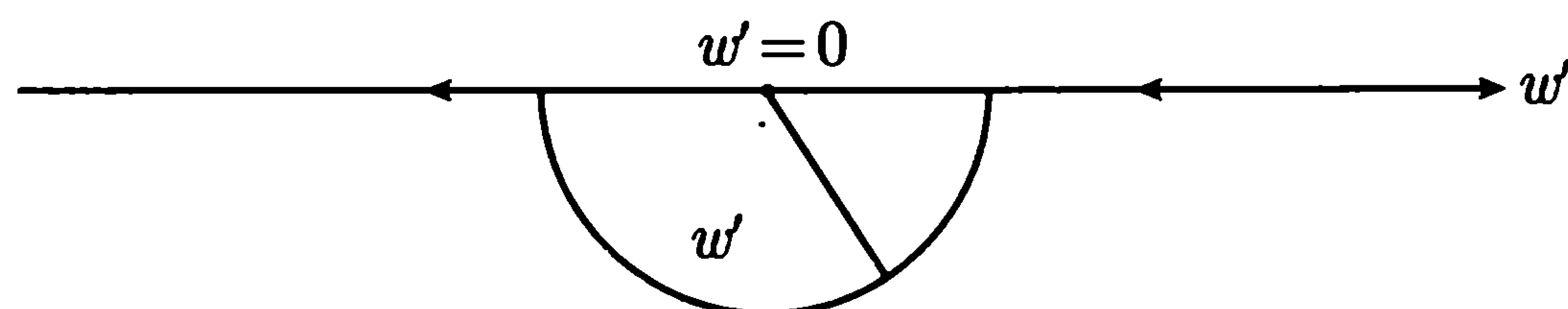


图 5-22

在一般情况下, 可以证明, 任一具有未来视界的静态或稳态时空均具有霍金热辐射.

霍金辐射的发现, 不仅解决了黑洞热力学中存在的矛盾, 而且揭示了引力理论、热力学和量子理论之间的联系.

当黑洞温度总比周围环境的温度高时, 黑洞将不断向外辐射, 失去其质量, 最后可能“爆炸”消失. 下面我们就来讨论黑洞的寿命.

由于霍金公式和普朗克公式相似, 故可利用斯特藩–玻尔兹曼公式估算黑洞的放能率和寿命.

根据斯特藩–波尔兹曼定律, 我们有

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t\mathrm{d}A} = \sigma T^4, \quad \sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15\hbar^3 c^2},$$
$$A = 16\pi G^2 c^{-4} M^2.$$

由此得到放能率

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} \simeq 10^{46}(M^{-2}) \cdot \Gamma \mathrm{erg} \cdot \mathrm{s}^{-1}, \tag{6.2.22}$$

式中 Γ 为势垒穿透率, 可近似地取为 1.

质量为 M 的黑洞, 其寿命为

$$\tau \approx 10^{-27} M^3 \mathrm{s} \approx 10^{10} \left[\frac{M}{M_\odot}\right]^3 (\mathrm{a}). \tag{6.2.23}$$

若设 $M = M_\odot$, 则 $T \simeq 10^{-6}\mathrm{K}$, 放能率为

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} \approx 10^{-20} \mathrm{erg} \cdot \mathrm{s}^{-1},$$

寿命为

$$\tau \approx 10^{68} \mathrm{a}.$$

如果按这样的速度减少质量, 这样的恒星在宇宙诞生至今这么长时间里质量只减少 $10^{-22}\mathrm{g}$. 这是完全可以忽略不计的.

如果设 $M < 10^{15}\mathrm{g}$(微黑洞), 比如设

$$M = 3 \times 10^9 \mathrm{g} \approx 3000\mathrm{T},$$
$$T \approx 10^{18}\mathrm{K},$$

则放能率为

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} \approx 10^{29} \mathrm{erg} \cdot \mathrm{s}^{-1} = 10^{22}\mathrm{W},$$

寿命

$$\tau \approx 10^{-1}\mathrm{s}.$$

对于 $M \approx 10^{15}\mathrm{g}$ 的所谓原初小黑洞, 有

$$T \approx 10^{12}\mathrm{K},$$
$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} \approx 10^{16} \mathrm{erg} \cdot \mathrm{s}^{-1} = 10^{9}\mathrm{W},$$
$$T \approx 10^{10}\mathrm{a}. \tag{6.2.24}$$

由于宇宙极早期物质密度的涨落, 有可能形成原初小黑洞和微黑洞. 如果确有许多这类小黑洞, 由 (6.2.24) 可知, 目前应能观测到它们的晚期爆炸 (死亡).

6.3　静态和稳态黑洞的量子辐射

1. 静态黎曼时空中狄拉克粒子的辐射

在静态时空中有 $g_{0i}=0$, 我们讨论已经通过适当坐标变换使度规对角化了的情况:

$$\mathrm{d}s^2=a_0^2\mathrm{d}t^2-a_1^2\mathrm{d}x^2-a_2^2\mathrm{d}y^2-a_3^2\mathrm{d}z^2. \tag{6.3.1}$$

由此我们构造零标架

$$\begin{aligned}
&l_\mu=\frac{1}{\sqrt{2}}(a_0,-a_1,0,0),\quad n_\mu=\frac{1}{\sqrt{2}}(a_0,-a_1,0,0),\\
&m_\mu=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,a_2,\mathrm{i}a_3),\quad \bar{m}_\mu=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,a_2,-\mathrm{i}a_3).
\end{aligned} \tag{6.3.2}$$

从而得到 Newman-Penrose 旋系数

$$\begin{aligned}
&\kappa=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{a_0a_2}\frac{\partial}{\partial y}a_0-\frac{1}{a_1a_2}\frac{\partial}{\partial y}a_1+\frac{\mathrm{i}}{a_0a_3}\frac{\partial}{\partial z}a_0-\frac{\mathrm{i}}{a_1a_3}\frac{\partial}{\partial z}a_1\right),\\
&\pi=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{a_0a_2}\frac{\partial}{\partial y}a_0+\frac{1}{a_1a_2}\frac{\partial}{\partial y}a_1-\frac{\mathrm{i}}{a_0a_3}\frac{\partial}{\partial z}a_0-\frac{\mathrm{i}}{a_1a_3}\frac{\partial}{\partial z}a_1\right),\\
&\varepsilon=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{1}{a_0a_1}\frac{\partial}{\partial x}a_0,\\
&\rho=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{a_1a_2}\frac{\partial}{\partial x}a_2+\frac{1}{a_1a_3}\frac{\partial}{\partial x}a_3\right),\\
&\lambda=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{a_1a_2}\frac{\partial}{\partial x}a_2-\frac{1}{a_1a_3}\frac{\partial}{\partial x}a_3\right),\\
&\alpha=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{a_2a_3}\frac{\partial}{\partial x}a_3-\frac{\mathrm{i}}{a_2a_3}\frac{\partial}{\partial z}a_2\right),\\
&\sigma=\lambda,\quad \mu=\rho,\quad \beta=-\overline{\alpha},\quad \nu=-\overline{\kappa},\quad \tau=-\overline{\pi},\quad \gamma=\varepsilon.
\end{aligned} \tag{6.3.3}$$

旋坐标形式的狄拉克粒子场方程具有形式

$$\begin{aligned}
&\nabla_{A\dot{B}}P^A+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}\mu\bar{Q}_{\dot{B}}=0,\\
&\nabla_{A\dot{B}}Q^A+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}\mu\bar{P}_{\dot{B}}=0.
\end{aligned} \tag{6.3.4}$$

由 (6.3.2~6.3.4) 可以得到

$$\left[\frac{1}{a_0}\frac{\partial}{\partial t}-\frac{1}{a_1}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{1}{2a_1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\ln\ a_0a_2a_3\right)\right]F_1+\left[-\frac{1}{a_2}\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\mathrm{i}}{a_3}\frac{\partial}{\partial z}\right.$$

$$
-\frac{1}{2a_2}\left(\frac{\partial}{\partial y}\ln\ a_0a_1a_3\right)+\frac{\mathrm{i}}{2a_3}\left(\frac{\partial}{\partial z}\ln\ a_0a_1a_2\right)\Bigg]F_2-\mathrm{i}\mu G_1=0,
$$

$$
\left[\frac{1}{a_0}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{a_1}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{2a_1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\ln\ a_0a_2a_3\right)\right]F_2+\Bigg[-\frac{1}{a_2}\frac{\partial}{\partial y}-\frac{\mathrm{i}}{a_3}\frac{\partial}{\partial z}
$$

$$
-\frac{1}{2a_2}\left(\frac{\partial}{\partial y}\ln\ a_0a_1a_3\right)-\frac{\mathrm{i}}{2a_3}\left(\frac{\partial}{\partial z}\ln\ a_0a_1a_2\right)\Bigg]F_2-\mathrm{i}\mu G_2=0,
$$

$$
\left[\frac{1}{a_0}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{a_1}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{2a_1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\ln\ a_0a_2a_3\right)\right]G_1+\Bigg[\frac{1}{a_2}\frac{\partial}{\partial y}-\frac{\mathrm{i}}{a_3}\frac{\partial}{\partial z}
$$

$$
+\frac{1}{2a_2}\left(\frac{\partial}{\partial y}\ln\ a_0a_1a_3\right)-\frac{\mathrm{i}}{2a_3}\left(\frac{\partial}{\partial z}\ln\ a_0a_1a_2\right)\Bigg]G_2-\mathrm{i}\mu F_1=0,
$$

$$
\left[\frac{1}{a_0}\frac{\partial}{\partial t}-\frac{1}{a_1}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{1}{2a_1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\ln\ a_0a_2a_3\right)\right]G_2+\Bigg[\frac{1}{a_2}\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\mathrm{i}}{a_3}\frac{\partial}{\partial z}
$$

$$
+\frac{1}{2a_2}\left(\frac{\partial}{\partial y}\ln\ a_0a_1a_3\right)+\frac{\mathrm{i}}{2a_3}\left(\frac{\partial}{\partial z}\ln\ a_0a_1a_2\right)\Bigg]G_1-\mathrm{i}\mu F_2=0, \tag{6.3.5}
$$

这一方程可以写成矩阵形式

$$
\Bigg\{\gamma^0\frac{\partial}{\partial t}+\gamma^1\left[\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\ln\ a_0a_2a_3\right)\right]+\gamma^2\left[\frac{\partial}{\partial y}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial y}\ln\ a_0a_1a_3\right)\right]
$$

$$
+\gamma^3\left[\frac{\partial}{\partial z}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial z}\ln\ a_0a_1a_2\right)\right]-\mathrm{i}\mu I\Bigg\}\psi=0, \tag{6.3.6}
$$

$$
\gamma^0\equiv\frac{1}{a_0}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\equiv\frac{1}{a_0}\hat{\gamma}^0,
$$

$$
\gamma^1\equiv\frac{1}{a_1}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&-1\\-1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\equiv\frac{1}{a_1}\hat{\gamma}^1,
$$

$$\gamma^2 \equiv \frac{1}{a_2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{a_2}\hat{\gamma}^2,$$

$$\gamma^3 \equiv \frac{1}{a_3}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & 0 & \mathrm{i} & 0 \\ 0 & \mathrm{i} & 0 & 0 \\ -\mathrm{i} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{a_3}\hat{\gamma}^3, \tag{6.3.7}$$

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}I, \tag{6.3.8}$$

式中 I 为 4×4 单位矩阵.

在方程 (6.3.6) 中, 令

$$\psi = \frac{1}{(a_0a_2a_3)^{1/2}}\hat{\psi},$$

可以得到

$$\left\{\gamma^0\frac{\partial}{\partial t} + \gamma^1\frac{\partial}{\partial t} + \gamma^2\left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial y}\ln\frac{a_1}{a_2}\right)\right]\right.$$

$$\left. + \gamma^3\left[\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial z}\ln\frac{a_1}{a_3}\right) - \mathrm{i}\mu I\right]\right\}\hat{\psi} = 0, \tag{6.3.9}$$

选取坐标, 使得 x 轴平行于视界面 $F(x,y,z)=0$ 的法矢量 n_μ

$$n_\mu = \frac{\partial F}{\partial x^\mu} = \left(0, \frac{\partial F}{\partial x}, 0, 0\right). \tag{6.3.10}$$

由于视界是零曲面

$$g^{\mu\nu}\frac{\partial F}{\partial x^\mu}\frac{\partial F}{\partial x^\nu} = 0, \tag{6.3.11}$$

因而我们得到

$$g^{11}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 = 0. \tag{6.3.12}$$

这一方程分解为两个方程

$$g^{11} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 0.$$

我们考虑第一个方程. 在视界面附近 g^{11} 可以表示为

$$g^{11} = -p^2(x,y,z)(x-\xi)^m \tag{6.3.13a}$$

或

$$\frac{1}{a_1} = p(x,y,z)(x-\xi)^{\frac{1}{2}m}, \tag{6.3.13b}$$

这里 $x=\xi$ 是视界面方程. 假定 $p(x,y,z)$ 是非零的有界实函数. 由于 g^{11} 视界两边变号, 而且度规是实函数, 所以 m 必须是正奇数.

进一步假定在视界内外时空坐标互换, g_{00} 也要变号, 所以 g_{00} 可以写成

$$g_{00} = q^2(x,y,z)(x-\xi)^n \tag{6.3.14a}$$

或

$$a_0 = q(x,y,z)(x-\xi)^{\frac{1}{2}n}. \tag{6.3.14b}$$

表面引力加速度 κ 具有形式

$$\begin{aligned}\kappa &= \frac{1}{2}(-g^{11}/g_{00})^{\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial x}g_{00}\\ &= \frac{p}{2q}(x-\xi)^{\frac{1}{2}(m-n)}\frac{\partial}{\partial x}[q^2(x-\xi)^n]\\ &= \frac{1}{2}npq(x-\xi)^{\frac{1}{2}(m+n-2)}\left[1+\frac{2}{n}\left(\frac{\partial}{\partial x}\ln|q|\right)(x-\xi)\right],\end{aligned} \tag{6.3.15}$$

κ 在视界面附近应为有界, 非零, 于是有

$$m+n=2, \quad n\neq 0,$$

$$\kappa = \frac{1}{2}npq\left[1+\frac{2}{n}\left(\frac{\partial}{\partial x}\ln|q|\right)(x-\xi)\right]. \tag{6.3.16}$$

在视界面上有

$$\lim_{x\to\xi}\kappa = \frac{1}{2}np(\xi)q(\xi_+). \tag{6.3.17}$$

引入 Tortoise 坐标

$$\mathrm{d}\hat{x} = 2\kappa(x-\xi)\mathrm{d}x \tag{6.3.18a}$$

或者

$$\hat{x} = \int^x \frac{\mathrm{d}x}{2\kappa(x-\xi)} = \frac{1}{2\kappa}\ln(x-\xi). \tag{6.3.18b}$$

在视界面附近, 狄拉克方程简化为

$$\begin{aligned}&\left[\hat{\gamma}^0\frac{1}{q(x-\xi)^{\frac{1}{2}n}}\frac{\partial}{\partial t}+\hat{\gamma}^1\frac{1}{nq}(x-\xi)^{\frac{1}{2}m-1}\frac{\partial}{\partial\hat{x}}+\hat{\gamma}^2\frac{1}{a_2}\frac{\partial}{\partial y}\right.\\ &\left.-\hat{\gamma}^2\frac{1}{2a_2}\left(\frac{\partial}{\partial y}\ln|pa_2|\right)+\hat{\gamma}^3\frac{1}{a_3}\frac{\partial}{\partial z}-\hat{\gamma}^3\frac{1}{2a_3}\left(\frac{\partial}{\partial z}\ln|pa_3|\right)-\mathrm{i}\mu I\right]\hat{\psi}=0,\end{aligned} \tag{6.3.19}$$

每一项乘以 $nq(x-\xi)^{\frac{1}{2}n}$, 并代入条件

$$(x-\xi)\ll 1,\quad m+n=2,$$

此方程进一步简化为

$$\left(\hat{\gamma}^0 n\frac{\partial}{\partial t}+\hat{\gamma}^1\frac{\partial}{\partial \hat{x}}\right)\hat{\psi}=0. \tag{6.3.20}$$

令

$$\hat{\psi}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\phi(x), \tag{6.3.21}$$

则 (6.3.20) 成为

$$-\mathrm{i}\hat{\gamma}^0 n\omega\phi(x)+\hat{\gamma}^1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\hat{x}}\phi(x)=0. \tag{6.3.22}$$

以 T 表示转置, 则此方程的 4 分量解

$$\phi(x)=(f_1,f_2,g_1,g_2)^{\mathrm{T}} \tag{6.3.23}$$

具有形式

$$\begin{aligned}&f_1=\mathrm{e}^{-in\omega\hat{x}},\quad f_2=\mathrm{e}^{in\omega\hat{x}},\\&g_1=\mathrm{e}^{in\omega\hat{x}},\quad g_2=\mathrm{e}^{-in\omega\hat{x}}.\end{aligned} \tag{6.3.24}$$

进入视界的入射波和离开视界的出射波分别为

$$\psi_\omega^{\mathrm{in}}\sim\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t+n\hat{x})}\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,0,1)^{\mathrm{T}}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega V}\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,0,1)^{\mathrm{T}}, \tag{6.3.25}$$

$$\begin{aligned}\psi_\omega^{\mathrm{out}}&\sim\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t+n\hat{x})}\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1,0)^{\mathrm{T}}\\&=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega V}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\omega n\hat{x}}\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1,0)^{\mathrm{T}}\\&=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega V}(x-\xi)^{\frac{in\omega}{k}}\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1,0)^{\mathrm{T}},\end{aligned} \tag{6.3.26}$$

式中 $V=t+n\hat{x}$ 为超前爱丁顿坐标.

度规行列式 g 在视界面上非零有界, 则有 $m-n=0$, 于是 $m=n=1$.

视界面上每一点均为波函数的分支点, 通过解析延拓, 可以把视界外的波函数延拓至视界内. 视界内的出射波函数为

$$\begin{aligned}\psi_\omega'^{\mathrm{out}}(\xi-x)&\sim\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega V}[(\xi-x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi}]^{\frac{\mathrm{i}\omega}{k}}\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1,0)^{\mathrm{T}}\\&=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega V}(\xi-x)^{-\mathrm{i}\omega}\left(\exp\frac{\pi\omega}{\kappa}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1,0)^{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

$$=\psi_\omega^{\text{out}}(\xi - x)\exp\frac{\pi\omega}{\kappa},$$

总的出射波函数为

$$\begin{aligned}\Phi'^{\text{out}}_\omega =&N_\omega\bigg[y(x-\xi)\psi_\omega^{\text{out}}(x-\xi)\\&+y(\xi-x)\psi_\omega^{\text{out}}(\xi-x)\exp\frac{\pi\omega}{\kappa}\bigg],\end{aligned}\tag{6.3.27}$$

式中 $y(x)$ 是阶跃函数, $\psi_\omega^{\text{out}}(x-\xi)$, $\psi_\omega^{\text{out}}(\xi-x)$ 是归一化的 4 分量狄拉克波函数, 我们有

$$\begin{aligned}&\langle\psi_\omega^{\text{out}}(x-\xi),\psi_\omega^{\text{out}}(x-\xi)\rangle\\=&\int_{t=\text{const}}y(x-\xi)\overline{\psi}_\omega^{\text{out}}(x-\xi)\gamma^0\psi_\omega^{\text{out}}(x-\xi)\sqrt{-g}\mathrm{d}^3x=1,\end{aligned}\tag{6.3.28a}$$

$$\begin{aligned}&\langle\psi_\omega^{\text{out}}(\xi-x),\psi_\omega^{\text{out}}(\xi-x)\rangle\\=&\int_{t=\text{const}}y(\xi-x)\overline{\psi}_\omega^{\text{out}}(\xi-x)\gamma^0\psi_\omega^{\text{out}}(\xi-x)\sqrt{-g}\mathrm{d}^3x=1,\end{aligned}\tag{6.3.28b}$$

式中 N_ω 是出射波 Φ_ω^{out} 的归一化因子. 在视界外, 波函数 (6.3.27) 表示离开视界, 向外传播的正能狄拉克粒子流. 在视界内, (6.3.27) 表示向奇点逆时传播的正能狄拉克粒子流, 这等效于向着奇点传播的负能反粒子流; 在视界外部邻域中有正反粒子对产生.

由 Φ_ω^{out} 的归一化条件, 我们得到

$$\langle\Phi_\omega^{\text{out}},\Phi_\omega^{\text{out}}\rangle\equiv N_\omega^2\left[\exp\left(\frac{2\pi\omega}{\kappa}\right)+1\right]=1,\tag{6.3.29}$$

或者

$$N_\omega^2=\frac{1}{\exp\left(\dfrac{2\pi\omega}{\kappa}+1\right)}=\frac{1}{\exp\left(\dfrac{\omega}{k_bT}\right)+1},\tag{6.3.30}$$

式中 $T\equiv\dfrac{\kappa}{2\pi k_b}$ 是视界的温度, k_b 是玻尔兹曼常量, κ 是视界面上的引力加速度. 式 (6.3.30) 即为静态时空狄拉克粒子的霍金辐射热谱公式.

2. 克尔–纽曼–德西特时空中的霍金辐射

克尔–纽曼–德西特 (Kerr-Newman-de Sitter) 时空不是渐近平直的. 这一时空线元在 Boyer-Lindquist 坐标中具有形式

$$\mathrm{d}s^2=\frac{1}{\Sigma\Xi^2}[\Delta_r-\Delta_\theta a^2\sin^2\theta]\mathrm{d}t^2-\frac{\Sigma}{\Delta_r}\mathrm{d}r^2-\frac{\Sigma}{\Delta_\theta}\mathrm{d}\theta^2-\frac{1}{\Sigma\Xi^2}[\Delta_\theta(r^2$$

$$+ a^2)^2 - \Delta_r a^2 \sin^2\theta]\sin^2\theta \mathrm{d}\phi^2 + \frac{2a}{\Sigma\Xi^2}\cdot$$
$$[\Delta_\theta(r^2+a^2) - \Delta_r]\cdot\sin^2\theta \mathrm{d}t\mathrm{d}\phi, \tag{6.3.31}$$

式中

$$\begin{aligned}
&\Sigma = r^2 + a^2\cos^2\theta,\\
&\Delta_\theta = 1 + \frac{1}{3}\Lambda a^2\cos^2\theta,\\
&\Delta_r = (r^2+a^2)\left(1 - \frac{1}{3}\Lambda r^2\right) - 2Mr + Q^2,\\
&\Xi = 1 + \frac{1}{3}\Lambda a^2.
\end{aligned} \tag{6.3.32}$$

由度规 (6.3.31), 可以得到

$$g = \det(g_{\mu\nu}) = -\frac{1}{\Xi^4}\Sigma^2\sin^2\theta, \tag{6.3.33}$$

$g_{\mu\nu}$ 的逆为

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial s^2} =& \frac{\Xi^2}{\Sigma\Delta_r\Delta_\theta}[\Delta_\theta(r^2+a^2)^2 - \Delta_r a^2\sin^2\theta]\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\Delta_r}{\Sigma}\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{\Delta_\theta}{\Sigma}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\\
&- \frac{\Xi^2}{\Delta_r\Delta_\theta\Sigma\sin^2\theta}(\Delta_r - \Delta_\theta a^2\sin^2\theta)\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\\
&+ \frac{2\Xi^2 a}{\Sigma\Delta_r\Delta_\theta}[\Delta_\theta(r^2+a^2) - \Delta_r]\frac{\partial^2}{\partial t\partial\phi}.
\end{aligned} \tag{6.3.34}$$

度规 (6.3.31) 是含宇宙项的 Einstein-Maxwell 复合场方程的解, 其中电磁势为

$$A_\mu = \frac{1}{\Sigma\Xi}Qr(1,0,0,-a\sin^2\theta). \tag{6.3.35}$$

1) 标量粒子的辐射

将 (6.3.31)~(6.3.35) 代入克莱因–高登方程

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} + \mathrm{i}eA_\mu\right)\left[\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} + \mathrm{i}eA_\nu\right)\Phi\right] + \mu^2\Phi = 0, \tag{6.3.36}$$

得到

$$\begin{aligned}
&\frac{\Xi^2}{\Sigma\sin\theta}\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathrm{i}e\frac{1}{\Sigma\Xi}Qr\right)\left\{\frac{\Sigma}{\Xi^2}\sin\theta\frac{\Xi^2}{\Delta_r\Delta_\theta}[\Delta_\theta(r^2+a^2)\right.\right.\\
&\left.\left.- \Delta_r a^2\sin^2\theta]\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathrm{i}e\frac{1}{\Sigma\Xi}Qr\right)\right\} + \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathrm{i}e\frac{1}{\Sigma\Xi}Qr\right)\right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\cdot\left\{\frac{\Sigma}{\Xi^2}\sin\theta\frac{\Xi^2 a}{\Sigma\Delta_r\Delta_\theta}[\Delta_\theta(r^2+a^2)-\Delta_r]\left(\frac{\partial}{\partial\phi}-\mathrm{ie}\frac{1}{\Sigma\Xi}Qra\sin^2\theta\right)\right\}\\
&+\left(\frac{\partial}{\partial\phi}-\mathrm{ie}\frac{1}{\Sigma\Xi}Qra\sin^2\theta\right)\left\{\frac{\Sigma}{\Xi^2}\sin\theta\frac{\Xi^2 a}{\Sigma\Delta_r\Delta_\theta}[\Delta_\theta(r^2+a^2)-\Delta_r]\right.\\
&\left.\cdot\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathrm{ie}\frac{1}{\Sigma\Xi}Qr\right)\right\}-\left(\frac{\partial}{\partial\phi}-\mathrm{ie}\frac{1}{\Sigma\Xi}Qra\sin^2\theta\right)\\
&\cdot\left[\frac{\Sigma}{\Xi^2}\sin\theta\frac{\Xi^2}{\Sigma\Delta_r\Delta_\theta\sin^2\theta}(\Delta_r-\Delta_\theta a^2\sin^2\theta)\left(\frac{\partial}{\partial\phi}-\mathrm{ie}\frac{1}{\Sigma\Xi}\right.\right.\\
&\left.\left.\cdot Qra\sin^2\theta\right)\right]-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\Sigma}{\Xi^2}\sin\theta\frac{\Delta_r}{\Sigma}\frac{\partial}{\partial r}\right)\\
&\left.-\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\Sigma}{\Xi^2}\sin\theta\frac{\Delta_\theta}{\Sigma}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\right]\Phi+\mu^2\Phi=0.
\end{aligned}\tag{6.3.37}$$

此方程可分离变量 t 和 (r,θ), 令

$$\Phi(t,r,\theta,\phi)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}\hat{\Phi}(r,\theta),\tag{6.3.38}$$

方程化为

$$\begin{aligned}
&\left\{-\frac{\Xi^2}{\Sigma\Delta_r\Delta_\theta}[\Delta_\theta(r^2+a^2)^2-\Delta_r a^2\sin^2\theta]\left(\omega-\frac{1}{\Sigma\Xi}eQr\right)^2\right.\\
&+2\frac{\Xi^2 a}{\Sigma\Delta_r\Delta_\theta}[\Delta_\theta(r^2+a^2)-\Delta_r]\left(\omega-\frac{1}{\Sigma\Xi}eQr\right)\left(m-\frac{1}{\Sigma\Xi}eQra\sin^2\theta\right)\\
&\left.+\frac{\Xi^2}{\Sigma\Delta_r\Delta_\theta\sin^2\theta}(\Delta_r-\Delta_\theta a^2\sin^2\theta)\left(m-\frac{1}{\Sigma\Xi}eQra\sin^2\theta\right)^2\right\}\hat{\Phi}(r,\theta)\\
&-\frac{1}{\Sigma}\frac{\partial}{\partial r}\Delta_r\frac{\partial}{\partial r}\hat{\Phi}(r,\theta)-\frac{1}{\Sigma\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Delta_\theta\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\hat{\Phi}(r,\theta)+\mu^2\hat{\Phi}(r,\theta)=0.
\end{aligned}\tag{6.3.39}$$

引入 tortoise 坐标 $\hat{r}$, 其微分形式为

$$\mathrm{d}\hat{r}=\frac{1}{\Delta r}(r^2+a^2)\mathrm{d}r\tag{6.3.40a}$$

或者

$$\Delta_r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}=(r^2+a^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\hat{r}}.\tag{6.3.40b}$$

将此式代入 (6.3.39), 得到

$$-\frac{\Xi^2}{\Sigma\Delta_r\Delta_\theta}[\Delta_\theta(r^2+a^2)^2-\Delta_r a^2\sin^2\theta]\left(\omega-\frac{1}{\Sigma\Xi}\mathrm{e}Qr\right)^2$$

$$
\begin{aligned}
&+2\frac{\Xi^2 a}{\Sigma\Delta_r\Delta_\theta}[\Delta_\theta(r^2+a^2)-\Delta_r]\left(\omega-\frac{1}{\Sigma\Xi}eQr\right)\left(m-\frac{1}{\Sigma\Xi}eQra\sin^2\theta\right)\\
&+\frac{\Xi^2}{\Sigma\Delta_r\Delta_\theta\sin^2\theta}(\Delta_r-\Delta_\theta a^2\sin^2\theta)\times\left(m-\frac{1}{\Sigma\Xi}eQra\sin^2\theta\right)^2\hat{\Phi}(r,\theta)\\
&-\frac{1}{\Sigma\Delta_t}(r^2+a^2)\frac{\partial}{\partial\hat{r}}(r^2+a^2)\frac{\partial}{\partial\hat{r}}\hat{\Phi}(r,\theta)\\
&-\frac{1}{\Sigma\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Delta_\theta\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\hat{\Phi}(r,\theta)+\mu^2\hat{\Phi}(r,\theta)=0.
\end{aligned}
\tag{6.3.41}
$$

该时空的视界面方程为

$$
\begin{aligned}
\Delta_r&=(r^2+a^2)\left(1-\frac{1}{3}\Lambda r^2\right)-2Mr+Q^2\\
&=-\frac{1}{3}\Lambda\left[r^4-\left(\frac{3}{\Lambda}-a^2\right)r^2+\frac{6M}{\Lambda}r-\frac{3}{\Lambda}(a^2+Q^2)\right]\\
&=-\frac{1}{3}\Lambda(r-r_{++})(r-r_+)(r-r_-)(r-r_{--})=0.
\end{aligned}
\tag{6.3.42}
$$

当 $\frac{1}{\Lambda}\gg M^2>a^2+Q^2$, 方程 $\Delta_r=0$ 有四个实根, r_{++},r_+,r_- 和 r_{--}, 其中 r_{++},r_+,r_- 为正, r_{--} 为负. r_{++},r_{--} 与 de Sitter 宇宙的视界对应, r_+,r_- 与 Kerr-Newman 黑洞的视界对应. 换句话说, r_{++},r_{--} 是受 Kerr-Newman 黑洞作用的 de Sitter 宇宙的视界, r_+,r_- 是受宇宙因子 Λ 作用的 Kerr-Newman 黑洞的视界. 下面只讨论视界 r_+ 和 r_{++} 上的辐射.

在视界附近, $\Delta_r\ll 1$, 用 Δ_r 乘以 (6.3.41) 各项, 得到方程

$$
\begin{aligned}
&\left[-\frac{\Xi^2}{\Sigma}(r^2+a^2)^2\left(\omega-\frac{1}{\Sigma\Xi}eQr\right)^2-\frac{\Xi^2}{\Sigma}a^2\left(m-\frac{1}{\Sigma\Xi}eQra\sin^2\theta\right)^2\right.\\
&\left.+2\frac{\Xi^2 a}{\Sigma}(r^2+a^2)\left(\omega-\frac{1}{\Sigma\Xi}eQr\right)-\left(m-\frac{1}{\Sigma\Xi}eQra\sin^2\theta\right)\right]\hat{\Phi}(r,\theta)\\
&-\frac{1}{\Sigma}(r^2+a^2)\frac{\partial}{\partial\hat{r}}(r^2+a^2)\frac{\partial}{\partial\hat{r}}\hat{\Phi}(r,\theta)=0.
\end{aligned}
\tag{6.3.43}
$$

由于 $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\hat{r}}=\frac{\Delta_r}{r^2+a^2}\ll 1$, 再设 $\hat{\Phi}(r,\theta)=R(r)\Theta(\theta)$, 可以得到

$$
(r^2+a^2)^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\hat{r}^2}R+\{\Xi[\omega(r^2+a^2)-am]-eQr\}^2R=0.
\tag{6.3.44}
$$

令

$$
\pi=\Xi[\omega(r_+^2+a^2)-am]-eQr_+,
\tag{6.3.45}
$$

在 r_+ 附近, (6.3.44) 简化为

$$
\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\hat{r}^2}R+\frac{\pi^2}{(r_+^2+a^2)}R=0.
\tag{6.3.46}
$$

解之得

$$R \sim \exp[\pm\mathrm{i}\frac{\pi}{(r_+^2+a^2)}\hat{r}] = \exp[\pm\mathrm{i}(\Xi\omega - \Xi m\Omega - eV)\hat{r}]$$
$$= \exp[\pm\mathrm{i}\Xi(\omega-\omega_0)\hat{r}]$$
$$= \exp[\pm\mathrm{i}\Xi\omega\hat{r}'], \tag{6.3.47}$$

式中 $\Omega = \dfrac{2}{r_+^2+a^2}$ 是视界 r_+ 的角速度, $V = A_0 = \dfrac{Qr_+}{r_+^2+a^2}$ 是视界 r_+ 上 $\theta = 0$ 处的静电势. $\omega_0 \equiv m\Omega + \dfrac{1}{\Xi}eV, (\omega-\omega_0)\hat{r} = \omega\hat{r}'$.

计入时间因子, 则自视界 r_+ 向外的出射波

$$\Psi_\omega^{\mathrm{out}} \sim \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t-\Xi\hat{r}')}, \tag{6.3.48}$$

进入视界 r_+ 的入射波

$$\Psi_\omega^{\mathrm{in}} \sim \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t+\Xi\hat{r}')}. \tag{6.3.49}$$

引入超前爱丁顿坐标

$$V = t + \Xi\hat{r}', \tag{6.3.50}$$

则 (6.3.48) 和 (6.3.49) 可以写为

$$\Psi_\omega^{\mathrm{in}} \sim \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega V} \tag{6.3.51}$$

$$\Psi_\omega^{\mathrm{out}}\mathrm{e} \sim^{-\mathrm{i}\omega V} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\omega\Xi\hat{r}'} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega V}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\Xi(\omega-\omega_0)\hat{r}}. \tag{6.3.52}$$

由于 $\dfrac{\mathrm{d}r}{\Delta_r} = \dfrac{\mathrm{d}\hat{r}}{r^2+a^2}$, 所以在视界面 r_+ 附近有

$$\ln(r-r_+) = -\frac{1}{3}\Lambda\frac{1}{r_+^2+a^2}(r_+-r_{++})(r_+-r_-)$$
$$(r_+-r_{--})\hat{r} = 2\kappa_h\Xi\hat{r}, \tag{6.3.53}$$

式中

$$\kappa_h = -\frac{\Lambda}{6\Xi}\frac{1}{r_+^2+a^2}(r_+-r_{++})(r_+-r_-)(r_+-r_{--}), \tag{6.3.54}$$

是视界面 r_+ 上的引力加速度.

由 (6.3.53) 可以得到

$$(r-r_+) = \exp(2\kappa_h\Xi\hat{r}),$$

于是出射波可改写为

$$\Psi^{\mathrm{out}}\omega \sim \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega V}(r-r_+)^{\frac{\mathrm{i}}{\kappa_h}(\omega-\omega_0)}. \tag{6.3.55}$$

这一结果是在视界面外部得到的, 用解析延拓的方法可以得到视界面内的波函数

$$\begin{aligned}\Psi_\omega^{\text{out}} &\sim \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega V}(r_+ - r)^{\frac{\mathrm{i}}{\kappa_h}(\omega-\omega_0)}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{\kappa_h}(\omega-\omega_0)}\\ &=\Psi_\omega^{\text{out}}(r_+ - r)\mathrm{e}^{\frac{\pi}{\kappa_h}(\omega-\omega_0)}.\end{aligned} \tag{6.3.56}$$

这样, 由视界面向外的出射波的波函数可以统一写为

$$\varPhi_\omega^{\text{out}} = N_\omega\left\{y(r-r_+)\,\Psi_\omega^{\text{out}}(r-r_+) + y(r_+-r)\,\Psi_\omega^{\text{out}}(r_+-r)\exp\left[\frac{\pi}{\kappa_h}(\omega-\omega_0)\right]\right\}, \tag{6.3.57}$$

式中 $y(x)$ 是阶跃函数, $\Psi_\omega^{\text{out}}(r-r_+)$ 和 $\Psi_\omega^{\text{out}}(r_+-r)$ 是已经归一化了的波函数. N_ω 是 Ψ_ω^{out} 的归一化因子.

在视界外 $r > r_+$, 上式代表强度为 N_ω^2 或流密度为 $\frac{1}{2\pi}N_\omega^2$ 从视界向外传播的出射正能粒子流. 在视界内 $r < r_+$, r 为时间轴. 上式代表在引力场中逆着时间前进的正能粒子流, 实际上就是在引力场中顺着时间离开视界传播的负能反粒子流. 这意味着在视界上有正反粒子对产生.

由 $\varPhi_\omega^{\text{out}}$ 的归一化条件

$$\langle\varPhi_\omega^{\text{our}}, \varPhi_\omega^{\text{out}}\rangle = N_\omega^2\left\{\exp\left[\frac{2\pi(\omega-\omega_0)}{\kappa_h}\right]-1\right\} = 1 \tag{6.3.58}$$

得到

$$N_\omega^2 = \frac{1}{\exp\left[\dfrac{2\pi(\omega-\omega_0)}{\kappa_h}\right]-1} = \frac{1}{\exp\left(\dfrac{\omega-\omega_0}{k_b T_h}\right)-1}, \tag{6.3.59}$$

式中 k_b 是玻尔兹曼常量,

$$T_h = \frac{\kappa_h}{2\pi k_b}, \tag{6.3.60}$$

是黑洞视界的温度.

对于宇宙视界 r_{++}, 用相似的方法经过相似的计算过程, 可得视界表面引力加速度

$$\kappa_c = \frac{\varLambda}{6\varXi}\frac{1}{r_{++}^2+a^2}(r_{++}-r_+)(r_{++}-r_-)(r_{++}-r_{--}), \tag{6.3.61}$$

视界 r_{++} 的温度为

$$T_c = \frac{\kappa_c}{2\pi k_b}. \tag{6.3.62}$$

当 $\frac{1}{\varLambda} \gg M^2$, 由 (6.3.54) 和 (6.3.61) 得

$$\kappa_h \sim \frac{1}{2}\frac{r_+-r_-}{r_+^2+a^2}, r_\pm \sim M \pm \sqrt{M^2-a^2-Q^2}, \tag{6.3.63}$$

$$\kappa_c \sim \left(\frac{\Lambda}{3}\right)^+. \tag{6.3.64}$$

2) 狄拉克粒子的辐射

由度规 (6.3.31), 构造对称零标架

$$\begin{aligned}
l^\mu &= \left(\frac{1}{2\Sigma\Delta_r}\right)^{\frac{1}{2}} [\Xi(r^2+a^2), \Delta_r, 0, \Xi_a],\\
n^\mu &= \left(\frac{1}{2\Sigma\Delta_r}\right)^{\frac{1}{2}} [\Xi(r^2+a^2), -\Delta_r, 0, \Xi_a],\\
m^\mu &= \left(\frac{1}{2\Sigma\Delta_\theta}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\mathrm{i}\Xi a\sin\theta, 0, \Delta_\theta, \frac{\mathrm{i}\Xi}{\sin\theta}\right],\\
\bar{m}^\mu &= \left(\frac{1}{2\Sigma\Delta_\theta}\right)^{\frac{1}{2}} \left[-\mathrm{i}\Xi a\sin\theta, 0, \Delta_\theta, -\frac{\mathrm{i}\Xi}{\sin\theta}\right].
\end{aligned} \tag{6.3.65}$$

由此可以得到零标架的协变分量. 可以证明上述零标架满足伪正交条件和度规条件. 由这些零标架分量, 可以得到 Newman-Penrose 旋系数的表示式

$$\begin{aligned}
\pi &= -\left(\frac{\Delta_\theta}{2\Sigma}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\Sigma}(a^2\sin\theta\cos\theta - \mathrm{i}ra\sin\theta),\\
\varepsilon &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\Sigma\Delta_r}\right)^{\frac{1}{2}} \left[-\frac{r}{\Sigma}\Delta_r + \left(1-\frac{1}{3}\Lambda r^2\right)r - \frac{1}{3}\Lambda r(r^2+a^2) - M - \frac{\Delta_r}{\Sigma}\mathrm{i}a\cos\theta\right],\\
\rho &= -\left(\frac{1}{2\Sigma\Delta_r}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\Delta_r}{\Sigma}(r+\mathrm{i}a\cos\theta),\\
\alpha &= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\Sigma}\Delta_\theta\right)^{\frac{1}{2}} \left\{\frac{1}{\Sigma}\left[\Delta_\theta(r^2+a^2) - \frac{1}{3}\Lambda\Sigma a^2\sin^2\theta\right]\cot\theta - \frac{\Delta_\theta}{\Sigma}\mathrm{i}ra\sin\theta\right\},\\
\mu &= \rho, \quad \beta = -\alpha, \quad \gamma = \varepsilon, \quad \tau = -\pi.
\end{aligned} \tag{6.3.66}$$

各微分算符的表示式为

$$\begin{aligned}
\mathrm{D} &= l^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{2\Sigma\Delta_r}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\Xi(r^2+a^2)\frac{\partial}{\partial t} + \Delta_r\frac{\partial}{\partial r} + \Xi a\frac{\partial}{\partial\phi}\right],\\
\Delta &= n^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{2\Sigma\Delta_r}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\Xi(r^2+a^2)\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_r\frac{\partial}{\partial r} + \Xi a\frac{\partial}{\partial\phi}\right],\\
\delta &= m^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{2\Sigma\Delta_\theta}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\mathrm{i}\Xi a\sin\theta\frac{\partial}{\partial t} + \Delta_\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\mathrm{i}\Xi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right],\\
\bar{\delta} &= m^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{2\Sigma\Delta_\theta}\right)^{\frac{1}{2}} \left[-\mathrm{i}\Xi a\sin\theta\frac{\partial}{\partial t} + \Delta_\theta\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\mathrm{i}\Xi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right],
\end{aligned} \tag{6.3.67}$$

电磁势的表示式为 (6.3.35), 由 (6.3.65) 和 (6.3.35) 可以得到

$$A_\mu l^\mu = A_\mu n^\mu = \left(\frac{1}{2\Sigma\Delta_r}\right)^{\frac{1}{2}} Qr, \tag{6.3.68}$$

$$A_\mu m^\mu = A_\mu \bar{m}^\mu = 0. \tag{6.3.69}$$

由 (6.3.66) 可得

$$\begin{aligned}\varepsilon - \rho = -(\mu - \gamma) = &\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\Sigma\Delta_r}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{\Delta_r}{\Sigma}(r + \mathrm{i}a\cos\theta)\right.\\ &\left.+\left(1 - \frac{1}{3}\Lambda r^2\right)r - M - \frac{1}{3}\Lambda r(r^2 + a^2)\right],\\ \pi - \alpha = \beta - \tau = &-\left(\frac{1}{2\Sigma}\right)^{\frac{3}{2}}\Delta_\theta^{\frac{1}{2}}\left[a^2\sin\theta\cos\theta - \Sigma\cot\theta\right.\\ &\left.-\mathrm{i}ra\sin\theta + \frac{1}{3}\frac{\Lambda\Sigma}{\Delta_\theta}a^2\sin\theta\cos\theta\right].\end{aligned} \tag{6.3.70}$$

将 (6.3.67)~(6.3.70) 代入狄拉克方程 (6.3.4), 得到

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{2\Sigma\Delta_r}\right)^{\frac{1}{2}}\left\{\Xi(r^2 + a^2)\frac{\partial}{\partial t} + \Delta_r\frac{\partial}{\partial r} + \Xi a\frac{\partial}{\partial\phi} + \frac{1}{2}\left[\frac{\Delta_r}{\Sigma}(r\right.\right.\\ &\left.\left.+\mathrm{i}a\cos\theta) + \left(1 - \frac{1}{3}\Lambda r^2\right)r - M - \frac{1}{3}\Lambda r(r^2 + a^2)\right] + \mathrm{i}eQr\right\}F_1\\ &+\left(\frac{1}{2\Sigma\Delta_\theta}\right)^{\frac{1}{2}}\left[-\mathrm{i}\Xi a\sin\theta\frac{\partial}{\partial t} + \Delta_\theta\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\mathrm{i}\Xi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi} - \frac{1}{2\Sigma}\left(a^2\sin\theta\cos\theta\right.\right.\\ &\left.\left.-\Sigma\cot\theta - \mathrm{i}ra\sin\theta + \frac{1}{3}\frac{\Lambda\Sigma}{\Delta_\theta}a^2\sin\theta\cos\theta\right)\right]F_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}\mu G_2 = 0,\\ &\left(\frac{1}{2\Sigma\Delta_r}\right)^{\frac{1}{2}}\left\{\Xi(r^2 + a^2)\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_r\frac{\partial}{\partial r} + \Xi a\frac{\partial}{\partial\phi} - \frac{1}{2}\left[\frac{\Delta_r}{\Sigma}(r\right.\right.\\ &\left.\left.+\mathrm{i}a\cos\theta) + \left(1 - \frac{1}{3}\hat{\Lambda}^2\right)r - M - \frac{1}{3}\Lambda r(r^2 + a^2)\right] + \mathrm{i}eQr\right\}F_2\\ &+\left(\frac{1}{2\Sigma\Delta_r}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\mathrm{i}\Xi a\sin\frac{\partial}{\partial t} + \Delta_\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\mathrm{i}\Xi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi} - \frac{1}{2\Sigma}\left(a^2\sin\theta\cos\theta\right.\right.\\ &\left.\left.-\Sigma\cot\theta - \mathrm{i}ra\sin\theta + \frac{1}{3}\frac{\Lambda\Sigma}{\Delta_\theta}a^2\sin\theta\cos\theta\right)\right]F_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}\mu G_2 = 0,\\ &\left(\frac{1}{2\Sigma\Delta_r}\right)^{\frac{1}{2}}\left\{\Xi(r^2 + a^2)\frac{\partial}{\partial t} + \Delta_r\frac{\partial}{\partial r} + \Xi a\frac{\partial}{\partial\phi} + \frac{1}{2}\left[\frac{\Delta_r}{\Sigma}(r\right.\right.\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\mathrm{i}a\cos\theta)+\left(1-\frac{1}{3}\Lambda r^2\right)r-M-\frac{1}{3}\Lambda r(r^2+a^2)\Bigg]+\mathrm{i}eQr\Bigg\}G_2\\
&-\left(\frac{1}{2\Sigma\Delta_\theta}\right)^{\frac{1}{2}}\Bigg[\mathrm{i}\Xi a\sin\theta\frac{\partial}{\partial t}+\Delta_\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\mathrm{i}\Xi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}-\frac{1}{2\Sigma}\Bigg(a^2\sin\theta\cos\theta\\
&-\Sigma\cot\theta+\mathrm{i}ra\sin\theta+\frac{1}{3}\frac{\Lambda\Sigma}{\Delta_\theta}a^2\sin\theta\cos\theta\Bigg)\Bigg]G_1-\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}\mu F^2=0,\\
&\left(\frac{1}{2\Sigma\Delta_r}\right)^{\frac{1}{2}}\Bigg\{\Xi(r^2+a^2)\frac{\partial}{\partial t}-\Delta_r\frac{\partial}{\partial r}+\Xi a\frac{\partial}{\partial\phi}-\frac{1}{2}\Bigg[\frac{\Delta_r}{\Sigma}(r\\
&-\mathrm{i}a\cos\theta)+\left(1-\frac{1}{3}\Lambda r^2\right)r-M-\frac{1}{3}\Lambda r(r^2+a^2)\Bigg]+\mathrm{i}eQr\Bigg\}G_1\\
&-\left(\frac{1}{2\Sigma\Delta_\theta}\right)^{\frac{1}{2}}\Bigg[-\mathrm{i}\Xi a\sin\theta\frac{\partial}{\partial t}+\Delta_\theta\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{\mathrm{i}\Xi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}-\frac{1}{2\Sigma}\Bigg(a^2\sin\theta\cos\theta\\
&-\Sigma\cot\theta+\mathrm{i}ra\sin\theta+\frac{1}{3}\frac{\Lambda\Sigma}{\Delta_\theta}a^2\sin\theta\cos\theta\Bigg)\Bigg]G_2-\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}\mu F_1=0.
\end{aligned}
\tag{6.3.71}
$$

Γ 矩阵形式的狄拉克方程为

$$
\left[\gamma^\mu\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}-\Gamma\mu\right)-\mathrm{i}\mu I\right]\psi=0.
\tag{6.3.72}
$$

比较 (6.3.71) 和 (6.3.72), 得到

$$
\begin{aligned}
\gamma^0&=\left(\frac{1}{\Sigma\Delta_r}\right)^{\frac{1}{2}}(r^2+a^2)\hat{\gamma}^0+\left(\frac{1}{\Sigma\Delta_\theta}\right)^{\frac{1}{2}}\Xi a\sin\theta\hat{\gamma}^3,\\
\gamma^1&=\left(\frac{1}{\Sigma\Delta_r}\right)^{\frac{1}{2}}\Delta_r\hat{\gamma}^1,\\
\gamma^2&=\left(\frac{1}{\Sigma\Delta_\theta}\right)^{\frac{1}{2}}\Delta_\theta\hat{\gamma}^2,\\
\gamma^3&=\left(\frac{1}{\Sigma\Delta_r}\right)^{\frac{1}{2}}\Xi a\hat{\gamma}^0+\left(\frac{1}{\Sigma\Delta_\theta}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\Xi}{\sin\theta}\hat{\gamma}^3.
\end{aligned}
\tag{6.3.73}
$$

式中右端的 $\hat{\gamma}^\mu$ 各分量分别为

$$
\hat{\gamma}^0=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},
$$

$$\hat{\gamma}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{\gamma}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{\gamma}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \mathrm{i} \\ 0 & 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} & 0 & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{6.3.74}$$

γ^μ 是克尔–纽曼–德西特时空的狄拉克矩阵, 而 $\hat{\gamma}^\mu$ 是闵可夫斯基时空的狄拉克矩阵. 直接推导可以得到

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} I. \tag{6.3.75}$$

令

$$F_i = \Delta_r^{-\frac{1}{4}} \hat{F}_i, \quad G_i = \Delta^{-\frac{1}{4}} \hat{G}_i, \quad i = 1, 2, \tag{6.3.76}$$

我们有

$$\frac{\partial F_1}{\partial r} = -\frac{1}{2}\Delta_r^{-\frac{5}{4}}\left[-\frac{1}{3}\Lambda r(r^2+a^2) + \left(1 - \frac{1}{3}\Lambda r^2\right) - M\right]\hat{F}_1 + \Delta_r^{-\frac{1}{4}}\frac{\partial}{\partial r}\hat{F}_1, \cdots \tag{6.3.77}$$

将 (6.3.76) 和 (6.3.77) 代入 (6.3.71), 得到

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{\Sigma\Delta_r}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\Xi(r^2+a^2)\frac{\partial}{\partial t} + \Delta_r\frac{\partial}{\partial r} + \Xi a\frac{\partial}{\partial \phi}\right.\\
&\left.+\frac{\Delta_r}{2\Sigma}(r + \mathrm{i}a\cos\theta) + \mathrm{i}eQr\right]\hat{F}_1 + \left(\frac{1}{\Sigma\Delta_\theta}\right)^{\frac{1}{2}}\left[-\mathrm{i}\Xi a\sin\theta\frac{\partial}{\partial t} + \Delta_\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right.\\
&-\frac{\mathrm{i}\Xi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi} - \frac{1}{2\Sigma}\left(a^2\sin\theta\cos\theta - \Sigma\cot\theta - \mathrm{i}ra\sin\theta\right.\\
&\left.\left.+\frac{1}{3}\frac{\Lambda\Sigma}{\Delta_\theta}a^2\sin\theta\cos\theta\right)\right]\hat{F}_2 - \mathrm{i}\mu\hat{G}_1 = 0,\\
&\left(\frac{1}{\Sigma\Delta_r}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\Xi(r^2+a^2)\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_r\frac{\partial}{\partial r} + \Xi a\frac{\partial}{\partial\phi}\right.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& -\frac{\Delta_r}{2\Sigma}(r+\mathrm{i}a\cos\theta)+\mathrm{i}eQr\bigg]\hat{F}_2+\left(\frac{1}{\Sigma\Delta_\theta}\right)^{\frac{1}{2}}\bigg[\mathrm{i}\Xi a\sin\theta\frac{\partial}{\partial t}+\Delta_\theta\frac{\partial}{\partial\theta} \\
& +\frac{\mathrm{i}\Xi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}-\frac{1}{2\Sigma}\bigg(a^2\sin\theta\cos\theta-\Sigma\cot\theta-\mathrm{i}ra\sin\theta \\
& +\frac{1}{3}\frac{\Lambda\Sigma}{\Delta_\theta}a^2\sin\theta\cos\theta\bigg)\bigg]\hat{F}_1-\mathrm{i}\mu\hat{G}_2=0; \\
& \left(\frac{1}{\Sigma\Delta_r}\right)^{\frac{1}{2}}\bigg[\Xi(r^2+a^2)\frac{\partial}{\partial t}-\Delta_r\frac{\partial}{\partial r}+\Xi a\frac{\partial}{\partial\phi} \\
& -\frac{\Delta_r}{2\Sigma}(r-\mathrm{i}a\cos\theta)+\mathrm{i}eQr\bigg]\hat{G}_1-\left(\frac{1}{\Sigma\Delta_\theta}\right)^{\frac{1}{2}}\bigg[\mathrm{i}\Xi a\sin\theta\frac{\partial}{\partial t}+\Delta_\theta\frac{\partial}{\partial\theta} \\
& -\frac{\mathrm{i}\Xi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}-\frac{1}{2\Sigma}\bigg(a^2\sin\theta\cos\theta-\Sigma\cot\theta+\mathrm{i}ra\sin\theta \\
& +\frac{1}{3}\frac{\Lambda\Sigma}{\Delta_\theta}a^2\sin\theta\cos\theta\bigg)\bigg]\hat{G}_2-\mathrm{i}\mu\hat{F}_1=0, \\
& \left(\frac{1}{\Sigma\Delta_r}\right)^{\frac{1}{2}}\bigg[\Xi(r^2+a^2)\frac{\partial}{\partial t}+\Delta_r\frac{\partial}{\partial r}+\Xi a\frac{\partial}{\partial\phi} \\
& +\frac{\Delta_r}{2\Sigma}(r-\mathrm{i}a\cos\theta)+\mathrm{i}eQr\bigg]\hat{G}_2-\left(\frac{1}{\Sigma\Delta_\theta}\right)^{\frac{1}{2}}\bigg[\mathrm{i}\Xi a\sin\theta\frac{\partial}{\partial t}+\Delta_\theta\frac{\partial}{\partial\theta} \\
& +\frac{\mathrm{i}\Xi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}-\frac{1}{2\Sigma}\bigg(a^2\sin\theta\cos\theta-\Sigma\cot\theta+\mathrm{i}ra\sin\theta \\
& +\frac{1}{3}\frac{\Lambda\Sigma}{\Delta_\theta}a^2\sin\theta\cos\theta\bigg)\bigg]\hat{G}_1-\mathrm{i}\mu\hat{F}_2=0.
\end{aligned}
\tag{6.3.78}
$$

引入 Tortoise 坐标 $\hat{r}$,

$$
\mathrm{d}\hat{r}=\frac{1}{\Delta_r}(r^2+a^2)\mathrm{d}r, \tag{6.3.79a}
$$

或者

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\hat{r}}=\frac{\Delta_r}{(r^2+a^2)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}. \tag{6.3.79b}
$$

将 (6.3.79b) 代入 (6.3.78), 得到

$$
\bigg[\Xi(r^2+a^2)\frac{\partial}{\partial t}+(r^2+a^2)\frac{\partial}{\partial\hat{r}}+\Xi a\frac{\partial}{\partial\phi}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{\Delta_r}{2\Sigma}(r+\mathrm{i}a\cos\theta)+\mathrm{i}eQr\Big]\hat{F}_1+\left(\frac{\Delta_r}{\Delta_\theta}\right)^{\frac{1}{2}}\Big[-\mathrm{i}\Xi a\sin\theta\frac{\partial}{\partial t}+\Delta_\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\\
&-\frac{\mathrm{i}\Xi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}-\frac{1}{2\Sigma}\Big(a^2\sin\theta\cos\theta-\Sigma\cot\theta-\mathrm{i}ra\sin\theta\\
&+\frac{1}{3}\frac{\Lambda\Sigma}{\Delta_\theta}a^2\sin\theta\cos\theta\Big)\Big]\hat{F}_2-\mathrm{i}\mu(\Sigma\Delta_r)^{\frac{1}{2}}\hat{G}_1=0,\\
&\Big[\Xi(r^2+a^2)\frac{\partial}{\partial t}-(r^2+a^2)\frac{\partial}{\partial\hat{r}}+\Xi a\frac{\partial}{\partial\phi}\\
&-\frac{\Delta_r}{2\Sigma}(r+\mathrm{i}a\cos\theta)+\mathrm{i}eQr\Big]\hat{F}_2+\left(\frac{\Delta_r}{\Delta_\theta}\right)^{\frac{1}{2}}\Big[\mathrm{i}\Xi a\sin\theta\frac{\partial}{\partial t}+\Delta_\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\\
&+\frac{\mathrm{i}\Xi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}-\frac{1}{2\Sigma}\Big(a^2\sin\theta\cos\theta-\Sigma\cot\theta-\mathrm{i}ra\sin\theta\\
&+\frac{1}{3}\frac{\Lambda\Sigma}{\Delta_\theta}a^2\sin\theta\cos\theta\Big)\Big]\hat{F}_1-\mathrm{i}\mu(\Sigma\Delta_r)^{\frac{1}{2}}\hat{G}_2=0,\\
&\Big[\Xi(r^2+a^2)\frac{\partial}{\partial t}-(r^2+a^2)\frac{\partial}{\partial\hat{r}}+\Xi a\frac{\partial}{\partial\phi}\\
&-\frac{\Delta_r}{2\Sigma}(r-\mathrm{i}a\cos\theta)+\mathrm{i}eQr\Big]\hat{G}_1-\left(\frac{\Delta_r}{\Delta_\theta}\right)^{\frac{1}{2}}\Big[-\mathrm{i}\Xi a\sin\theta\frac{\partial}{\partial t}+\Delta_\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\\
&-\frac{\mathrm{i}\Xi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}-\frac{1}{2\Sigma}\Big(a^2\sin\theta\cos\theta-\Sigma\cot\theta+\mathrm{i}ra\sin\theta\\
&+\frac{1}{3}\frac{\Lambda\Sigma}{\Delta_\theta}a^2\sin\theta\cos\theta\Big)\Big]\hat{G}_2-\mathrm{i}\mu(\Sigma\Delta_r)^{\frac{1}{2}}\hat{F}_1=0,\\
&\Big[\Xi(r^2+a^2)\frac{\partial}{\partial t}+(r^2+a^2)\frac{\partial}{\partial\hat{r}}+\Xi a\frac{\partial}{\partial\phi}\\
&+\frac{\Delta_r}{2\Sigma}(r-\mathrm{i}a\cos\theta)+\mathrm{i}eQr\Big]\hat{G}_2-\left(\frac{\Delta_r}{\Delta_\theta}\right)^{\frac{1}{2}}\Big[\mathrm{i}\Xi a\sin\theta\frac{\partial}{\partial t}+\Delta_\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\\
&+\frac{\mathrm{i}\Xi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}-\frac{1}{2\Sigma}\Big(a^2\sin\theta\cos\theta-\Sigma\cot\theta+\mathrm{i}ra\sin\theta\\
&+\frac{1}{3}\frac{\Lambda\Sigma}{\Delta_\theta}a^2\sin\theta\cos\theta\Big)\Big]\hat{G}_1-\mathrm{i}\mu(\Sigma\Delta_r)^{\frac{1}{2}}\hat{F}_2=0.
\end{aligned}
\tag{6.3.80}
$$

令

$$
\begin{aligned}
\hat{F}_i &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{e}^{im\phi} f_i, \\
\hat{G}_i &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{e}^{im\phi} g_i,
\end{aligned}
\qquad i = 1, 2, \tag{6.3.81}
$$

代入 (6.3.80), 得到

$$
\begin{aligned}
&\left[-\mathrm{i}\varXi\omega(r^2+a^2) + (r^2+a^2)\frac{\partial}{\partial\hat{r}} + \mathrm{i}\varXi ma + \frac{\varDelta_r}{2\varSigma}(r+\mathrm{i}a\cos\theta)\right.\\
&\left.+\mathrm{i}eQr\right] f_1 + \left(\frac{\Delta_r}{\Delta_\theta}\right)^{\frac{1}{2}}\left[-\varXi a\omega\sin\theta + \varDelta_\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\varXi m}{\sin\theta}\right.\\
&-\frac{1}{2\varSigma}(a^2\sin\theta\cos\theta - \mathrm{i}ra\sin\theta) + \frac{1}{2}\cot\theta\\
&\left.-\frac{1}{6}\frac{\varLambda}{\varDelta_\theta}a^2\sin\theta\cos\theta\right] f_2 - \mathrm{i}\mu(\varSigma\varDelta_r)^{\frac{1}{2}} g_1 = 0,\\
&\left[-\mathrm{i}\varXi\omega(r^2+a^2) - (r^2+a^2)\frac{\partial}{\partial\hat{r}} + \mathrm{i}\varXi ma - \frac{\varDelta_r}{2\varSigma}(r\right.\\
&\left.+\mathrm{i}a\cos\theta) + \mathrm{i}eQr\right] f_2 + \left(\frac{\varDelta_r}{\varDelta_\theta}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\varXi a\omega\sin\theta + \varDelta_\theta\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\varXi m}{\sin\theta}\right.\\
&-\frac{1}{2\varSigma}(a^2\sin\theta\cos\theta - \mathrm{i}ra\sin\theta) + \frac{1}{2}\cot\theta\\
&\left.-\frac{1}{6}\frac{\varLambda}{\varDelta_\theta}a^2\sin\theta\cos\theta\right] f_1 - \mathrm{i}\mu(\varSigma\varDelta_r)^{\frac{1}{2}} g_2 = 0,\\
&\left[-\mathrm{i}\varXi\omega(r^2+a^2) - (r^2+a^2)\frac{\partial}{\partial\hat{r}} + \mathrm{i}\varXi ma - \frac{\varDelta_r}{2\varSigma}(r-\mathrm{i}a\cos\theta)\right.\\
&\left.+\mathrm{i}eQr\right] g_1 - \left(\frac{\varDelta_r}{\varDelta_\theta}\right)^{\frac{1}{2}}\left[-\varXi a\omega\sin\theta + \varDelta\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\varXi m}{\sin\theta}\right.\\
&\left.-\frac{1}{2\varSigma}(a^2\sin\theta\cos\theta + \mathrm{i}ra\sin\theta) + \frac{1}{2}\cot\theta - \frac{1}{6}\frac{\varLambda}{\varDelta_\theta}a^2\sin\theta\cos\theta\right] g_2 - \mathrm{i}\mu(\varSigma\varDelta_r)^{\frac{1}{2}} f_1 = 0,\\
&\left[-\mathrm{i}\varXi\omega(r^2+a^2) + (r^2+a^2)\frac{\partial}{\partial\hat{r}} + \mathrm{i}\varXi ma + \frac{\varDelta_r}{2\varSigma}(r-\mathrm{i}a\cos\theta)\right.\\
&\left.+\mathrm{i}eQr\right] g_2 - \left(\frac{\varDelta_r}{\varDelta_\theta}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\varXi a\omega\sin\theta + \varDelta_\theta\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\varXi m}{\sin\theta}\right.\\
&-\frac{1}{2\varSigma}(a^2\sin\theta\cos\theta + \mathrm{i}ra\sin\theta)\\
&\left.+\frac{1}{2}\cot\theta - \frac{1}{6}\frac{\varLambda}{\varDelta_\theta}a^2\sin\theta\cos\theta\right] g_1 - \mathrm{i}\mu(\varSigma\varDelta_r)^{\frac{1}{2}} f_2 = 0.
\end{aligned}
\tag{6.3.82}
$$

和在 (1) 中讨论视界面方程 (6.3.42) 的情况一样, 我们只讨论视界面 r_+ 和 r_{++} 处的霍金辐射.

在视界 r_+ 附近, $\Delta_r \to 0$, 于是 (6.3.82) 简化为

$$\begin{aligned}
&\left[-\mathrm{i}\Xi\omega(r_+^2+a^2)+(r_+^2+a^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\hat{r}}+\mathrm{i}\Xi ma+\mathrm{i}eQr_+\right]f_1=0,\\
&\left[-\mathrm{i}\Xi\omega(r_+^2+a^2)-(r_+^2+a^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\hat{r}}+\mathrm{i}\Xi ma+\mathrm{i}eQr_+\right]f_2=0,\\
&\left[-\mathrm{i}\Xi\omega(r_+^2+a^2)-(r_+^2+a^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\hat{r}}+\mathrm{i}\Xi ma+\mathrm{i}eQr_+\right]g_1=0,\\
&\left[-\mathrm{i}\Xi\omega(r_+^2+a^2)+(r_+^2+a^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\hat{r}}+\mathrm{i}\Xi ma+\mathrm{i}eQr_+\right]g_2=0,
\end{aligned}\tag{6.3.83}$$

解之得

$$\begin{aligned}
f_1&=\exp\left[\mathrm{i}\left(\Xi\omega-\frac{\Xi ma+eQr_+}{r_+^2+a^2}\right)\hat{r}\right]\\
&=\exp[\mathrm{i}\Xi(\omega-m\Omega-eV)\hat{r}]\\
f_2&=\exp\left[\mathrm{i}\left(\Xi\omega-\frac{\Xi ma+eQr_+}{r_+^2+a^2}\right)\hat{r}\right]\\
&=\exp[\mathrm{i}\Xi(\omega-m\Omega-eV)\hat{r}]\\
g_1&=\exp\left[\mathrm{i}\left(\Xi\omega-\frac{\Xi ma+eQr_+}{r_+^2+a^2}\right)\hat{r}\right]\\
&=\exp[\mathrm{i}\Xi(\omega-m\Omega-eV)\hat{r}]\\
g_2&=\exp\left[\mathrm{i}\left(\Xi\omega-\frac{\Xi ma+eQr_+}{r_+^2+a^2}\right)\hat{r}\right]\\
&=\exp[\mathrm{i}\Xi(\omega-m\Omega-eV)\hat{r}].
\end{aligned}\tag{6.3.84}$$

式中

$$\Omega\equiv\frac{a}{r_+^2+a^2},\tag{6.3.85}$$

为黑洞视界 r_+ 的角速度;

$$V=A_0=\frac{Qr_+}{\Xi(r_+^2+a^2)},\tag{6.3.86}$$

为 r_+ 上两极点处的静电势.

令

$$\omega_0=m\Omega+eV\tag{6.3.87}$$

及

$$\Xi(\omega-\omega_0)\hat{r}=\omega\hat{r}',\tag{6.3.88}$$

在 $\hat{F}_i$, $\hat{G}_i$ 中省写因子 $\exp(im\phi)$ 则

$$\begin{aligned}&\hat{F}_1 \sim \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t-\hat{r}')}, \quad \hat{F}_2 \sim \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t+\hat{r}')},\\&\hat{G}_1 \sim \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t-\hat{r}')}, \quad \hat{G}_2 \sim \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t+\hat{r}')}.\end{aligned} \tag{6.3.89}$$

由 (6.3.89) 可知, 进入视界 r_+ 的入射波为

$$\psi_\omega^{in} \sim \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t+\hat{r}')}\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1,0)^{\mathrm{T}}, \tag{6.3.90}$$

由视界 r_+ 向外的出射波为

$$\psi_\omega^{out} \sim \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t-\hat{r}')}\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,0,1)^{\mathrm{T}}, \tag{6.3.91}$$

式中 T 为转置算符. 可见入射波和出射波正交.

引入超前爱丁顿坐标

$$V = t + \hat{r}', \tag{6.3.92}$$

可将 (6.3.90) 和 (6.3.91) 写为

$$\psi_\omega^{\mathrm{in}} \sim \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega V}\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1,0)^{\mathrm{T}}, \tag{6.3.93}$$

$$\begin{aligned}\psi_\omega^{out} \sim& \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega V}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\omega\hat{r}'}\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,0,1)^{\mathrm{T}}\\=&\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega V}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\,\varXi(\omega-\omega_0)\hat{r}}\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,0,1)^{\mathrm{T}}.\end{aligned} \tag{6.3.94}$$

在视界面附近, (6.3.79a) 可写为

$$\mathrm{d}\hat{r} = -\frac{3}{\varLambda}\frac{(r_+^2+a^2)\mathrm{d}r}{(r_+-r_{++})(r_+-r_-)(r_+-r_{--})(r-r_+)}. \tag{6.3.95}$$

积分, 得到

$$\ln(r-r_+) = -\frac{1}{3}\frac{\varLambda}{r_+^2+a^2}(r_+-r_{++})(r_+-r_-)(r_+-r_{--})\hat{r} \equiv 2\kappa_+\hat{\varXi}r \tag{6.3.96}$$

式中

$$\kappa_+ = -\frac{1}{6\varXi}\frac{\varLambda}{r_+^2+a^2}(r_+-r_{++})(r_+-r_-)(r_+-r_{--}) \tag{6.3.97}$$

为视界 r_+ 上的引力加速度.

由 (6.3.9), 可以得到

$$(r-r_+) = \exp(2\kappa_+\hat{\varXi}r), \tag{6.3.98}$$

代入 (6.3.94), 可将出射波改写成

$$\psi_\omega^{\text{out}} \sim \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega V}(r-r_+)^{\mathrm{i}/\kappa_k(\omega-\omega_0)}\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,0,1)^{\mathrm{T}}. \tag{6.3.99}$$

上面的出射波是在视界面外边得到的, 视界面上任一点都是分支点, 即波函数不确定. 可以如前一样地进行解析延拓, 得到视界面内的出射波函数.

$$\begin{aligned}\psi_\omega^{\text{out}} &\sim \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega V}(r_+-r)^{\frac{\mathrm{i}}{\kappa_+}(\omega-\omega_0)}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{\kappa_+}(\omega-\omega_0)}\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,0,1)^{\mathrm{T}}\\&=\psi_\omega^{\text{out}}(r_+-r)\mathrm{e}^{\frac{\pi}{\kappa_+}(\omega-\omega_0)}.\end{aligned} \tag{6.3.100}$$

引入阶跃函数

$$y(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x>0,\\0, & \text{当 } x<0,\end{cases} \tag{6.3.101}$$

出射波函数可统一表示为

$$\begin{aligned}\varPhi_\omega^{\text{out}} =&N_\omega\left\{y(r-r_+)\psi_\omega^{\text{out}}(r-r_+)+y(r_+-r)\psi_\omega^{\text{out}}(r_+\right.\\&\left.-r)\exp\left[\frac{\pi}{\kappa_+}(\omega-\omega_0)\right]\right\},\end{aligned} \tag{6.3.102}$$

式中 N_ω 是 $\varPhi_\omega^{\text{out}}$ 的归一化因子.

在视界面外, 上式表示强度为 N_ω^2 的从视界向外传播的正能粒子流; 在视界面内, r 为时间轴, 上式表示逆时传播的正能粒子流, 等效于顺时离开视界的负能反粒子流. 即在视界面上产生了正反狄拉克粒子对.

由 $\varPhi_\omega^{\text{out}}$ 的归一化条件

$$\langle\varPhi_\omega^{\text{out}},\varPhi_\omega^{\text{out}}\rangle=N_\omega^2\left\{\exp\left[\frac{2\pi(\omega-\omega_0)}{\kappa_+}\right]+1\right\}=1, \tag{6.3.103}$$

可以确定归一化常数

$$N_\omega^2=\left\{\exp\left[\frac{2\pi(\omega-\omega_0)}{\kappa_+}\right]+1\right\}^{-1}=\left[\exp\left(\frac{\omega-\omega_0}{k_bT_+}\right)+1\right]^{-1}, \tag{6.3.104}$$

式中 k_b 是玻尔兹曼常量, κ_+ 是外视界上的引力加速度, 而温度

$$T_+\equiv\frac{\kappa_+}{2\pi k_b}. \tag{6.3.105}$$

用类似的方法可以得到宇宙视界 r_{++} 上的引力加速度

$$\kappa_{++}=\frac{1}{6\varXi}\frac{\Lambda}{r_+^2+a^2}(r_{++}-r_+)(r_{++}-r_-)(r_{++}-r_{--}) \tag{6.3.106}$$

和视界温度

$$T_{++}=\frac{\kappa_{++}}{2\pi k_b}. \tag{6.3.107}$$

当 $\frac{1}{\Lambda}\gg M^2$, 有

$$\kappa_+\sim\frac{1}{2}\frac{r_+-r_-}{r_+^2+a^2},\quad r_\pm\sim M\pm\sqrt{M^2-a^2-Q^2},$$
$$\kappa_{++}\sim\left(\frac{\Lambda}{3}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{6.3.108}$$

本节所得结果相当一般, 可退化为克尔–纽曼黑洞等特殊情况.

现代物理基础丛书 35

引 力 理 论

（下册）

王永久 著

科 学 出 版 社
北 京

内 容 简 介

本书系统地阐述了广义相对论的基本内容和相关领域近年来的新进展，包括作者和合作者们以及国内外同行学者们的近期研究成果. 全书包括绪论、广义相对论基础、一些特殊形式的引力场、广义相对论流体动力学、黑洞物理、广义相对论宇宙学、宇宙的暴胀、量子宇宙学、Brans-Dicke 理论和膜宇宙、广义相对论引力效应十篇，共 37 章 230 节.

本书可供理论物理、天体物理和应用数学专业的硕士生、博士生和研究人员阅读，也可供本科高年级学生和自学者参考.

图书在版编目(CIP)数据

引力理论. 下册 / 王永久著. —北京：科学出版社，2011
ISBN 978-7-03-031070-5

Ⅰ. ①引… Ⅱ. ①王… Ⅲ. ①引力理论 Ⅳ. ①O314

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011) 第 088586 号

责任编辑：钱 俊 张 静 / 责任校对：张怡君
责任印制：钱玉芬 / 封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

铭浩彩色印装有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2011 年 6 月第 一 版 开本：B5(720 × 1000)
2011 年 6 月第一次印刷 印张：49 3/4
印数：1—2 000 字数：966 000

定价：98.00 元（上、下册）

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　　言

《引力理论和引力效应》一书自 1990 年出版以来有幸受到诸多读者的欢迎, 出版不到两年时间便已售完, 不少读者希望再版. 本书在对《引力理论和引力效应》进行修改的基础上增加了广义相对论近年来的新成果和新进展. 由于篇幅限制, 关于黑洞量子化的部分内容 (黑洞的面积量子化、质量量子化和电荷量子化) 以及宇宙学的部分内容 (宇宙暴胀的机制、圈量子宇宙和大爆炸的量子特性) 未做详细阐述, 有兴趣的读者可分别参阅《经典黑洞和量子黑洞》(王永久, 2008) 和《经典宇宙和量子宇宙》(王永久, 2010).

1687 年, 牛顿创立了第一个引力理论, 这是人类对自然界普遍存在的力 —— 引力的认识的第一次升华. 牛顿引力理论首次揭开了行星运动之谜, 奇迹般地预言了两个行星 (海王星和冥王星) 的存在并被天文观测所证实, 从此牛顿的名字誉满全球. 直至 20 世纪初, 这一理论是人们普遍接受的、唯一正确的引力理论. 随着人类智慧的发展, 牛顿引力理论的困难日益引起学者们的重视: 它无法解释天文学家观测到的事实 —— 水星近日点的移动, 无法解释物体的引力质量为何等于惯性质量 ……

牛顿引力理论无法用来研究宇宙. 用牛顿引力理论研究宇宙会导致著名的纽曼 (Newman) 疑难.

1916 年, 爱因斯坦以全新的观点创立了新的引力理论 —— 广义相对论, 这是人类对引力认识的第二次升华. 爱因斯坦引力理论将时–空几何和引力场统为一体, 以其简洁的逻辑和优美的结构令学者们叹服甚至陶醉. 它圆满地解决了牛顿引力理论的困难, 并将牛顿引力理论纳入自己的特殊情况 (弱场近似).

爱因斯坦引力理论的建立, 第一次为宇宙学提供了动力学基础, 使宇宙学成为一门定量的科学. 爱因斯坦的引力场方程可以用于宇宙, 作为宇宙演化的动力学方程. 因此, 应用广义相对论, 可以根据宇宙的现在研究宇宙的过去和未来.

引力理论的发展在很大程度上取决于爱因斯坦场方程的严格解及其物理解释. 本书第一部分以场方程的严格解为中心论述广义相对论的基本内容, 给出了爱因斯坦引力场方程的数十个严格解的推导过程和诸种生成解技术; 系统地叙述了广义相对论流体动力学; 阐述了黑洞的时空理论、经典黑洞热力学、黑洞熵的量子修正和黑洞的量子效应.

大爆炸宇宙学成功地解释了自 $t = 10^{-2}$ 秒 (轻核形成) 至 $t = 10^{10}$ 年 (现在) 宇宙演化阶段的观测事实. 其中包括元素的起源 (氦丰度测量)、星系光谱的宇宙学

红移、3K 微波背景辐射、星系计数、宇宙大尺度的均匀各向同性等. 宇宙背景辐射的观测两次获得诺贝尔物理学奖 (1978 年, 2006 年), 就是因为它们支持了大爆炸宇宙模型. 由于大爆炸宇宙模型普遍为人们所接受, 故称其为标准宇宙模型. 然而标准宇宙模型仍有它的困难, 就是在 $t=10^{-10}$ 秒这一极早期演化阶段中的四个问题: 奇点问题、视界问题、平直性问题和磁单极问题. 本书第七篇阐述了宇宙的暴胀理论. 这一理论解决了上述四个问题中的后三个. 它已经把我们带到 $t=10^{-36}$ 秒的宇宙极早期, 已接近宇宙的开端. 我们可以把加入了暴胀理论的大爆炸宇宙模型称为新的标准宇宙模型. 标准宇宙模型原来的四个困难问题还剩下一个, 即宇宙的初始奇点 (宇宙的创生) 问题, 这是本书第八篇 (量子宇宙学) 的内容.

广义相对论宇宙学是建立在爱因斯坦引力理论基础上的. 严格地说, 量子宇宙学应该建立在量子引力理论的基础上. 然而, 至今尚未建立一个令人满意的量子引力理论. 尽管如此, 人们仍然可以根据已经了解到的量子引力的某些特征, 去寻找各种途径, 尝试解决量子宇宙学的主要问题 —— 宇宙的创生问题. 20 世纪末, 哈特 (Hartle)、霍金 (Hawking)、维林金 (Vilenkin) 等提出, 用宇宙波函数来描述宇宙的量子状态, 宇宙动力学方程即惠勒–德维特方程. 这样, 只要确定宇宙的边界条件, 便可定量地研究宇宙的创生问题了. 本书第八篇阐述了哈特–霍金的量子宇宙学理论.

由引力场方程和场源物质及试验粒子的运动方程, 可以引出许多新的推论, 其中有一些具有明显的物理意义. 这些推论是牛顿力学中所没有的, 称为广义相对论引力效应. 本书第十篇收集了 141 种广义相对论引力效应. 除了和几个经典实验相对应的引力效应以外, 还有更多的引力效应不能为目前的实验所检验. 随着观测技术、引力辐射探测技术和空间技术的发展, 太阳系不再是检验引力理论的唯一场所, 这一点已经越来越明显. 可望在今后的 10 年内, 有更多的引力效应为新的实验所检验.

全书包括绪论、广义相对论基础、一些特殊形式的引力场、广义相对论流体动力学、黑洞物理、广义相对论宇宙学、宇宙的暴胀、量子宇宙学、Brans-Dicke 理论和膜宇宙、广义相对论引力效应十篇, 共 37 章 230 节.

作者与同事和合作者荆继良教授、余洪伟教授和唐智明教授获得过两次国际引力研究荣誉奖 (美国)、两次中国图书奖和一次教育部科技进步奖; 在几种相关杂志上发表过一些文章 (*Phys.Rev.D* 47 篇, *Ap.J.Lett.* 3 篇, *Ap.J.* 3 篇, *JCAP* 3 篇, *Nucl. Phys.* B 21 篇, *JHEP* 9 篇, *Phys. Lett. A&B* 32 篇, 《中国科学》4 篇), 加上诸多国内外同行学者的原始论文, 其中部分相关内容经补充推导和加工整理已写入书中.

作者深深感谢刘辽教授、郭汉英研究员、张元仲研究员、D.Kramer 教授、C.Will 教授、V.Cruz 教授、易照华教授和王绶琯院士、曲钦岳院士、杨国桢院士、周又元

院士、陆埮院士, 他们曾对作者的部分论文的初稿提出过有益的意见, 对作者的科研工作给予热情的关心和支持.

作者和须重明教授、彭秋和教授、梁灿彬教授、赵峥教授、王永成教授、李新洲教授、桂元星教授、钟在哲教授、黄超光研究员、沈有根研究员、罗俊教授、李芳昱教授进行过多次讨论和交流, 受益颇多, 在此一并致谢.

作者还要感谢樊军辉教授、吕君丽教授、郭鸿钧教授、黎忠恒教授、鄢德平编审以及黄亦斌、罗新炼、陈菊华、黄秀菊、陈松柏、潘启元、张佳林、龚添喜诸位博士, 他们对作者的科研工作和本书的出版给予了热情的帮助和支持.

本书和作者的前两本书《经典黑洞和量子黑洞》(王永久, 2008)、《经典宇宙和量子宇宙》(王永久, 2010) 分别得到了国家 "973" 计划、国家理论物理重点学科和中国科学院科学出版基金的资助, 作者深表感谢.

王永久
于湖南师范大学物理研究所
2010 年 4 月

目　　录

第七篇　宇宙的暴胀

第八篇　量子宇宙学

第九篇 Brans-Dicke 理论和膜宇宙

第十篇 广义相对论引力效应

第六篇　广义相对论宇宙学

在迄今为止人们所知道的各种力中, 引力是唯一不可屏蔽的长程力. 对于分布于大范围空–时中的大量物质和空–时本身, 引力应是起决定作用的力. 因此, 引力决定宇宙动力学, 从而决定宇宙的演化; 任何定量的宇宙学理论必须以引力理论为基础.

每种引力理论都有相应的宇宙模型, 如标量引力理论、FSG 理论等. 本篇只研究建立在爱因斯坦引力理论基础上的宇宙模型.

第 1 章　宇宙学原理和 Robertson-Walker 度规

宇宙学是论述整个宇宙的, 而人类对宇宙的观测只涉及宇宙的一小部分. 对这一小部分的观测又只有很短的历史. 对行星系的观测有几千年, 对其他星系的观测只有 100 年. 尽管如此, 人们以观测资料为基础, 根据爱因斯坦的引力理论, 已构成一幅宇宙演化的图像. 可以证明, 这一图像是自洽的, 与迄今为止的观测资料相符合. 按照下面要介绍的宇宙学原理, 人们没有必要知道尚未观测到的空间区域的任何情况.

1.1　宇宙学原理

按照现代的观测技术, 可观测区域已扩展到 3×10^9 光年. 为了以这一观测区域的信息为基础来研究宇宙的总体结构, 需要有一些假设. 在可观测到的区域内发现, 在宇观尺度上, 星系分布、射电源数目和微波背景辐射等基本上都是均匀的、各向同性的. 人们假设: 在宇观尺度上, 任何时刻三维宇宙空间是均匀的和各向同性的, 这就是**宇宙学原理**. 根据这一原理, 宇宙中一切位置都是等同的. 这样一来, 在宇宙中没有优越的位置和优越的方向, 当然也就没有必要知道尚未观测到的区域的情况. 宇宙中每一个星系或者星系团都是构成宇宙的平等元素. 根据宇宙学原理, 宇宙中任一点和任一方向都不可能用任一物理量的不同来区分. 但是同一点的物理量在不同时刻却可以有不同的值. 所以宇宙学原理允许宇宙随时间变化. 为了研究宇宙随时间的变化, 不同位置的观察者之间要能够比较他们的观测结果, 于是就必须有一共同的时间标准, 这一时间称为**宇宙时**. 宇宙时的存在也是宇宙学原理成立的前提.

1.2　Robertson-Walker 度规

宇宙学原理用几何术语表述为: 三维空间应是具有最大对称性的空间, 即一个具有常曲率但曲率可以随时间变化的空间. 根据第二篇、第三章的讨论, 满足上述要求的四维空–时一定具有 Robertson-Walker 度规

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - R^2(t)\left[\frac{\mathrm{d}r^2}{1-kr^2} + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2)\right]. \tag{1.2.1}$$

因此, 这个均匀宇宙模型的度规实际上已经由对称性要求所确定. 式中 $R(t)$ 是时间的未知函数, k 是一个常数, 适当选择 r 的单位, 可以使 k 取值为 +1,0 或 −1. 爱因斯坦引力场方程则作为宇宙动力学方程, 确定宇宙的时间行为 (宇宙的演化), 即确定函数 $R = R(t)$, 并确定局部空间性质即 k 的值. 这些问题将在第 2 章中讨论.

引入变换

$$r = \bar{r}\left(1 + \frac{1}{4}k\bar{r}^2\right)^{-1}, \tag{1.2.2}$$

可将 (1.2.1) 改写为

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - \frac{R^2(t)}{(1 + kr^2/4)^2}[\mathrm{d}\bar{r}^2 + \bar{r}^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2)]. \tag{1.2.3}$$

再作一次变换, 令

$$\begin{aligned} \bar{R}^2(t) &= R^2(t)\left(1 + \frac{1}{4}k\bar{r}^2\right)^{-2}, \\ \mathrm{d}\bar{t} &= \frac{\mathrm{d}t}{\bar{R}(t)}. \end{aligned} \tag{1.2.4}$$

则 (1.2.3) 化为

$$\mathrm{d}s^2 = \bar{R}^2(t)[\mathrm{d}\bar{t}^2 - \mathrm{d}\bar{r}^2 - \bar{r}^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2)] = \bar{R}^2\mathrm{d}s^2 \tag{1.2.5}$$

式中 $\mathrm{d}\bar{s}^2 = \mathrm{d}\bar{t}^2 - \mathrm{d}\bar{r}^2 - \bar{r}^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2)$ 为平直空–时度规. 由此可知, R-W 空–时和闵可夫斯基空–时是共形的, 即 R-W 空–时是共形平直的.

如果引入记号

$$f(\chi) = r = \begin{cases} \sin\chi, & \text{当} k = +1; \\ \chi, & \text{当} k = 0; \\ \mathrm{sh}\chi, & \text{当} k = -1, \end{cases} \tag{1.2.6}$$

则 R-W 度规 (1.2.1) 可改写为

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - R^2(t)[\mathrm{d}\chi^2 + f^2(\chi)(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2)]. \tag{1.2.7}$$

式 (1.2.7)、(1.2.3) 和 (1.2.1) 是 R-W 度规的三种不同形式.

在 (1.2.1) 中,$R(t)$ 称为**宇宙半径 (或宇宙标度因子)**, k 标志**空–时曲率**.$k = +1, 0, -1$ 分别对应于子空间 M 的曲率 $K > 0, K = 0, K < 0$. 在 (1.2.1) 中作代换, 令 $\sqrt{k}r = \bar{r}(k > 0)$, 得

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - \frac{R^2(t)}{k}\left[\frac{\mathrm{d}\bar{r}^2}{1 - \bar{r}^2} + \bar{r}^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2)\right]. \tag{1.2.8}$$

空间部分可表示为

$$\mathrm{d}s_{(3)}^2=\frac{R^2(t)}{k}\left[\frac{\mathrm{d}\bar{r}^2}{1-\bar{r}^2}+\bar{r}^2(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2)\right].\tag{1.2.9}$$

由此可得

$$K_{(3)}=\frac{k}{R^2(t)}.\tag{1.2.10}$$

三维平直空间 $\mathrm{d}\sigma^2=\delta_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j$ 中的二维曲面 $\delta_{ij}x^ix^j=\dfrac{1}{K}=R$就是一个曲率为 K 的常曲率空间. 图 6-1 是三种情况的示意图.

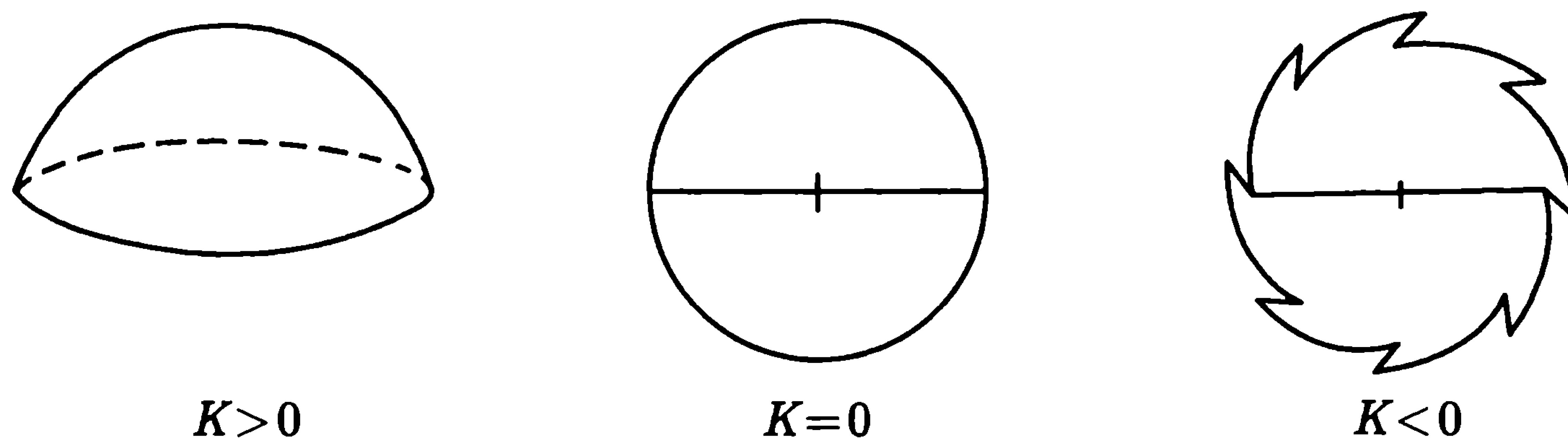


图 6-1

曲率为 K 的三维常曲率空间可以看作包容于四维平直空间的子空间 M.

1.3 空间距离和曲率

1. 固有空间距离

对于 R-W 度规 (1.2.1), 由坐标时与标准时的关系 $\mathrm{d}\tau=\sqrt{g_{00}}\mathrm{d}t$, 可得

$$\mathrm{d}\tau=\mathrm{d}t.\tag{1.3.1}$$

所以在 R-W 空–时中, 坐标时即标准时, 也就是本章开头提到的宇宙时. 按照所选用的单位, $c=G=1$, 我们有 $\mathrm{d}s=\mathrm{d}\tau=\mathrm{d}t$.

考虑任意两恒星 A 和 B, 选择坐标轴的方向, 使 r 轴通过 AB, 则 A 和 B 的空间距离为

$$\begin{aligned}l&=\int_A^B\mathrm{d}l=\int_A^B\sqrt{r_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j}=\int_{r_A}^{r_B}\sqrt{-g_{11}}\mathrm{d}r\\&=R(t)\int_{r_A}^{r_B}\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{1-kr^2}}.\end{aligned}\tag{1.3.2}$$

如果 r_A 和 r_B 固连, 则上式表明：当 $R(t)$ 是时间 t 的增函数时, 任意两恒星间的空间距离都随时间增大, 即宇宙是膨胀的; 当 $R(t)$ 是时间 t 的减函数时, 任意两恒星的空间距离都随时间减小, 宇宙是收缩的; 当 $R(t)$ 为常数时, 宇宙是静态的.

2. 空间的曲率

我们讨论 $k>0, k=0$ 和 $k<0$ 的三种宇宙空间.

(1) $k>0$ 的宇宙空间. 在 $k>0$ 的情况下, 积分 (1.3.2) 给出

$$l=\frac{R(t)}{\sqrt{k}}[\arcsin(\sqrt{k}r_B)-\arcsin(\sqrt{k}r_A)]. \tag{1.3.3}$$

上式表明,$\sqrt{k}r_B\leqslant 1, \sqrt{k}r_A\leqslant 1, l\leqslant\dfrac{\pi R(t)}{\sqrt{k}}$,即任意时刻、任意两颗恒星 (空间任意两点) 间的距离都是有限的, 也就是说, 在任何给定的时刻, 宇宙空间中不存在相距无限远的两个点.

设 $r_A=0$, 由 $(r_B)_{\max}=\dfrac{1}{\sqrt{k}}$ 可以算出宇宙空间的体积

$$\begin{aligned}V&=\int\sqrt{-g}\mathrm{d}^3x=\int_0^{1/\sqrt{k}}\sqrt{-g}r^2\mathrm{d}r\int_0^{\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\\&=4\pi R^3(t)\int_0^{1/\sqrt{k}}\frac{r^2\mathrm{d}r}{\sqrt{1-kr^2}}\\&=\pi^2R^3(t)k^{-3/2}.\end{aligned} \tag{1.3.4}$$

任何时刻宇宙空间的体积都是有限的. 所以, $k>0$ 的宇宙空间是有限的.

(2) $k<0$ 的宇宙空间. 此时积分 (1.3.2) 给出

$$l=\frac{R(t)}{\sqrt{k}}\ln\frac{\sqrt{-k}r_B+\sqrt{1-kr_B^2}}{\sqrt{-k}r_A+\sqrt{1-kr_A^2}}. \tag{1.3.5}$$

上式表明, 任一时刻 AB 间的距离没有上限. 所以 $k<0$ 的宇宙空间是无限的.

(3) $k=0$ 的宇宙空间. 此时, 积分 (1.3.2) 给出

$$l=R(t)r. \tag{1.3.6}$$

显然, $k=0$ 的宇宙空间也是无限的.

1.4 粒子和光子的行为

现在我们讨论粒子 (质点) 和光子在 R-W 空–时中的运动, 采用 (1.2.7). 在 (1.2.7) 的坐标系中, 一个静止的恒星相对于原点的固有 (纯空间) 位移 D 由式

$$D=\sqrt{-g_{11}}\chi=R(t)\chi \tag{1.4.1}$$

确定. 如果宇宙半径 R 随时间变化, 则恒星之间以及星系之间的距离也将随时间变化, 好像球面上两个固定点之间的距离 (沿球面上的短程线) 随着球半径的变化而变化一样. 由此产生的速度 $\dot{D}$ 和位移 D 成正比:

$$\dot{D} = \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{\dot{R}}{R} D. \tag{1.4.2}$$

适当选择坐标轴的方向，使一个自由运动的试验粒子沿一条径向轨道 ($\chi = \chi(s)$, $\theta =$ 常数, $\varphi =$ 常数) 运动. 这时粒子的世界线是度规

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - R^2(t)\mathrm{d}\chi^2 \tag{1.4.3}$$

的短程线. 由短程线方程可以得到守恒定律

$$R^2(t)\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}s} = \frac{R^2}{\sqrt{1 - R^2\left(\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}t}\right)^2}}\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}t} = \text{const.} \tag{1.4.4}$$

设粒子的静止质量为 m_0, 用 v 表示速度 $R\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}t}$, 用 p 表示动量 $mv = m_0 v/\sqrt{1 - v^2}$, 则守恒定律 (1.4.4) 在三维空间具有形式

$$pR = \text{const.} \tag{1.4.5}$$

上式表明, 对于自由运动的粒子, 其动量和宇宙半径的乘积等于常数.

对于光子, 人们期望得到一个类似的结果, 即光子的波长或频率和宇宙半径的关系.

和导出 (1.3.2) 的情况一样, 设 AB 两点沿坐标 r 的方向. A 点有一光源, 于 $t = t_A$ 时刻发出一波面, 传播到 B 点的时刻为 t_B. 将 $\mathrm{d}s = \mathrm{d}\theta = \mathrm{d}\varphi = 0$ 代入度规 (1.2.1) 得

$$\mathrm{d}t^2 - R^2(t)\frac{\mathrm{d}r^2}{\sqrt{1 - kr^2}} = 0, \tag{1.4.6a}$$

分离变量并积分, 得到

$$\int_{t_A}^{t_B} \frac{\mathrm{d}t}{R(t)} = \int_{r_A}^{r_B} \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{1 - kr^2}}. \tag{1.4.6b}$$

另一波面于 $t_A + \Delta t_A$ 时刻自 A 点发出, 于 $t_B + \Delta t_B$ 时刻到达 B 点. 同理可得

$$\int_{t_A+\Delta t_A}^{t_B+\Delta t_B} \frac{\mathrm{d}t}{R(t)} = \int_{r_A}^{r_B} \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{1 - kr^2}}. \tag{1.4.7}$$

假设在上述过程中 r_A 和 r_B 都保持不变, 两式相减, 得到

$$\int_{t_A+\Delta t_A}^{t_B+\Delta t_B} \frac{\mathrm{d}t}{R(t)} - \int_{t_A}^{t_B} \frac{\mathrm{d}t}{R(t)} = 0,$$

即

$$\left(\int_{t_A+\Delta t_A}^{t_A} \frac{\mathrm{d}t}{R(t)} + \int_{t_A}^{t_B+\Delta t_B} \frac{\mathrm{d}t}{R(t)}\right) - \left(\int_{t_A}^{t_B+\Delta t_B} \frac{\mathrm{d}t}{R(t)} + \int_{t_B+\Delta t_B}^{t_B} \frac{\mathrm{d}t}{R(t)}\right) = 0,$$

$$\int_{t_A}^{t_A+\Delta t_A} \frac{\mathrm{d}t}{R(t)} = \int_{t_B}^{t_B+\Delta t_B} \frac{\mathrm{d}t}{R(t)}.$$

根据积分中值定理, 有

$$\frac{\Delta t_A}{R(\bar{t}_A)} = \frac{\Delta t_B}{R(\bar{t}_B)}. \tag{1.4.8}$$

式中 $t_A \leqslant \bar{t}_A \leqslant t_A + \Delta t_A, t_B \leqslant \bar{t}_B \leqslant t_B + \Delta t_B$. 考虑无限近的两个波面, 即 $\Delta t_A \to 0, \Delta t_B \to 0$, 我们有

$$\frac{\Delta t_A}{R(t_A)} = \frac{\Delta t_B}{R(t_B)} \quad (\text{当}\Delta t_A \to 0, \Delta t_B \to 0).$$

由此得

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta t_B}{\Delta t_A} = \frac{\nu_A}{\nu_B} = \frac{\lambda_B}{\lambda_A} = \frac{R(t_B)}{R(t_A)}, \tag{1.4.9a}$$

或

$$\nu R = \text{const.} \tag{1.4.9b}$$

由 (1.4.9a) 可以得到红移 z 的表达式

$$z \equiv \frac{\lambda_B - \lambda_A}{\lambda_A} = \frac{R(t_B)}{R(t_A)} - 1. \tag{1.4.9c}$$

当 $R(t_B) > R(t_A)$(宇宙膨胀) 时, $z > 0$(红移); 当 $R(t_B) < R(t_A)$(宇宙收缩) 时, $z < 0$(紫移); 当 $R(t_B) = R(t_A)$(宇宙为静态) 时, $z = 0$(无频移).

如果在比较短的时间 $(t - t_A)$ 内 $R(t)$ 的变化比较小, 可将 $R(t)$ 展开为 $(t - t_A)$ 的泰勒级数并取其前几项. 展开式为

$$\begin{aligned} R(t) &= R(t_A) + \dot{R}(t_A)(t - t_A) + \frac{1}{2}\ddot{R}(t_A)(t - t_A)^2 + \cdots \\ &\equiv R(t_A)\left[1 + H(t - t_A) - \frac{1}{2}qH^2(t - t_A)^2 + \cdots\right]. \end{aligned} \tag{1.4.10}$$

式中

$$H(t_A) \equiv \frac{\dot{R}(t_A)}{R(t_A)} \tag{1.4.11}$$

称为**哈勃 (Hubble)**常数;

$$q(t_A) \equiv -\frac{\ddot{R}(t_A)R(t_A)}{\dot{R}^2(t_A)}, \tag{1.4.12}$$

称为**减速因子**.

将 (1.4.10) 代入 (1.4.9c), 得到红移 z 和光的传播时间的关系

$$z = H(t_A - t_B) + \left(1 + \frac{q}{2}\right) H^2(t_A - t_B)^2 + \cdots. \tag{1.4.13}$$

通常, 用红移与光源距离的关系来检验 R-W 度规用于宇宙模型的正确性. 在一级近似下, 将 (1.4.10) 代入 (1.4.3)($\mathrm{d}s=0$), 积分得

$$\chi=\int_{t_A}^{t_B}\frac{\mathrm{d}t}{R(t)}\approx\frac{t_B-t_A}{R(t_B)}+\frac{H(t_B-t_A)^2}{2R(t_B)}+\cdots. \tag{1.4.14}$$

应用 (1.4.1) 和 (1.4.2), 得到

$$z=HD+\frac{1}{2}(q+1)H^2D^2+\cdots=\dot{D}+\frac{1}{2}(\dot{D}+D\ddot{D})+\cdots. \tag{1.4.15}$$

上式表明, 在一级近似下红移正比于光源与观察者的固有距离, 或正比于光源速度 $\dot{D}$ 与光速 ($c=1$) 的比值. 这就是**哈勃定律**. 这一定律是哈勃 (1929) 在总结大量观测资料的基础上发现的, 它表明宇宙中任何两颗恒星 (或星系) 都在相互退行, 即**宇宙在膨胀.**

第2章　宇宙动力学

要确定宇宙的演化, 就必须确定 R-W 度规中的宇宙半径的函数形式 $R=R(t)$ 和标志曲率的参量 k. 宇宙动力学的任务是根据宇宙物质的性质和爱因斯坦引力场方程计算这两个量.

2.1　爱因斯坦场方程

理想流体的爱因斯坦场方程具有形式

$$
\begin{aligned}
&R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R+g_{\mu\nu}\lambda=8\pi T_{\mu\nu},\\
&T_{\mu\nu}=(\rho+p)u_\mu u_\nu-pg_{\mu\nu}.
\end{aligned}
\tag{2.1.1}
$$

在随动系中, $u_\mu=\delta^0_\mu$, 对于均匀宇宙, ρ 和 p 只是时间 t 的函数. 由 R-W 度规可得

$$
\begin{aligned}
&g_{00}=1,\quad g_{0i}=0,\quad g_{11}=-\frac{R^2(t)}{1-kr^2},\\
&g_{22}=-r^2R^2(t),\quad g_{33}=-r^2R^2(t)\sin^2\theta;
\end{aligned}
\tag{2.1.2}
$$

$$
\begin{aligned}
&R_{00}=-3\ddot{R}/R,\quad R_{0i}=0,\\
&R_{ij}=\frac{(R\ddot{R}+2\dot{R}^2+2k)g_{ij}}{R^2}.
\end{aligned}
\tag{2.1.3}
$$

注意到 $u_\mu=\delta^0_\mu$, 我们有

$$
\begin{aligned}
&S_{\mu\nu}\equiv T_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}T=\frac{1}{2}(p-\rho)g_{\mu\nu}+(\rho+p)u_\mu u_\nu,\\
&S_{00}=\frac{1}{2}(\rho+3p),\quad S_{0i}=0,\\
&S_{ij}=\frac{1}{2}(\rho-p)g_{ij}.
\end{aligned}
\tag{2.1.4}
$$

于是, 便可组成爱因斯坦场方程 $R_{\mu\nu}=8\pi S_{\mu\nu}$. 它的 $0i$ 分量为一恒等式, 00 分量和 ii 分量分别为

$$
\frac{3\ddot{R}}{R}=-4\pi(\rho+3p),
\tag{2.1.5}
$$

$$
R\ddot{R}+2\dot{R}^2+2k=4\pi(\rho-p)R^2.
\tag{2.1.6}
$$

消去 $\ddot{R}$, 得到

$$\frac{\dot{R}2}{R^2}+\frac{k}{R^2}=\frac{8\pi}{3}\rho. \tag{2.1.7}$$

同时, 将 (2.1.1) 和 $u_\mu=\delta_\mu^0$ 代入 $T^{\mu\nu}_{;\nu}=0$ 得到守恒方程的具体形式

$$\dot{p}R^3=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[R^3(\rho+p)],$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R}(\rho R^3)=-3pR^2. \tag{2.1.8}$$

(2.1.5)~(2.1.8) 中只有两个方程是独立的. 当给定物态方程 $p=p(\rho)$ 时, 由上式可以确定函数 $\rho=\rho(R)$, 从而由 (2.1.7) 积分定出 $R=R(t)$. 所以, 宇宙动力学的基本方程是爱因斯坦方程 (2.1.7)、能量守恒方程 (2.1.8) 和物态方程 $p=p(\rho)$.

以 R-W- 度规为基础, 按上述程序确定 $R(t)$ 的宇宙模型称为弗里德曼 (Friedmann) 模型, 或称**标准宇宙模型.**

2.2 弗里德曼宇宙模型

在不知道物态方程 $p=p(\rho)$ 的情况下, 分析场方程和守恒方程, 也可以得到许多关于弗里德曼 (Friedmann) 宇宙现在、过去和将来的膨胀情况.

由方程 (2.1.5) 可知, 只要 $\rho+3p>0$, 就有 $\ddot{R}/R<0$. 根据现在的观测事实, 有 $\dot{R}/R>0$(观测到红移), $R>0$. 由此可画出函数 $R=R(t)$ 的曲线 (图 6-2). 设曲线与 t 轴的交点为 $t=0$, 即

$$R(0)=0. \tag{2.2.1}$$

此时容易证明, 当 $t=0$ 时曲率标量

$$|R^\mu_\mu|=\left|\frac{6}{R(t)}\right|=\ddot{R}(t)+\frac{1}{R(t)}(\dot{R}^2(t)+k)\Big|\to\infty. \tag{2.2.2}$$

上式表明宇宙必然在过去的某一时刻为一奇点, 从那时开始“爆炸”开来, 膨胀到今天方有这么大的宇宙半径 $R(t_0)$. 从宇宙为奇点到现在所经历的时间 t_0 自然被称为宇宙年龄. 如图 6-2 所示.

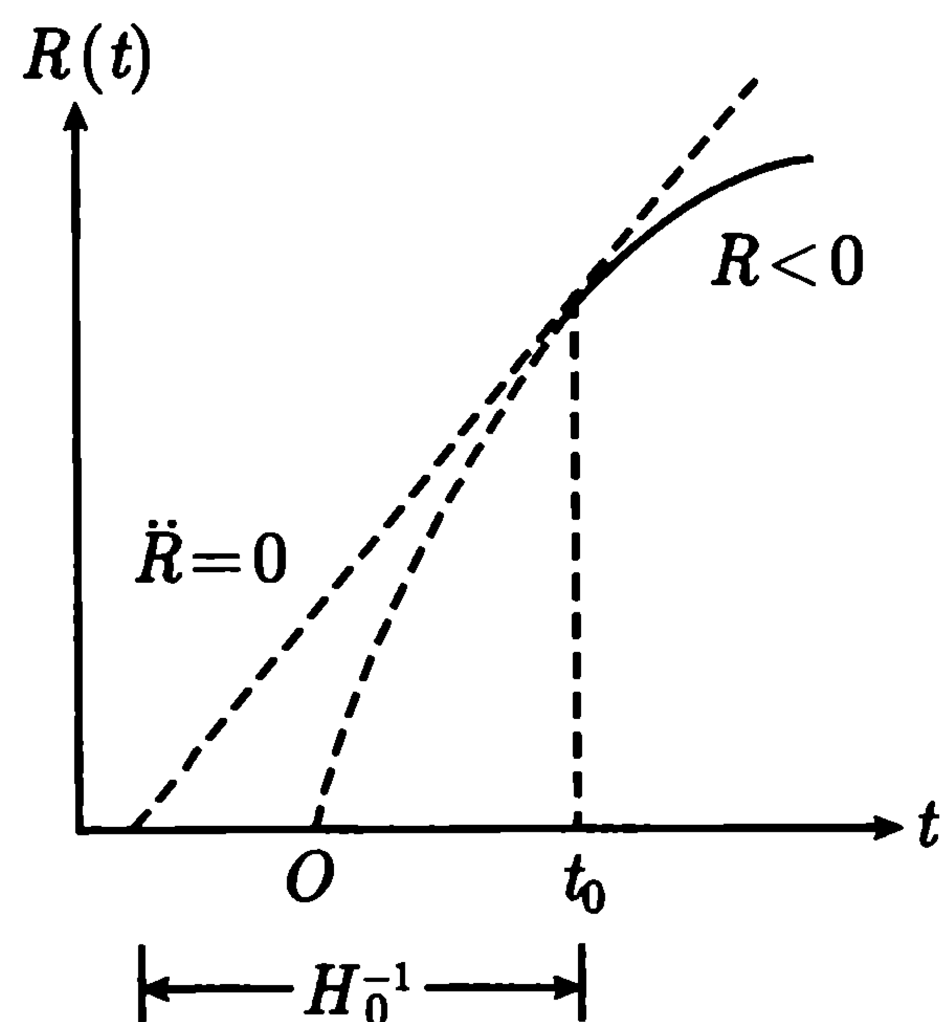


图 6-2

根据哈勃常数定义(1.4.11)有 $H_0=\dot{R}(t_0)/R(t_0)$, 由上式得到

$$t_0=\frac{1}{H_0}\qquad(\ddot{R}=0, 当 0<t<t_0). \tag{2.2.3}$$

如果 $\ddot{R}(t) = 0$, 当 $(0 < t < t_0)$, 则

$$\dot{R}(t) = A = \text{const}, \ R(t) = At.$$

根据观测得到的哈勃常数值 H_0=50km^{-1}· s·Mpc^{-1}(1Mpc=3.08×10^{24}cm), 可知 $H_0^{-1} \approx 2 \times 10^{10}$ 年.

如果 $\ddot{R}(t) < 0$(当$0 < t < t_0$), 则有

$$t_0 < \frac{1}{H_0}. \tag{2.2.4}$$

宇宙年龄的计算将在 2.4 节中给出.

顺便提一下, 上面讨论的是 $\rho+3p > 0$ 的情况, 如果在宇宙早期有 $\rho+3p = 0$, 则宇宙不存在初始奇点. 宇宙早期以辐射为主, 因而有态方程 $p = \dfrac{1}{3}\rho$, 此式与 $\rho+3p = 0$ 一起, 导致 $p = \rho = 0$. 此时由 (2.1.5) 和 (2.1.6) 得到 $\ddot{R} = 0, \dot{R}^2 = -k(k \leqslant 0)$, 从而有 $R_{\mu\nu} = 0$, 即宇宙空–时是**Ricci 平直的.** 此时 $|R^{\mu}_{\mu}|_{t=0}$ = 有限值. 因此 $3p + \rho = 0$ 的宇宙模型没有初始奇点.

Friedmann 宇宙的未来是无限膨胀还是收缩取决于空间曲率 k 的符号. 由 (2.1.8) 可知, 只要 $p \geqslant 0$, 则 $\mathrm{d}(\rho R^3)/\mathrm{d}R \leqslant 0, \rho$ 随 R 增大而减小的速率至少等于 R^{-3}. 所以 $\rho R^2 \to 0$(至少正比于 R^{-1}), 代入 (2.1.7) 有

$$\dot{R}^2 + k \to 0.$$

如果 $k = -1$, 由于 $\dot{R}^2 > 0$, 所以 $R(t)$ 必然继续增大. 由上式可知 $\dot{R}^2 \to -k, R \to t$. 因此, 如果 $k = -1$, 宇宙将无限膨胀, 若 $k = 0$, 则 $\dot{R}^2 \to 0$ 且 $\dot{R}2 > 0$, 所以 $R(t)$ 继续增大, 只是比 t 增大得慢. 因此,$k = 0$ 宇宙也将无限膨胀. 对于 $k = +1$,(2.1.7) 可改写为

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi}{3}\rho R^2 - k = \frac{8\pi}{3}\rho R^2 - 1. \tag{2.2.5}$$

当 ρR^2 减至 1 时 $\dot{R}^2 = 0$. 由于 $\ddot{R}(t) < 0$, 图线向下弯, 所以此后 $R(t)$ 减小, 最后宇宙必然在将来的一段有限时间内再次缩至奇点 $(R = 0)$, 如图 6-3 所示.

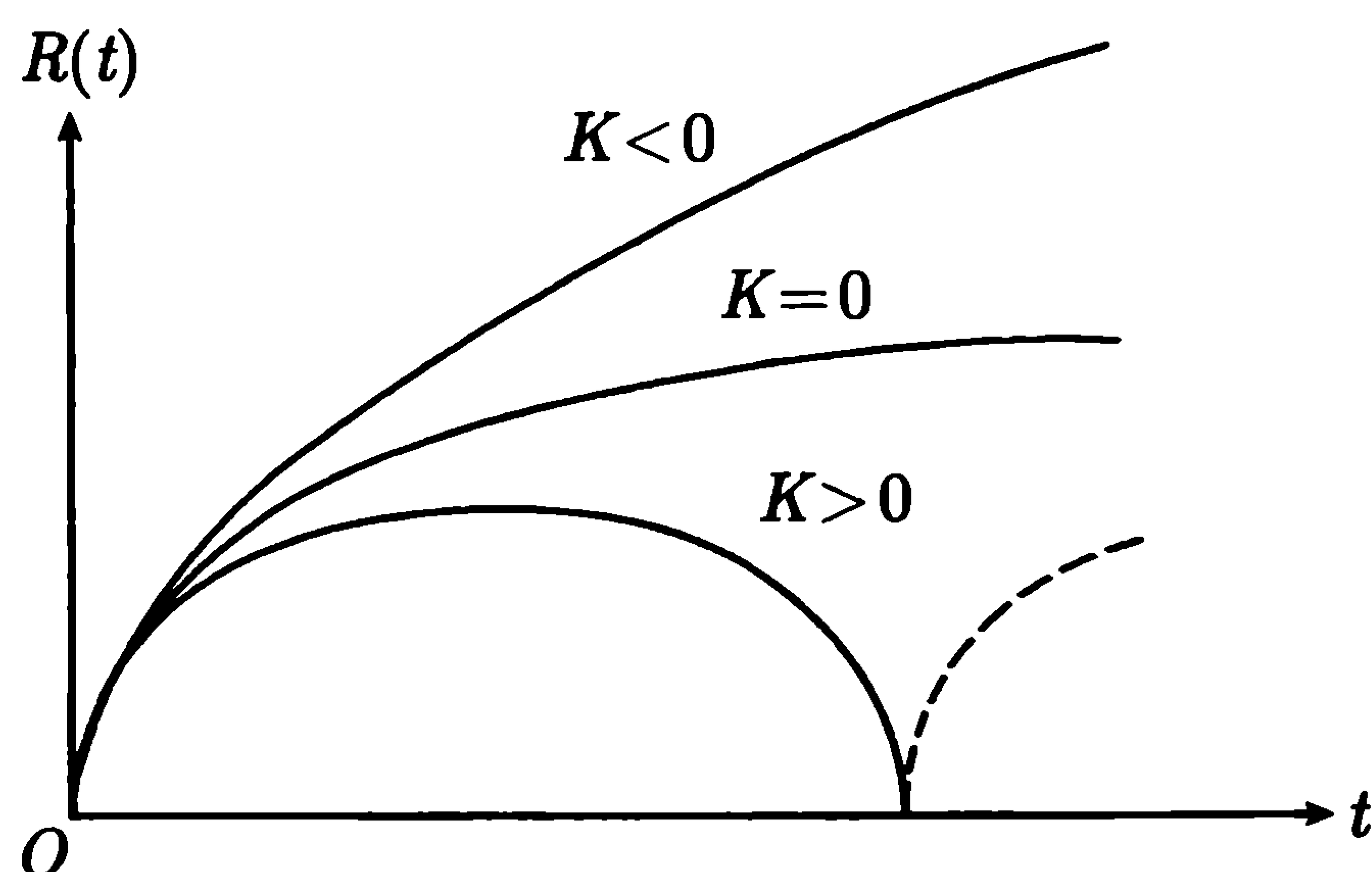


图 6-3

大约在弗里德曼模型提出 7 年以后, E.P.Hubble 于 1929 年发现了宇宙红移现象, 这是对广义相对论宇宙学的重要验证之一. 宇宙红移的发现不仅证明了广义相对论宇宙学特别是宇宙膨胀概念的正确, 而且可以通过对红移的严格计算确定均匀、各向同性宇宙模型中哪一个更适合于描述真实的宇宙. 原则上可以由红移 [作为距离的函数, 见 (1.4.15)] 确定哈勃常数 H 和减速因子 q, 从而确定宇宙的演化.

2.3 宇宙物质的密度和压强

将哈勃常数 $H=\frac{\dot{R}}{R}$ 和减速因子 $q=-\frac{\ddot{R}R}{\dot{R}^2}$ 代入场方程 (2.1.5) 和 (2.1.6), 得到

$$\rho_0=\frac{3}{8\pi}\left(\frac{k}{R_0^2}+H_0^2\right), \tag{2.3.1}$$

$$p_0=-\frac{1}{8\pi}\left[\frac{k}{R_0^2}+H_0^2(1-2q_0)\right]. \tag{2.3.2}$$

式中下标 0 表示取现在的值. 令

$$\rho_{\mathrm{c}}=\frac{3H_0^2}{8\pi}. \tag{2.3.3}$$

由 (2.3.1) 可知

$$\begin{aligned}&\rho_0>\rho_{\mathrm{c}}\rightleftharpoons k>0,\\&\rho_0<\rho_{\mathrm{c}}\rightleftharpoons k<0,\\&\rho_0=\rho_{\mathrm{c}}\rightleftharpoons k=0.\end{aligned} \tag{2.3.4}$$

取 $H_0=50\mathrm{km\cdot s^{-1}\cdot Mpc^{-1}}$, 可得 $\rho_{\mathrm{c}}=5\times10^{-30}\mathrm{g\cdot cm^{-3}}$. 根据观测, 可认为宇宙现在的物质形式主要是非相对论性的, 且满足条件

$$p_0\ll\rho_0. \tag{2.3.5}$$

此时由 (2.3.2) 和 (2.3.1) 得到

$$\begin{aligned}&k=R_0^2(2q_0-1)H_0^2,\\&\frac{\rho_0}{\rho_{\mathrm{c}}}=2q_0,\end{aligned} \tag{2.3.6}$$

从而有

$$q_0>\frac{1}{2}\rightleftharpoons k>0,$$
$$q_0<\frac{1}{2}\rightleftharpoons k<0,$$

$$q_0 = \frac{1}{2} \rightleftharpoons k = 0. \tag{2.3.7}$$

宇宙是闭合的还是开放的, 按照 (2.3.4) 取决于 ρ_0. $\rho_0 \leqslant \rho_c$, 宇宙是开放的; $\rho_0 > \rho_c$, 宇宙是闭合的. 或者按照 (2.3.7) 取决于减速因子 q_0. $q_0 \leqslant 1/2$, 宇宙是开放的; $q_0 > 1/2$, 宇宙是闭合的. ρ_0 可以通过测量星系质量 (由测量光度得到) 来确定, 结果为

$$\frac{\rho_0}{\rho_c} = 0.010 \sim 0.028. \tag{2.3.8}$$

q_0 可以由红移–光度关系的观测确定, 结果为

$$q_0 \approx 1, \ \rho_0 \approx 2\rho_c. \tag{2.3.9}$$

根据 (2.3.8), 宇宙是开放的; 根据 (2.3.9), 宇宙是闭合的. 为了解决这一矛盾, 可以假设 $q_0 \approx 1$ 是正确的, 再设法寻找普通星系之外的质量, 这一至今还未找到的质量的平均密度应为 $2 \times 10^{-29}\mathrm{g \cdot cm^{-3}}$. 经过几十年的努力, 在这方面有了一定的进展, 如黑洞、暗物质、中微子的静质量 …… 如果存在的话, 都会有助于这一问题的解决.

2.4　宇宙年龄的计算

由 2.2 节中的讨论可知, 宇宙物质静质量的能量密度 $\rho \sim R^{-3}$, 而辐射的能量密度 $\rho_r \sim R^{-4}$. 因此, 可以认为在现在的宇宙中, 已知形式的辐射能量密度小于静质量的能量密度. 宇宙物质主要由非相对论的松散物质 (尘埃) 构成. 在这个时间, 宇宙动力学方程 (爱因斯坦方程) 为 (2.1.7)

$$\dot{R}^2 + k = \frac{8\pi}{3}\rho R^2. \tag{2.4.1}$$

由于 $\rho \sim R^{-3}$, 故有

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{R}{R_0}\right)^{-3}. \tag{2.4.2}$$

由 (2.3.6) 可得

$$\frac{k}{R_0^2} = (2q_0 - 1)H_0^2, \quad \frac{8\pi}{3}\rho_0 = 2q_0 H_0^2.$$

代入 (2.4.1) 和 (2.4.2), 得到

$$\left(\frac{\dot{R}}{R_0}\right)^2 = H_0^2\left[1 - 2q_0 + 2q_0\left(\frac{R_0}{R}\right)\right]. \tag{2.4.3}$$

积分上式, 给出 t 的表达式

$$t = \frac{1}{H_0}\int_0^{R/R_0}\left(1 - 2q_0 + \frac{2q_0}{x}\right)^{-1/2}\mathrm{d}x, \tag{2.4.4}$$

代入 $R=R_0$, 得到宇宙现在的年龄

$$t_0=\frac{1}{H_0}\int_0^1\left(1-2q_0+\frac{2q_0}{x}\right)^{-1/2}\mathrm{d}x. \tag{2.4.5}$$

只要 $q_0>0$, 必有 $t_0<H_0^{-1}$, 即 (2.2.4) 式. 上式给出的函数关系如图 6-3 所示.

当 $q_0>\frac{1}{2}(k=+1,\rho_0>\rho_c)$ 时, 积分得

$$t_0=\frac{q_0}{H_0}(2q_0-1)^{-3/2}\left[\arccos\left(\frac{1}{q_0}-1\right)-\frac{1}{q_0}(2q_0-1)^{1/2}\right]. \tag{2.4.6}$$

代入 $q_0\approx 1, H_0^{-1}\approx 2\times 10^{10}$ 年, 得到

$$t_0\approx\left(\frac{\pi}{2}-1\right)H_0^{-1}\approx 1.1\times 10^{10}\text{年}. \tag{2.4.7}$$

由 (2.4.5) 还可以求出两次 $R=0$ 之间的时间间隔, 即宇宙的“寿命”.

$$\tau\approx 13\times 10^{10}\text{年}. \tag{2.4.8}$$

当 $q_0=\frac{1}{2}(k=0,\rho_0=\rho_c)$ 时, 积分 (2.4.4) 给出

$$\frac{R(t)}{R_0}=\left(\frac{3H_0t}{2}\right)^{2/3} \tag{2.4.9}$$

上式表明 $R(t)$ 无限增大. 代入 $H_0^{-1}\approx 2\times 10^{10}$ 年, 得到

$$t_0=\frac{2}{3}H_0^{-1}\approx 1.3\times 10^{10}\text{年}. \tag{2.4.10}$$

这一模型称为**Einstein-de Sitter 宇宙模型.**

当 $0<q_0<\frac{1}{2}(k=-1,\rho_0<\rho_c)$ 时, 积分 (2.4.5) 给出

$$t_0=\frac{1}{H_0}\left[(1-2q_0)^{-1}-q_0(1-2q_0)^{-3/2}\mathrm{arch}\times\left(\frac{1}{q_0}-1\right)\right]. \tag{2.4.11}$$

如果取 ρ_0 为星系内的质量密度, $q_0\approx 0.014, H_0^{-1}\approx 2\times 10^{10}$ 年, 则有

$$t_0=0.96H_0^{-1}\approx 1.9\times 10^{10}\text{年}.$$

根据同位素衰变的方法和天文学其他方法测得地球的年龄大约为 4.5×10^9 年, 太阳系的年龄大约为 5×10^9 年, 银河系的年龄大约为 1.1×10^{10} 年.

2.5 粒子视界和事件视界

光速是所有信号传播速度的上限. 设在 r_1 处于时刻 t_1 发出的光在时刻 t 到达 $r=0$, 则 $r=0$ 处的观察者在时刻 t 只能观测到来自区域 $r<r_1$ 的信号, 即只能看到这个区域内的粒子 (星系).

径向光线的传播方程可写为 (1.4.6)

$$\int_{t_1}^{t} \frac{\mathrm{d}t}{R(t)} = \int_{0}^{r_1} \frac{\mathrm{d}r}{1-kr^2}. \tag{2.5.1}$$

如果当 $t_1 \to 0$ 时左端积分发散, $r=0$ 处观察者能够观测到宇宙中任何随动粒子 (星系) 在足够早时发出的信号. 如果当 $t_1 \to 0$ 时左端的积分收敛, 则由上式可以确定 r_1, 即存在一个有限的区域, $r=0$ 处观察者在时刻 t 只能看到这区域内的随动粒子 (星系). 这一区域的边界称为粒子视界. 以 $r_H(t)$ 表示粒子视界的径向坐标, 则相应的固有空间距离为

$$\begin{aligned} D_H(t) &= \int_0^{r_H(t)} \sqrt{-g_{11}}\mathrm{d}r = R(t)\int_0^{r_H(t)} \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{1-kr^2}} \\ &= R(t)\int_0^t \frac{\mathrm{d}t}{R(t)}. \end{aligned} \tag{2.5.2}$$

由 (2.4.3) 将 $\mathrm{d}t$ 解出, 代入上式右端被积式中, 积分得到

当 $q_0 > \frac{1}{2}(k=+1)$ 时

$$D_H(t) = \frac{R(t)}{R_0H_0}(2q_0-1)^{-1/2}\mathrm{arccos}\left[1-\frac{(2q_0-1)R(t)}{q_0R_0}\right].$$

当 $q_0 = \frac{1}{2}(k=0)$ 时

$$D_H(t) = \frac{2}{H_0}\left[\frac{R(t)}{R_0}\right]^{3/2}.$$

当 $q_0 < \frac{1}{2}(k=-1)$ 时

$$D_H(t) = \frac{R(t)}{R_0H_0}(1-2q_0)^{-1/2}\mathrm{arch}\left[1+\frac{(1-2q_0)R(t)}{q_0R_0}\right]. \tag{2.5.3}$$

对于一些宇宙模型, 在宇宙的全部演化过程 ($R=0 \to R_{\max} \to 0$), 空间一点 ($r=0$) 的观察者所能看到的全部事件也只能在有限范围内, 这一范围的边界叫做**事件视界**.

在积分 (2.5.1) 中, 当 $t \to \tau$(宇宙寿命) 或 $t \to \infty$ 时, 若左端积分发散, 则不存在事件视界, 位于 $r=0$ 的观察者只要等待有限长时间就能观测到宇宙中任一事件. 若 (2.5.1) 左端积分收敛, 则存在事件视界, 此时有

$$\int_{t_1}^{\tau} \frac{\mathrm{d}t}{R(t)} \geqslant \int_0^{r_1} \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{1-kr^2}}, \tag{2.5.4}$$

式中 τ 为宇宙年龄或无限大, r_1 为事件视界 [到观察点 ($r=0$)] 的径向坐标. 对于

$q_0 \leqslant \frac{1}{2}$ 的模型, $t \to \infty$ 时左端积分发散, 没有事件视界. $q_0 > \frac{1}{2}$ 的模型, 左端积分收敛, 存在事件视界, 此时由 (2.5.4) 可以确定事件视界与点 $r = 0$ 的固有空间距离:

$$D_E(t_1)=R(t_1)\int_{t_1}^{\tau}\frac{\mathrm{d}t}{R(t)}=\frac{R(t_1)}{R_0H_0}(2q_0-1)^{-1/2}\cdot\left\{2\pi-\arccos\left[1-\frac{(2q_0-1)R(t_1)}{q_0R_0}\right]\right\}. \tag{2.5.5}$$

2.6 含有宇宙因子的模型

我们回到 $\lambda \neq 0$ 的引力场方程, 讨论相应的几种宇宙模型.

对于含有宇宙项的场方程, 代入 R-W 度规并进行和得到 (2.1.5)~(2.1.6) 一样的运算, 得到

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2}+\frac{k}{R^2}-\frac{\lambda}{3}=\frac{8\pi}{3}\rho, \tag{2.6.1}$$

$$\frac{2\ddot{R}}{R}+\frac{\dot{R}^2}{R^2}+\frac{k}{R^2}-\lambda=-8\pi p. \tag{2.6.2}$$

将 (2.6.1) 对 t 微分并代入 (2.6.2), 得到关系式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho R^3)+p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}R^3=0. \tag{2.6.3}$$

这就是 (2.1.8). 在 2.1 节我们由守恒定律得到了此式. 与那里的情况一样, 方程 (2.6.1)~(2.6.3) 中只有两个是独立的.

对于零压 ($p = 0$) 的情况, 由 (2.6.3) 可知 $\rho R^3 =$ 常数. 为了方便起见, 令

$$C=\frac{8\pi}{3}\rho R^3, \tag{2.6.4}$$

代入 (2.1.7), 得到

$$\dot{R}^2=\frac{C}{R}+\frac{\lambda}{3}R^2-k\equiv F(R,\lambda,k), \tag{2.6.5}$$

上式称为**弗里德曼膨胀方程**. 由这一方程可知, 如果 $a(t)$ 是一个解, 则将 t 换为 $t' = \pm t + \text{const.}$ 之后对应的 $a(t')$ 仍是一个解, 因此, 可以任意选择时间坐标起点 $t = 0$. 又因为 $R = 0$ 为奇点, 通过此点时 R 不应改变, 所以 $R(t)$ 不变号. 现在 $R > 0$, 于是始终有 $R(t) \geqslant 0$. 作为例子, 下面讨论爱因斯坦宇宙和 de Sitter 宇宙.

1. 爱因斯坦宇宙

爱因斯坦在建立场方程后不久, 就试图用于宇宙学. 当时还没有发现哈勃定律, 爱因斯坦致力于建立一个静态的宇宙模型, 后来称为**爱因斯坦宇宙**. 在上面两个方程中令所有的时间导数等于零, 并令 $\lambda = 0$(爱因斯坦开始建立的场方程), 得到

$$\frac{k}{R^2}=\frac{8\pi}{3}\rho,\quad \frac{k}{R^2}=-8\pi p.$$

观测结果是 $\rho > 0, p \approx 0$. 上式无法与观测结果一致. 因此, 爱因斯坦在场方程中人为地引入了宇宙项 $\lambda g_{\mu\nu}$. 引入宇宙项后的静态场方程为

$$\frac{k}{R^2} - \frac{\lambda}{3} = \frac{8\pi}{3}\rho, \quad \frac{k}{R^2} - \lambda = -8\pi p.$$

代入 $p \approx 0$, 得到 $\dfrac{k}{R^2} = \lambda = 4\pi\rho$. 由于 $\rho > 0$, 所以有 $\lambda > 0, k = +1$. 因此,静态的爱因斯坦宇宙是一个具有正的常曲率的闭合宇宙. 此时度规 (1.2.7) 具有形式

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - R^2[\mathrm{d}x^2 + \sin^2 x(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\varphi^2)], \ R = \text{const.} \tag{2.6.6}$$

2. de Sitter 宇宙

这是一个假想的既无物质又无辐射的宇宙模型. 由含宇宙项的场方程可知, 没有物质 ($T_{\mu\nu} = 0$) 的空间也是弯曲的. 将 $\rho = p = 0$ 代入 (2.6.1) 和 (2.6.2), 得到

$$\lambda = \frac{3}{R^2}(\dot{R}2 + k), \quad R\ddot{R} = \dot{R}^2 + k = \frac{R^2}{3}\lambda.$$

积分上式, 对于 $\lambda > 0$, 得到

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{A_1}\mathrm{ch}A_1 t, \quad k = +1, \\ R &= \frac{1}{A_1}\mathrm{sh}A_1 t, \quad k = -1, \\ R &= C\mathrm{e}^{A_1}t, \quad k = 0. \end{aligned} \tag{2.6.7}$$

式中 $A_1 \equiv (\lambda/3)^{1/2}$; 对于 $\lambda < 0$, 得到

$$R = \frac{1}{A_2}\cos A_2 t, \quad k = -1. \tag{2.6.8}$$

式中 $A_2 \equiv (-\lambda/3)^{1/2}$; 对于 $\lambda = 0$, 得到

$$R = \text{const.}, \quad k = 0. \tag{2.6.9}$$

由 (2.6.7)~(2.6.9) 确定的宇宙称为 de Sitter 宇宙. 该宇宙对应的空间是具有最大对称性的四维常曲率空间. 为简单起见, 设 $R(t) = \mathrm{e}^t$, 此时 Killing 方程具有形式

$$\frac{\partial \xi^0}{\partial t} = 0, \ \frac{\partial \xi}{\partial x^i}g^{ij} + \frac{\partial \xi^i}{\partial t} = 0, \tag{2.6.10a}$$

$$\frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} + \frac{\partial \xi^j}{\partial x^i} = 2\delta_{ij}\xi^0. \tag{2.6.10b}$$

这一方程组的解含有 14 个参量 (A^μ 和 $B^{\mu\nu}$):

$$\xi^0 = A^0 + B_{0i}x^i,$$

$$\xi^i = A^i - \frac{1}{2}A^0x^i - \frac{1}{2}B^{0i}\mathrm{e}^{-2t} - \frac{1}{4}B_{0k}x^kx^i$$
$$+ \frac{1}{4}\delta_{jk}B^{0i}x^jx^k + B^i_kx^k. \tag{2.6.11}$$

由 (2.6.10b) 可知, $B^{\mu\nu}$ 中只有 6 个独立分量, 所以实际上有 10 个独立的 Killing 矢量. 因为 n 维空间最多存在 $n(n+1)/2$ 个 Killing 矢量, 所以 de Sitter 空间是具有最大对称性的空间. 这就是说, 四维最大对称空间有 Minkowski 空间和 de Sitter 空间. 在这样的空间中既不存在任何优越的空间方向, 也不存在任何优越的时间方向.

de Sitter 空间的 10 个参量等度量变换群正是五维"转动"群, 它保持元素 $+1+1+1+1-1$ 的对角矩阵不变, 这个群群常称为 de Sitter 群. de Sitter 宇宙虽然因为没有物质又没有辐射而不能作为真实的宇宙模型, 但是任何 $\lambda > 0$ 的宇宙当 $r \to \infty$ 时都过渡到 de Sitter 宇宙.

3. Lemaitre 宇宙

Lemaitre 于 1927 年提出一个比爱因斯坦宇宙具有更多物质的宇宙模型. 膨胀方程 (2.6.5) 中的常数 $C > 0, k = +1$. 由 (2.6.5) 确定的 R-t 曲线可知标度因子 $R(t)$ 自 $t = 0$ 开始增大, 宇宙膨胀, 随后膨胀变慢. 在 R 等于某一常数 R_c 时膨胀速率达极小值, 此后膨胀又加快, 最后趋于 de Sitter 宇宙解 (2.6.7). 这一模型的特点是持续膨胀, 但中间一段膨胀曲线有拐点. 这是一种自初始奇点 $R(0) = 0$ 出发无限膨胀的模型.

2.7 宇宙早期结构和背景辐射

原则上讲, 直接观测遥远的恒星可以得到宇宙过去的信息, 但是宇宙起源于类空奇点, 对应于无限大的红移. 在宇宙诞生后的一段时间里仍然有很大的红移, 因此实际上看不到遥远的天体. 于是, 人们只能观测离地球较近的星, 根据它们现在的情况和局部演化规律来推断宇宙早期的状态.

所有的观测和计算都表明, 早期宇宙 (大约 10^{10} 年以前) 和今天的宇宙很不相同. 早期宇宙物质处于高密状态, 基本粒子的相互作用起决定性作用, 这时时间尺度也要有所改变. 人们注意到, 时间概念本身是没有绝对意义的, 时间的测量总要和物质的性质联系在一起. 弗里德曼的坐标时间 (世界时)t 是宇宙大量元素的固有时间. 从现在的宇宙来看, 一个星系就是一个很好的钟, 但在宇宙早期只有基本粒子和它们的相互作用起决定作用, 所以只能以它们的相互作用和转化作为钟. 用这样的相继发生的一系列物理过程测量时间, 即使是宇宙早期, 距 $R = 0$ 也是无限遥远的. 因此人们又分出一个"宇宙极早期".

1. 宇宙演化简史

现在宇宙物质的能量–动量张量, 其主要部分由星系物质构成, 辐射部分是极其微小的. 人们推断宇宙早期是以辐射为主的. 这样的物态方程可写为

$$p = \frac{3}{\rho}, \tag{2.7.1}$$

其能量–动量张量可形式地用理想流体的能量–动量张量 (2.1.1) 表示, 将这一物态方程代入 (2.6.1)~(2.6.2) 的相容条件

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho + p} = -\frac{3\dot{R}}{R}, \tag{2.7.2}$$

积分得到

$$\rho R^4 = A = \text{const.} \tag{2.7.3}$$

而将零压尘埃的能量–动量张量 $T_{\mu\nu} = \rho u_\nu u_\mu$ 代入 (2.7.2), 积分得

$$\rho R^3 = M = \text{const.} \tag{2.7.4}$$

比较 (2.7.3) 和 (2.7.4) 可以看出, 当宇宙半径 R 减小时, 辐射能量密度比尘埃能量密度增大得更快; 当然, 辐射温度也会升高, 量子辐射将转变为高能辐射, 粒子对将大量产生. 由此可以推断早期宇宙的演化模型.

宇宙早期, 物质开始处于一种高温 (约 10^{12}K) 高密状态. 所有基本粒子 (包括它们的反粒子) 都被束缚于热力学平衡态. 随着宇宙的迅速膨胀, 温度降低, 平衡向有利于稳态粒子产生的方向移动, 电子、质子、较轻的原子核、中微子和光子从束缚态释放出来. 随着宇宙的继续膨胀和冷却, 光子发生退耦: 光子不再有足够的能量形成正反粒子对, 也不再把能量给予别的粒子; 同时, 光子气的能量密度比其他物质的能量密度减小得更快, 它们不再影响以后的膨胀. 当温度大约为 10^9K 时, 中子和质子聚变成较重的核, 剩下由氢和 He^4 以及其他元素组成的电离气体; 按质量计大约含有 27% 的氦. 此后光子、中微子和反中微子气继续自由膨胀, 一直到 $T \approx 4000$K 时氢的复合为止. 在 10^3K 和 10^5K 之间的某一温度, 光子、中微子和反中微子的能量密度开始小于氢和氦的静质量密度, 宇宙进入物质为主的时期.

近年来, 建立在大统一理论基础上的暴胀宇宙学已经涉及 $t \approx 10^{-36}$s 的极早期, 那时宇宙已开始出现正反粒子数的不对称.

2. 微波背景辐射

从光子和物质退耦时开始, 光子气单独满足守恒方程 $T^{\mu\nu}_{光;\nu} = 0$. 代入 (2.7.2), 得到

$$\rho_{光} R^4 = A. \tag{2.7.5}$$

与 (2.7.3) 不同, $\rho_{光}$ 不支配 $R(t)$ 的变化. 由普朗克辐射定律有

$$\rho_{光} \sim T^4. \tag{2.7.6}$$

所以, 随着半径 $R(t)$ 的增大, 宇宙温度 T 按规律

$$T \sim R^{-1}(t) \tag{2.7.7}$$

降低.

1965 年,A. A. Penzias 和 R.W.Wilson 完成了对 T_0(现在的宇宙背景温度) 的测量, 发表了题为《在 4080MHz 处剩余天线温度的测量》的论文, 公布了测量结果

$$T_0 = 3.5\mathrm{K} \pm 1\mathrm{K}. \tag{2.7.8}$$

观测结果和理论预言相符合. 这一发现是自从哈勃定律以来广义相对论宇宙学获得的最大成功. 此后又有重复观测, 均得到一致的结果. 宇宙演化到现在, 残留的辐射是各向同性的, 其频谱对应于温度 $T_0 \approx 2.7\mathrm{K}$ 的黑体辐射.

宇宙温度约为 4000K 时光子和其他物质已经退耦. 由 (2.7.8)、(2.7.7) 和 (1.4.9c) 可以得到那时的红移

$$z = \frac{4000}{2.7} - 1 \approx 1480. \tag{2.7.9}$$

因此, 宇宙背景辐射使我们能够追溯到更早期的宇宙历史, 比观测遥远天体所涉及的时间早得多, 甚至可以追溯到宇宙诞生后的几秒钟. 观测到的这种辐射的高度各向同性表明: 直到现在, 宇宙还是类弗里德曼的, 地球相对于宇宙物质整体的静止系以极小的速度运动.

第 3 章　经典宇宙学问题专论

除前一章讨论的几种宇宙模型外, 还有一些不同的宇宙模型. 实际上, 宇宙模型就是能够正确描述观测到的宇宙性质的引力场方程的严格解. 虽然只有一个真实的宇宙, 但由于观测到的数据是有限的, 而且有些观测结果还很不确定 (如减速因子的数值), 故只要能够和现阶段观测结果相符, 那些在宇宙奇点附近不同的模型都应该是同等有效的. 有些已知的宇宙解在 $t=0$ 附近是高度不均匀的和各向异性的, 然后逐渐趋于弗里德曼宇宙, 所以仍然和现在的观测结果一致. 换言之, 所有能够导致观测到的红移和微波背景辐射的模型都不会被淘汰. 甚至有些宇宙解不能解释现在观测到的宇宙现象, 人们也要去研究. 这是因为任何一个模型都是对真实的宇宙作了大量的简化才得到的, 只有通过大量模型的研究才能确定哪些简化是允许的, 哪些假定是必需的.

3.1　Bianchi-I 型宇宙

按照混沌宇宙模型, 宇宙早期可能是各向异性的. 本节讨论的就是比均匀各向同性空间的对称性差一些的空间 —— 均匀各向异性空间. 在这类空间中只有与平移变换相对应的 3 个 Killing 矢量 $\xi_i^\mu (i=1,2,3)$. 假设 $\xi^i_\mu \xi^\nu_i = \delta^\nu_\mu$, 以空间度规

$$\begin{aligned} \mathrm{d}l^2 &= \gamma_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j, \\ \gamma_{ij} &= -g_{ij} \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

表示的三维空间的 Killing 方程为

$$\gamma_{ij,l} + \xi^k_{m,j}\xi^m_l\gamma_{ik} + \xi^k_{m,i}\xi^m_l\gamma_{ki} = 0. \tag{3.1.2}$$

考察关于 ζ^i 的一阶微分方程组

$$\zeta^i_j - (\xi^i_{m,j}\bar{\xi}^m_k)\zeta^k = 0. \tag{3.1.3}$$

可知这一方程组有三个解 ζ^i_m. 利用这些矢量可以证明,(3.1.2) 的解具有形式

$$\gamma_{ij}(t,x^i) = h_{mn}(t)\bar{\zeta}^m_i(x^k)\bar{\zeta}^n_j(x^k). \tag{3.1.4}$$

式中 $\bar{\zeta}^m_i\zeta^i_n = \delta^m_n$. 可以证明, 场方程共有 9 种独立类型的解. 这样, 按照空间的 3 参数运动群可将空间分为 9 类, 分别称为 Bianchi Ⅰ~ Ⅸ型. 其中最简单的是 Bianchi

I 型, 即 $\xi^\mu_i = \delta^\mu_i$. 总可以选择适当的坐标系, 使这 3 个 Killing 矢量具有形式

$$\xi^\mu_1 = (0,1,0,0), \quad \xi^\mu_2 = (0,0,1,0), \quad \xi^\mu_3 = (0,0,0,1). \tag{3.1.5}$$

此时度规只依赖于时间坐标 $x^0 = t$. 作变换 $x'^0 = x'^0(x^0)$, $x'^i = x^i + f^i(x^0)$, 可将度规变换成

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - g_{ij}(t)\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j. \tag{3.1.6}$$

可以看出, $t = \text{const}$ 的三维空间是平直的.

由 (3.1.6) 可将场方程 $R_{\mu\nu} - \dfrac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = k\rho u_\mu \mu_\nu$ 写为

$$\frac{1}{8}\dot{g}_{ij}\dot{g}_{ij} + \frac{1}{8}\left(\frac{\dot{g}}{g}\right)^2 = k\rho, \tag{3.1.7}$$

$$R^i_j - \frac{1}{2}\delta^i_j R - \frac{1}{2\sqrt{-g}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sqrt{-g}g^{im}\dot{g}_{mj}) - \frac{1}{2}\delta^i_j k\rho = 0. \tag{3.1.8}$$

守恒定律具有形式 $\dot{u}^\mu = 0$. 由此可知, 场方程的可积条件可写为

$$k\rho\sqrt{-g} = M = \text{const}. \tag{3.1.9}$$

将 (3.1.8) 缩并, 得到

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(\sqrt{-g}) = \frac{3}{2}M. \tag{3.1.10}$$

积分得

$$\sqrt{-g} = \frac{3}{4}t(Mt + A). \tag{3.1.11}$$

式中 A 为常数. 应用 (3.1.9), 对 (3.1.8) 作一次积分, 得到

$$\dot{g}_{ij} = \frac{Mt}{\sqrt{-g}}g_{ij} + \frac{a^m_i}{\sqrt{-g}}g_{mj}. \tag{3.1.12}$$

式中 a^m_i 为常数. 在空间中任选一点, 建立直角坐标, 使常数矩阵 a^m_i 是对角的. 由 (3.1.12) 可知, 度规在任何时刻都保持是对角的. 由 (3.1.11) 和 (3.1.12) 得

$$\dot{g}_{11} = g_{11}\left[\frac{4M}{3M + A} + \frac{2P_1 A}{t(Mt + A)}\right], \ P_1 A = \frac{2}{3}a^1_1., \tag{3.1.13}$$

式中 P_1 为常数. 积分上式, 得到

$$g_{11} = B(Mt + A)^{4/3}\left(\frac{t}{Mt + A}\right)^{2P_1}., \tag{3.1.14}$$

式中 B 为常数. 类似地可以得到 g_{22} 和 g_{33}. 于是得到所求的度规

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - g_{11}\mathrm{d}x^2 - g_{22}\mathrm{d}y^2 - g_{33}\mathrm{d}z^2,$$

$$g_{11} = (-g)^{1/3}\left(\frac{t}{Mt+A}\right)^{2P_1-\frac{2}{3}},$$

$$g_{22} = (-g)^{2/3}\left(\frac{t}{Mt+A}\right)^{2P_2-\frac{2}{3}},$$

$$g_{33} = (-g)^{1/3}\left(\frac{t}{Mt+A}\right)^{2P_3-\frac{2}{3}}. \tag{3.1.15}$$

由场方程 (3.1.7) 和 (3.1.8) 可知, 常数 P_i 必须满足条件

$$P_1 + P_2 + P_3 = 1, \quad P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 = 1. \tag{3.1.16}$$

由场源流体的四维速度 $u^\mu = (0,0,0,1)$ 可得

$$u^\mu_{;\nu} = \frac{1}{2}g_{\mu\nu,0} \tag{3.1.17}$$

因此, 场源是沿短程线运动的无转动流体 (尘埃), 其膨胀速度为

$$\theta = \frac{2Mt+A}{t(Mt+A)}, \tag{3.1.18}$$

剪切速度为

$$\sigma_{ij} = \frac{Ag_{ij}}{4\sqrt{-g}}(3P_i - 1) \quad (\text{对}i\text{不取和}). \tag{3.1.19}$$

可见常数 A 是切速度的量度, P_i 表征切速度的方向.

度规 (3.1.15) 描述一个均匀、各向异性的膨胀 (或收缩) 的宇宙. 由 (3.1.16) 可知, 不可能有 $P_1 = P_2 = P_3$, 所以在随动系中尘埃粒子间距离的变化和方向有关. 总可以选择时间轴的方向, 使 $A > 0$, 从 $t > 0 \to t = 0$ 时, 度规变为奇异的.

在一般情况下有 $P_3 < 0$. 由式

$$\frac{\dot{g}_{33}}{g_{33}} = \frac{4Mt/3 + 2P_3A}{t(Mt+A)} \tag{3.1.20}$$

可知, t 很小时 z 方向的距离变化是负的, 即宇宙沿 z 方向收缩. 这种收缩直至 $t = -3P_3A/2M$ 时停止并转为膨胀. 宇宙在 x 和 y 方向是持续膨胀的. 如果宇宙在时刻 $t(t > 0)$ 为一球, 则随着 t 的增大将变成一个沿 z 方向拉长了的椭球; 当 $t \to +0$ 时成为一条直线, 具有圆筒状的奇异面.

Bianchi Ⅰ型宇宙有一特点, 即质量 M 不影响 $t \to 0$ 时宇宙的演化行为. 度规 (3.1.15) 可以近似地用真空解代替:

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - (t^{2P_1}\mathrm{d}x^2 + t^{2P_2}\mathrm{d}y^2 + t^{2P_3}\mathrm{d}z^2),$$

$$P_1 + P_2 + P_3 = 1, P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 = 1, \tag{3.1.21}$$

这正是 Kasner 度规 (见第三篇 1.5 节).

在 $P_1 = 1, P_2 = P_3 = 0$ 的特殊情况下, 我们有

$$\frac{\dot{g}_{11}}{g_{11}} = \frac{4Mt/3 + 2A}{t(Mt + A)}, \quad \frac{\dot{g}_{22}}{g_{22}} = \frac{\dot{g}_{33}}{g_{33}} = \frac{4M}{3(Mt + A)}. \tag{3.1.22}$$

当 $t \to +0$ 时只在 x 方向出现奇异性. 一个 $t(t > 0)$ 时刻的球将变成一个椭球, 最后出现圆板形奇异面.

3.2 五维 Bianchi-V 型宇宙

近年来, 不少人讨论了高维宇宙模型, 其中给出了五维 R-W 宇宙解. 本节讨论五维 Bianchi-V 型宇宙解, 这一解描述早期宇宙, 当时间趋于无限大时该模型趋于均匀、各向同性的膨胀宇宙.

五维 Bianchi-V 型度规具有形式

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - A^2(t)\mathrm{d}x^2 - B^2(t)\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}y^2 - C^2(t)\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}z^2 + D^2(t)\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}\zeta^2. \tag{3.2.1}$$

宇宙早期, 设态方程为 $\rho = 4p$. 选取 Cartan 正交标架 $\sigma^\mu(\mu = 0, 1, 2, 3, 5)$:

$$\begin{aligned} &\sigma^0 = \mathrm{d}t, \quad \sigma^1 = A(t)\mathrm{d}x, \quad \sigma^2 = B(t)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}y, \\ &\sigma^3 = C(t)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}z, \quad \sigma^5 = D(t)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}\zeta. \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

取引力常数 $k = 1$, 由外微分方法, 可以将场方程写为

$$\begin{aligned} &\ddot{A}A^{-1} + \ddot{B}B^{-1} + \ddot{C}C^{-1} + \ddot{D}D^{-1} = -\rho, \\ &\ddot{A}A^{-1} + \dot{A}A^{-1}(\dot{B}B^{-1} + \dot{C}C^{-1} + \dot{D}D^{-1}) - 3A^{-2} = \frac{1}{4}\rho, \\ &\ddot{B}B^{-1} + \dot{B}B^{-1}(\dot{A}A^{-1} + \dot{C}C^{-1} + \dot{D}D^{-1}) - 3A^{-2} = \frac{1}{4}\rho, \\ &\ddot{C}C^{-1} + \dot{C}C^{-1}(\dot{A}A^{-1} + \dot{B}B^{-1} + \dot{D}D^{-1}) - 3A^{-2} = \frac{1}{4}\rho, \\ &\ddot{D}D^{-1} + \dot{D}D^{-1}(\dot{A}A^{-1} + \dot{B}B^{-1} + \dot{C}C^{-1}) - 3A^{-2} = \frac{1}{4}\rho, \\ &\dot{B}B^{-1} + \dot{C}C^{-1} + \dot{D}D^{-1} - 3\dot{A}A^{-1} = 0. \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

守恒方程 $T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$ 给出

$$\rho = \rho_0(ABCD)^{-5/4}, \quad \rho_0 = \text{const}. \tag{3.2.4}$$

令 $d\eta = \mathrm{d}t/A$, 得到场方程的解

$$A^3 = a\mathrm{sh}3\eta + b\mathrm{ch}3\eta - \frac{1}{12}\rho_0 q_0, \tag{3.2.5}$$

$$B = B_0 A \exp\left[q_1 \int A^{-3}\mathrm{d}\eta\right], \tag{3.2.6}$$

$$C = C_0 A \exp\left[q_2 \int A^{-3}\mathrm{d}\eta\right], \tag{3.2.7}$$

$$D = D_0 A \exp\left[q_3 \int A^{-3}\mathrm{d}\eta\right], \tag{3.2.8}$$

式中 $q_0, \cdots, q_3, B_0, C_0, D_0, a$ 和 b 均为常数, 且满足关系

$$6(a^2 - b^2) + (q_1 q_2 + q_2 q_3 + q_3 q_1) + \frac{1}{24}\rho_0^2 q_0^2 = 0. \tag{3.2.9}$$

引入哈勃常数 $H_i (i = 1, 2, 3)$:

$$H_1 = \frac{\dot{A}}{A}, \quad H_2 = \frac{\dot{B}}{B}, \quad H_3 = \frac{\dot{C}}{C}. \tag{3.2.10}$$

当 $\eta \to \infty$ 时有

$$\frac{H_1 - H_2}{H_1} \to 0, \quad \frac{H_2 - H_3}{H_2} \to 0, \tag{3.2.11}$$

所以随着时间的增长度规将趋于各向同性.

若 $b = \frac{1}{12}\rho_0 q_0$, 由 (3.2.5) 可知 $\eta = 0$ 为奇点.

由 (3.2.5) 和 (3.2.6) 可得

$$B^3 = B_0^3 A^3 \left[1 + \frac{a}{b}\coth\frac{3}{2}\eta\right]^{-q_1/a}. \tag{3.2.12}$$

类似地, 得到

$$C^3 = C_0^3 A^3 \left[1 + \frac{a}{b}\coth\frac{3}{2}\eta\right]^{-q_2/a} \tag{3.2.13}$$

$$D^3 = D_0^3 A^3 \left[1 + \frac{a}{b}\coth\frac{3}{2}\eta\right]^{-q_3/a}. \tag{3.2.14}$$

如果 $a = b = \frac{1}{12}\rho_0 q_0$, 则 $A^3 = a(\mathrm{e}^{3\eta} - 1)$. 代入 $\mathrm{d}t = A\mathrm{d}\eta$, 积分得

$$\begin{aligned} t &= \int A\mathrm{d}\eta = \sqrt[3]{a}\int (\mathrm{e}^{3\eta} - 1)^{1/3}\mathrm{d}\eta \\ &= \sqrt[3]{a}\left\{(\mathrm{e}^{3\eta} - 1)^{1/3} - \frac{1}{3}[\ln(\mathrm{e}^{3\eta} - 1)^{1/3} + 1]\right. \end{aligned}$$

$$- \frac{1}{2}\ln[(e^{3\eta}-1)^{2/3}-(e^{3\eta}-1)^{1/3}+1]$$
$$+\frac{3}{4}\sqrt{3}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}\left[(e^{3\eta}-1)^{1/3}-\frac{1}{2}\right]\Bigg\}. \tag{3.2.15}$$

令 $\Delta \equiv 6(a^2-b^2)+\frac{1}{24}\rho_0^2 q_0^2$, 由 (3.2.9) 可将解的奇异性用表 6-1 给出.

表 6-1

$\frac{q_1}{a}$	$\frac{q_2}{a}$	$\frac{q_3}{a}$	$\eta=0$			奇 性
			B	C	D	
>0	>0	>0	/	/	/	$(\Delta>0)$
			0	0	0	$(\Delta<0)$
<0	<0	<0	/	/	/	$(\Delta>0)$
			∞	∞	∞	$r(\Delta<0)$
>0	>0	<0	0	0	∞	α
>0	<0	>0	0	∞	0	α
<0	>0	>0	∞	0	0	α
>0	<0	<0	0	∞	∞	β
<0	<0	>0	∞	∞	0	β
<0	>0	<0	∞	0	∞	β

3.3 Gödel 宇 宙

Gödel(1949) 提出一个均匀、各向异性的宇宙模型. 这一四维空间度规具有形式

$$ds^2 = C^2\left[(dt+e^x dy)^2 - dx^2 + \frac{1}{2}e^{2x}dy^2 + dz^2\right], \tag{3.3.1}$$

式中 C 为常数. 该空间有 5 个 Killing 矢量, 可分别写为

$$\xi_1^\mu = (0,0,1,0),\quad \xi_2^\mu = (0,0,0,1),\quad \xi_3^\mu = (1,0,0,0),$$
$$\xi_4^\mu = (0,1,-y,0),\quad \xi_5^\mu = \left(-2e^{-x}, y, e^{-2x}-\frac{1}{2}y, 0\right). \tag{3.3.2}$$

设场源为满足条件

$$\rho = \frac{1}{kC^2},\quad \lambda = -\frac{1}{2C^2} \tag{3.3.3}$$

的尘埃, 则能量–动量张量具有形式

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{2kC^2}g^{\mu\nu} + \frac{u^\mu u^\nu}{kC^2}. \tag{3.3.4}$$

采用随动系有

$$u^\mu = \left(\frac{1}{C}, 0, 0, 0\right). \tag{3.3.5}$$

由旋速度的定义可知,$\omega^2 \equiv \omega_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}/2 = \dfrac{1}{2C^2} = 4\pi\rho$. 设试验粒子初速度沿 x^1 方向, 在 $C \gg 1$ 的情况下, 运动方程具有形式

$$x^1 \approx vx^0 + A\sin\frac{2\omega x^0}{c},$$

$$x^2 \approx A\left(\cos\frac{2\omega x^0}{c} - 1\right). \tag{3.3.6}$$

式中 A 为常数. 在随动系中观测, 自由运动成了转动. 如果惯性系定义为自由运动为直线运动的坐标系, 则惯性系以角速度 ω 相对于随动系转动. 这表明, 如果以一局部惯性系为准, 则遥远的恒星系在转动.

Gödel 宇宙模型与弗里德曼宇宙模型不同, 它含有转动物质, 还有闭合的类时世界线, 即一个观察者可以影响他自己的过去.

在我们已经讨论过的各种宇宙模型中, 物理上合理的模型是弗里德曼模型和 Bianchi 型宇宙模型. 它们的演化有一个共同特点: 在过去某一时刻存在一类空奇点, 即宇宙有一个起点或者说有一个原始“大爆炸”. 那些物理上不合理的模型 (爱因斯坦宇宙,de Sitter 宇宙和 Gödel 宇宙) 都不具有上述奇点 (它们都含有宇宙项). 这些模型或者物态方程不合理, 不能给出已观测到的红移, 或者违背因果律.

3.4 六维宇宙

对作用量

$$^{(6)}I = \int R\sqrt{-g}\mathrm{d}^6x$$

应用变分原理, 便得到六维引力理论的真空场方程

$$^{(6)}G^a_b = R^a_b - \delta^a_b R/2 = 0. \tag{3.4.1}$$

式中 R^a_b 是 Ricci 张量, R 为标曲率, 它们都由六维宇宙的度规张量 g_{ab} 构成. g_{ab} 是 $x^0, x^1, \cdots, x^6$ 的函数. 下面我们约定, 拉丁指标代表 $0, 1, \cdots, 6$; 希腊指标代表 0, 1, 2, 3;$^{(6)}G^a_b$ 是混合爱因斯坦张量.

$^{(6)}G^\alpha_\beta$ 可分为三个函数: $^{(4)}G^\alpha_\beta, H^\alpha_\beta$ 和 I^α_β, 它们分别对应于时空、质量的电荷, 即

$$^{(6)}G^\alpha_\beta = {}^{(4)}G^\alpha_\beta + H^\alpha_\beta + I^\alpha_\beta.$$

式中几何量 H^α_β 和 I^α_β 将揭示四维宇宙的物理性质. 我们把 $-H^\alpha_\beta$ 看作宏观物体的能量–动量张量 $^{(m)}T^\alpha_\beta$(或写为 $8\pi G^{(m)}T^\alpha_\beta/c^4$), 把 $-I^\alpha_\beta$ 看作电磁场的能量–动量张量 $^{(em)}T^\alpha_\beta$(或写为 $8\pi G^{(em)}T^\alpha_\beta/c^4$). 这里我们不把它们看成新增维度的能量–动量张量, 因为此概念还没有建立起来;$^{(6)}G^a_b(a \geqslant 5$ 或 $b \geqslant 5)$ 仅当解方程 $^{(6)}G^a_b = 0$ 时才考虑. 四维宇宙的场方程可写为

$$ {}^{(4)}G^{\alpha}_{\beta} = -H^{\alpha}_{\beta} - I^{\alpha}_{\beta} = {}^{(m)}T^{\alpha}_{\beta} + {}^{(em)}T^{\alpha}_{\beta}. \tag{3.4.2} $$

这里划分爱因斯坦张量的过程实际上是四维引力理论和五维引力理论中划分爱因斯坦张量过程的推广, 且这种划分方法是唯一的, 因为过程一开始并没有涉及物理内容, 只是数学上的做法. 我们还没有给 x^5 和 x^6 以物理意义 —— 质量和电荷. 实际上, 在六维宇宙中, x^5 和 x^6 都是纯数学量, 甚至我们开始把它们看作两个独立的坐标. 但如果从物理上来分析, 它们又可以与物理量相符合. 这和我们由牛顿近似分析爱因斯坦方程得出数学量 $g_{\mu\nu}$ 为引力势的过程是一样的. 经过这样的分析, 我们又把 x^5 和 x^6 与质量和电荷联系起来了.

按照上面的观点, 我们可以从两个方面来分析: 一是考察物理量 (如质量和电荷) 的来源, 二是分析自然现象 (如状态方程、电磁场) 的起源. 后面我们将这些分析应用于早期宇宙. 六维宇宙的度规可写为

$$ \mathrm{d}s^2 = \mathrm{e}^{\nu}\mathrm{d}{x^0}^2 - \mathrm{e}^{\lambda}(\mathrm{d}{x^1}^2 + \mathrm{d}{x^2}^2 + \mathrm{d}{x^3}^2) + \mathrm{e}^{\mu}\mathrm{d}{x^5}^2 + \mathrm{e}^{\eta}\mathrm{d}{x^6}^2. \tag{3.4.3} $$

式中 ν, λ, μ, η 是 x^0, x^5, x^6 的函数.

将 (3.4.3) 代入真空场方程 (3.4.1), 得到

$$ \begin{aligned} {}^{(6)}G_{00} =& -3\dot{\lambda}(\dot{\lambda} + \dot{\mu} + \dot{\eta})/4 - \dot{\mu}\dot{\eta}/4 \\ & - \mathrm{e}^{\nu-\mu}[3\lambda'' + 3\lambda'^2 2 + \eta'' + \eta'^2/2 + 3\lambda'(-\mu' + \eta')/2 \\ & - \mu'\eta'/2]/2 - \mathrm{e}^{\nu-\eta}[3\lambda^{**} + 3\overset{*}{\lambda}{}^2 + \overset{*}{\mu}{}^{*} + \overset{*}{\mu}{}^2/2 \\ & + 3\overset{*}{\lambda}(\overset{*}{\mu} - \overset{*}{\eta})/2 - \overset{*}{\mu}\overset{*}{\eta}/2]/2 = 0, \end{aligned} \tag{3.4.4} $$

$$ \begin{aligned} {}^{(6)}G_{05} =& 3\dot{\lambda}'/2 + \dot{\eta}'/2 + 3\dot{\lambda}\lambda'/4 + \dot{\eta}\eta'/4 \\ & = \nu'(3\dot{\lambda} + \dot{\eta})/4 - \dot{\mu}(3\lambda' + \eta') = 0, \end{aligned} \tag{3.4.5} $$

$$ \begin{aligned} {}^{(6)}G_{06} =& 3\lambda^{\cdot *}/2 + \dot{\overset{*}{\mu}}/2 + 3\dot{\lambda}\overset{*}{\lambda}/4 + \dot{\mu}\overset{*}{\mu}/4 \\ & - \overset{*}{\nu}(3\dot{\lambda} + \dot{\mu})/4 - \dot{\eta}(3\overset{*}{\lambda} + \overset{*}{\mu})/4 = 0, \end{aligned} \tag{3.4.6} $$

$$ \begin{aligned} {}^{(6)}G_{11} =& {}^{(6)}G_{22} = {}^{(6)}G_{33} = -\mathrm{e}^{\lambda-\nu}[\ddot{\lambda} + 3\dot{\lambda}^2/4 \\ & + \ddot{\mu}/2 + \dot{\mu}^2/4 + \ddot{\eta}/2 + \dot{\eta}^2/4 + \dot{\lambda}(-\dot{\nu} + \dot{\mu} + \dot{\eta})/2 + \dot{\mu}(-\dot{\nu} + \dot{\eta})/4 - \dot{\nu}\dot{\eta}/4] \\ & + \mathrm{e}^{\lambda-\mu}[\nu''/2 + \nu'^2/4 + \lambda'' + 3\lambda'^2/4 + \eta''/2 + \eta'^2/4 + \lambda'(\nu' - \mu' + \eta')/2 \\ & + \nu'(-\mu' + \eta')/4 - \mu'\eta'/4] + \mathrm{e}^{\lambda-\eta}[{}^{*}\nu^{*}/2 + \overset{*}{\nu}{}^2/4 + {}^{*}\lambda^{*} + 3\overset{*}{\lambda}{}^2/4 + \overset{**}{\mu}/2 \\ & + \overset{*}{\mu}{}^2/4 + \dot{\lambda}(\overset{*}{\nu} + \overset{*}{\mu} - \overset{*}{\eta})/2 + \overset{*}{\nu}(\overset{*}{\mu} - \overset{*}{\eta})/4 - \overset{*}{\mu}\overset{*}{\eta}/4] = 0, \end{aligned} \tag{3.4.7} $$

$$ \begin{aligned} {}^{(6)}G_{55} =& -\mathrm{e}^{\mu-\nu}[3\ddot{\lambda}/2 + 3\dot{\lambda}^2/2 + \ddot{\eta}/2 + \overset{*}{\eta}{}^2/4 + 3\dot{\lambda}(-\dot{\nu} + \dot{\eta})/4 - \dot{\nu}\dot{\eta}/4] \\ & - [3\dot{\lambda}^2/4 + 3\lambda'(\nu' + \eta')/4 + \nu'\eta'/4] - \mathrm{e}^{\mu-\eta}[\overset{**}{\nu}/2 + \overset{*}{\nu}{}^2/4 + 3\overset{**}{\lambda}/2 + 3\overset{*}{\lambda}{}^2/2 \\ & + 3\overset{*}{\lambda}(\overset{*}{\nu} - \overset{*}{\eta})/4 - \overset{*}{\nu}\overset{*}{\eta}/4] = 0, \end{aligned} \tag{3.4.8} $$

$$
\begin{aligned}
{}^{(6)}G_{56} =& \overset{*}{\nu}'/2 + 3\overset{*}{\lambda}'/2 + \nu'\overset{*}{\nu}/4 + 3\lambda'\overset{*}{\lambda}/4 - \overset{*}{\mu}(\nu' + 3\lambda')/4 \\
&- \eta'(\overset{*}{\nu} + 3\overset{*}{\lambda})/4 = 0, \qquad (3.4.9)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^{(6)}G_{66} =& -[3\overset{*}{\lambda}(\overset{*}{\nu} + \overset{*}{\lambda} + \overset{*}{\mu}) + \overset{*}{\nu}\overset{*}{\mu}/4 - \mathrm{e}^{\eta-\nu}[3\ddot{\lambda} + 3\dot{\lambda}^2 + \ddot{\mu} + \dot{\mu}^2/2 \\
&+ 3\dot{\lambda}(-\dot{\nu} + \dot{\mu})/2 - \dot{\nu}\dot{\mu}/2]/2 - \mathrm{e}^{\eta-\mu}[\nu'' + \nu'^2/2 + 3\lambda'' + 3\lambda'^2 \\
&+ 3\lambda'(\nu' - \mu')/2 - \nu'\mu'/2]/2 = 0, \qquad (3.4.10)
\end{aligned}
$$

式中 (•), (′) 和 (*) 分别表示对 x^0, x^5 和 x^6 取偏导数. 我们目前暂不能推断出六维宇宙的物理状态或能量–动量张量, 仅考虑六维真空宇宙. 这样做的目的是看看第五维和第六维对四维宇宙有什么样的几何效应.

我们得到一个简单的真空解

$$\mathrm{e}^{\nu} = C_0[\dot{f}(x^0)]^2[f(x^0) + g(x^5) + h(x^6) + K_0]^{2\mp\sqrt{6}}, \qquad (3.4.11)$$

$$\mathrm{e}^{\lambda} = [f(x^0) + g(x^5) + h(x^6) + K_0]^{\pm\sqrt{6}/3}, \qquad (3.4.12)$$

$$\mathrm{e}^{\mu} = C_5[g'(x^5)]^2[f(x^0) + g(x^5) + h(x^6) + K_0]^{2\mp\sqrt{6}}, \qquad (3.4.13)$$

$$\mathrm{e}^{\eta} = C_6[\overset{*}{h}(x^6)]^2[f(x^0) + g(x^5) + h(x^6) + K_0]^{2\mp\sqrt{6}}, \qquad (3.4.14)$$

式中的 $f(x^0), g(x^5)$ 和 $h(x^6)$ 分别是 x^0, x^5, 和 x^6 的任意函数; C_0, C_5, C_6 和 K_0 都是常数. 在 $g'(x^5) = \overset{*}{h}(x^6) = 0$ 的条件下, 六维宇宙退化为四维宇宙, 这时第五维和第六维坐标无需存在. 如果上述条件严格满足, 则量 Gm/c^2 和 $\mathrm{e}G^{1/2}/c^2$ 将是常数; 如果上述条件只是近似地满足, 即第五维和第六维收缩到只是目前不能观测到的程度, 则这两个量不再是常数 (尽管它们的梯度可能很小).

引进宇宙时, 度规的时间部分可变为下面的形式:

$$\mathrm{e}^{\tau} \sim \tau^{(6\pm4\sqrt{6})/15}. \qquad (3.4.15)$$

这个解的指数中取 (+) 号代表一个正在膨胀的四维宇宙, 取 (−) 号表示正在收缩的宇宙. 这个解与辐射宇宙的解有一个微小的差异, 这是第六维度影响的结果. 因为当第五维度收缩后, 五维宇宙的解可以严格地退化为四维辐射宇宙解.

六维宇宙中试验粒子的时迹可以用六维短程线来描述. 短程线方程具有形式

$$\frac{\mathrm{d}^2x^k}{\mathrm{d}s^2} + \Gamma^k_{ij}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}s} = 0, \qquad i, j, k = 0, 1, \cdots, 6. \qquad (3.4.16)$$

当 $k = 1, 2, 3$ 时, 我们有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[A^{\pm\sqrt{6}/3}\frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}s}\right] = 0 \quad 或 \quad \frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}s} = t_x A^{\mp\sqrt{6}/3}; \qquad (3.4.17)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[A^{\pm\sqrt{6}/3}\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}s}\right] = 0 \quad 或 \quad \frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}s} = t_y A^{\mp\sqrt{6}/3}; \qquad (3.4.18)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[A^{\pm\sqrt{6}/3}\frac{\mathrm{d}x^3}{\mathrm{d}s}\right]=0 \quad 或 \quad \frac{\mathrm{d}x^3}{\mathrm{d}s}=t_zA^{\mp\sqrt{6}/3}. \tag{3.4.19}$$

式中

$$A\equiv f(x^0)+g(x^5)+h(x^6)+K_0, \qquad t_x,t_y,t_z=\text{const.}.$$

当 $k=0$ 时, (3.4.16) 式变为

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}^2x^0}{\mathrm{d}s^2}+\left[\frac{\ddot f}{\dot f}+(2\mp\sqrt{6})\frac{\dot f}{2A}\right]\left(\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}s}\right)^2+(2\mp\sqrt{6})\frac{g'}{A}\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^5}{\mathrm{d}s}+(2\mp\sqrt{6})\frac{\overset{*}{h}}{A}\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^6}{\mathrm{d}s}\\&\mp\sqrt{6}A^{-3\pm4\sqrt{6}/3}/6C_0\dot f\left[\left(\frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}s}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}s}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}x^3}{\mathrm{d}s}\right)^2\right]-(2\mp\sqrt{6})C_5g'^2/2C_0\dot fA\left(\frac{\mathrm{d}x^5}{\mathrm{d}s}\right)^2\\&-(2\mp\sqrt{6})C_6\overset{*}{h}{}^2/2C_0\dot fA\left(\frac{\mathrm{d}x^6}{\mathrm{d}s}\right)^2=0,\end{aligned} \tag{3.4.20a}$$

式中 f,g,h 分别是 $f(x^0),g(x^5),h(x^6)$ 的缩写.

当 $k=5,6$ 时, 方程 (3.4.16) 可写为

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}^2x^5}{\mathrm{d}s^2}-(2\mp\sqrt{6})C_0\dot f^2/2C_5g'A\left(\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}s}\right)^2+(2\mp\sqrt{6})\frac{\dot f}{A}\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^5}{\mathrm{d}s}\\&\mp\sqrt{6}A^{-3\pm4\sqrt{6}/3}/6C_5g'\left[\left(\frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}s}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}s}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}x^3}{\mathrm{d}s}\right)^2\right]\\&+\left[\frac{g''}{g'}+(2\mp\sqrt{6})g'/2A\right]\left(\frac{\mathrm{d}x^5}{\mathrm{d}s}\right)^2+(2\sqrt{6})\frac{\overset{*}{h}}{A}\frac{\mathrm{d}x^5}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^6}{\mathrm{d}s}\\&-(2\mp\sqrt{6})C_6\overset{*}{h}{}^2/2C_5Ag'\left(\frac{\mathrm{d}x^6}{\mathrm{d}s}\right)^2=0,\end{aligned} \tag{3.4.21}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}^2x^6}{\mathrm{d}s^2}-(2\mp\sqrt{6})C_0\dot f^2/2C_6A\overset{*}{h}\left(\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}s}\right)^2+(2\mp\sqrt{6})\frac{\dot f}{A}\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^6}{\mathrm{d}s}\\&\pm\sqrt{6}A^{-3\pm4\sqrt{6}/3}/6C_6\overset{*}{h}\left[\left(\frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}s}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}s}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}x^3}{\mathrm{d}s}\right)^2\right]\\&-(2\mp\sqrt{6})C_5g'^2/2C_6A\overset{*}{h}\left(\frac{\mathrm{d}x^5}{\mathrm{d}s}\right)^2+(2\sqrt{6})g'/A\left(\frac{\mathrm{d}x^5}{\mathrm{d}s}\right)\left(\frac{\mathrm{d}x^6}{\mathrm{d}s}\right)\\&+\left[\frac{\overset{**}{h}}{\overset{*}{h}}+(2\mp\sqrt{6})\overset{*}{h}/2A\right]\left(\frac{\mathrm{d}x^6}{\mathrm{d}s}\right)^2=0.\end{aligned} \tag{3.4.22}$$

由 (3.4.21), (3.4.22) 和 (3.4.20) 可以得到

$$C_5g'\frac{\mathrm{d}x^5}{\mathrm{d}s}=C_0\dot f\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}s}+\alpha A^{-2\pm\sqrt{6}}, \tag{3.4.23}$$

$$C_6 \overset{*}{h} \frac{\mathrm{d}x^6}{\mathrm{d}s} = C_0 \dot{f} \frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}s} + \beta A^{-2\pm\sqrt{6}}, \tag{3.4.24}$$
$$\alpha, \beta = \text{const.}.$$

考虑到方程 (3.4.3), 我们进一步得到

$$\dot{f} \frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}s} = -\frac{(\beta C_5 + \alpha C_6) A^{-2\pm\sqrt{6}}}{(C_0 C_5 + C_0 C_6 + C_5 C_6) \pm R}. \tag{3.4.25}$$

式中

$$R = \left\{ \frac{C_5 C_6 (A^{-2\pm\sqrt{6}} + A^{-2\pm\sqrt{6}/3} t_6^2)}{C_0 (C_0 C_5 + C_0 C_6 + C_5 C_6)} - \frac{[(\alpha-\beta)^2 C_0 C_5 C_6 + (\beta^2 C_5 + \alpha^2 C_6) C_5 C_6] A^{-4\pm 2\sqrt{6}}}{C_0 (C_0 C_5 + C_0 C_6 + C_5 C_6)^2} \right\}^{1/2}.$$

式中 $t_6^2 = t_x^2 + t_y^2 + t_z^2$.

把 (3.4.25) 代入 (3.4.23) 和 (3.4.24), 得到

$$g' \frac{\mathrm{d}x^5}{\mathrm{d}s} = \frac{[(\alpha-\beta) C_0 + \alpha C_0] A^{-2\pm\sqrt{6}}}{C_0 C_5 + C_0 C_6 + C_5 C_6} \pm \frac{C_0 R}{C_5}, \tag{3.4.26}$$

$$\overset{*}{h} \frac{\mathrm{d}x^6}{\mathrm{d}s} = \frac{[(\beta-\alpha) C_0 + \beta C_5] A^{-2\pm\sqrt{6}}}{C_0 C_5 + C_0 C_6 + C_5 C_6} \pm \frac{C_0 R}{C_6}. \tag{3.4.27}$$

由 (3.4.26), (3.4.27) 和 (3.4.25), 可以得到坐标 x^5 和 x^6 对时间的变化率. 这里虽然不能得出函数 $g(x^5)$ 和 $h(x^6)$ 的具体形式, 但可以预测到, $g(x^5)$ 和 $h(x^6)$ 一定有极值.

当第五维和第六维收缩到 $x^0 = x^0_{C_5}$ 和 $x^0 = x^0_{C^6}$ 时, 即当 x^5 和 x^6 分别取确定值 x_c^5 和 x_c^6 时, 可得 $y'(x^5) = 0, \overset{*}{h}(x^6) = 0$. 此时六维宇宙也就变为五维, 再变为四维宇宙了. 这时 (3.4.20a) 变为

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^0}{\mathrm{d}s^2} + \left[\frac{\ddot{f}}{\dot{f}} + 2(2\mp\sqrt{6}) \dot{f} A_c\right] \left(\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}s}\right)^2 \pm \sqrt{6} t_6^2 A_c^{-3\pm 2\sqrt{6}/3} / 6 C_0 \dot{f} = 0. \tag{3.4.20b}$$

式中

$$A_c = f(x_c^0) + g(x_c^5) + h(x_c^6) + K_0.$$

方程 (3.4.17)~(3.4.19) 和 (3.4.20b) 即为 4 维宇宙的运动方程 (其中 $A = A_c$).

当注意到第五和第六维度分别表示质量和电荷时, 上面的运动方程可能导致经典麦克斯韦方程, 因为方程中含有包括定值 Gm/c^2 和 $eG^{1/2}/c^2$ 的常数 A_c.

我们将看到, 所得到的六维宇宙真空解可以用来研究四维宇宙物理性质的起源. 下面我们从几个方面来讨论.

1. 早期宇宙

1) 度规

前面我们已给出六维宇宙的一个简单的真空解

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{e}^{\nu}=C_0\dot{f}^2A^{2\mp\sqrt{6}},\quad \mathrm{e}^{\lambda}=A^{\pm\sqrt{6}/3},\\
&\mathrm{e}^{\mu}=C_5g'^2A^{2\sqrt{6}},\quad \mathrm{e}^{\eta}=C_6\overset{*}{h}{}^2A^{2\mp\sqrt{6}},\\
&A\equiv f(x^0)+g(x^5)+h(x^6)+K_0,\\
&C_0,C_5,C_6=\text{const.}.
\end{aligned}
$$

当 $g'=\overset{*}{h}=0$ 时, 我们得到了四维宇宙. 这表明四维宇宙被嵌在六维宇宙的某个地方; 在那里, $g(x^5)$ 和 $h(x^6)$ 取极值, 变量 $x^5=Gm/c^2$ 和 $x^6=\mathrm{e}G^{1/2}/c^2$ 不再变化 (成为常数 x_c^5 和 x_c^6). 这就是四维宇宙的诞生.

2) 宏观物体的能量–动量张量

宏观物体的能量–动量张量由第五维度的几何量决定

$$
\begin{aligned}
{}^{(m)}T_0^0&=3\mathrm{e}^{-\nu}\dot{\lambda}\frac{\dot{\mu}}{4c^2}+3\mathrm{e}^{-\mu}\left(\dot{\overset{*}{\lambda}}+\overset{*}{\lambda}{}^2-\overset{*}{\lambda}\frac{\overset{*}{\mu}}{2}\right)2\\
&=\frac{(-3\pm\sqrt{6})}{2C_0A^{4\mp\sqrt{6}}}+\frac{(5\mp2\sqrt{6})}{2C_5A^{4\mp6}}.
\end{aligned}
\tag{3.4.28}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^{(m)}T_1^1={}^{m}T_2^2={}^{(m)}T_3^3&=\mathrm{e}^{-\nu}\left(\overset{**}{\mu}+\frac{\dot{\mu}^2}{2}+\dot{\lambda}\dot{\mu}-\dot{\nu}\frac{\dot{\mu}}{2}\right)/2\\
&+\mathrm{e}^{-\mu}\left(\overset{**}{\nu}+\overset{*}{\nu}{}^2/2+2\overset{**}{\lambda}+3\frac{\overset{*}{\lambda}{}^2}{2}+\overset{*}{\nu}\overset{*}{\lambda}-\overset{*}{\lambda}\overset{*}{\mu}-\overset{*}{\nu}\frac{\overset{*}{\mu}}{2}\right)/2\\
&=\frac{(-12\pm5\sqrt{6})}{6C_0A^{4\sqrt{6}}}+\frac{(-3\pm\sqrt{6})}{6C_5A^{4\sqrt{6}}}.
\end{aligned}
\tag{3.4.29}
$$

能量–动量张量的一般形式为

$$
{}^{(m)}T_\beta^\alpha=(p+\varepsilon)\mu^\alpha u_\beta-\delta_\beta^\alpha p. \tag{3.4.30}
$$

由 (3.4.29) 可得能量密度 ε 和压强 p

$$
\varepsilon=\frac{(-3\pm\sqrt{6})}{2C_0A^{4\mp\sqrt{6}}}+\frac{(5\mp2\sqrt{6})}{2C_5A^{4\mp\sqrt{6}}}, \tag{3.4.31}
$$

$$
p=\frac{(12\mp5\sqrt{6})}{6C_0A^{4\mp\sqrt{6}}}+\frac{(3\mp\sqrt{6})}{6C_5A^{4\mp\sqrt{6}}}. \tag{3.4.32}
$$

ε 和 p 都是 x^0,x^5 和 x^6 的函数. 早期四维宇宙的状态方程为

$$
\frac{p}{\varepsilon}=\frac{(12\mp5\sqrt{6})C_5+(3\mp\sqrt{6})C_0}{3[(-3\pm\sqrt{6})C_5+(5\mp2\sqrt{6})C_0]}. \tag{3.4.33}
$$

我们在得到宏观物体的状态方程的过程中, 并没有增加与压强和能量密度有关的其他方程. 这就是说, 第五维度的几何量在四维宇宙的诞生和自然现象的起源问题上都起着重要作用.

3) 电磁场的能量–动量张量

电磁场的能量–动量张量和第六维度的几何量有关

$$
\begin{aligned}
{}^{(\mathrm{em})}T_0^0 &= \mathrm{e}^{-\nu}\frac{(3\dot{\lambda}\dot{\eta}+\dot{\mu}\dot{\eta})}{4c^2}+\mathrm{e}^{-\mu}\left(\overset{**}{\eta}+\frac{\overset{*}{\eta}^2}{2}+3\overset{*}{\lambda}\overset{*}{\eta}/2\right.\\
&\qquad\left.-\frac{\overset{*}{\mu}\overset{*}{\eta}/2}{2}\right)+\mathrm{e}^{-\eta}\left[3\ddot{\lambda}+3\dot{\lambda}^2+\ddot{\mu}+\frac{\dot{\mu}^2}{2}+3\dot{\lambda}\frac{(\dot{\mu}-\dot{\eta})}{2}-\dot{\mu}\frac{\dot{\eta}}{2}\right]/2\\
&= \frac{(2\mp\sqrt{6})}{2C_0}A^{4\mp\sqrt{6}}+\frac{(-5\pm2\sqrt{6})}{2C_5}A^{4\mp\sqrt{6}}.\\
{}^{(\mathrm{em})}T_1^1 &= {}^{(\mathrm{em})}T_2^2 = {}^{(\mathrm{em})}T_3^3\\
&= \mathrm{e}^{-\nu}\left(\ddot{\eta}+\frac{\dot{\eta}^2}{2}+\dot{\lambda}\dot{\eta}+\dot{\mu}\dot{\eta}/2-\dot{\nu}\dot{\eta}/2\right)/2c^2\\
&\quad+\mathrm{e}^{-\mu}\left(\overset{**}{\eta}+\frac{\overset{*}{\eta}^2}{2}+\overset{*}{\lambda}\overset{*}{\eta}+\overset{*}{\nu}\overset{*}{\eta}/2-\overset{*}{\mu}\frac{\overset{*}{\eta}/2}{2}\right)\\
&\quad+\mathrm{e}^{-\eta}\left[\ddot{\nu}+\frac{\dot{\nu}^2}{2}+2\ddot{\lambda}+\frac{3\dot{\lambda}^2}{2}+\ddot{\mu}\right.\\
&\quad\left.+\dot{\mu}^2/2+\dot{\lambda}(\dot{\nu}+\dot{\mu}-\dot{\eta})+\dot{\nu}(\dot{\mu}-\dot{\eta})/2-\dot{\mu}\dot{\eta}/2\right]/2\\
&= \frac{(3\mp\sqrt{6})}{6C_0}A^{4\mp\sqrt{6}}+\frac{(3\mp\sqrt{6})}{6C_5}A^{4\mp\sqrt{6}}.
\end{aligned}
\tag{3.4.34}
$$

值得注意的是方程 (3.4.29) 和 (3.4.34) 只含有常数 C_0 和 C_5, 不含 C_6. 这表明第五维度的物理意义比第六维度更普遍. 既然人们认为引力是 4 种相互作用中最早诞生的, 那么我们就有理由把第五维度看作有物理意义的 —— 代表质量, 而给第六维度以电荷的意义. 由 ${}^{(\mathrm{em})}T_\alpha^\alpha$ 可得 $C_0=(2\mp\sqrt{6})C_5/2$, 因此这个场是各向同性辐射场, 宇宙中充满了电磁辐射.

电磁场的能量–动量张量还可以用电磁场张量表示

$$
{}^{(\mathrm{em})}T_\beta^\alpha=\frac{1}{4\pi}\left(-F^{\alpha\lambda}F_{\beta\lambda}+\frac{\delta_\beta^\alpha F^{\lambda\mu}F_{\lambda\mu}}{4}\right). \tag{3.4.35}
$$

由 (3.4.34) 还不能解出 (3.4.35), 即使电磁场张量由四维势 A 定义为 $F_{\alpha\beta}=A_{\beta;\alpha}-A_{\alpha;\beta}$, 由现在的度规也不可能得到它的解.

不难发现

$$T^{\alpha}_{\beta} \equiv^{(\mathrm{m})} T^{\alpha}_{\beta} +^{(\mathrm{em})} T^{\alpha}_{\beta}$$

满足守恒条件

$$T^{\alpha}_{\beta;\alpha} = 0.$$

由 C_0 和 C_5 的关系式, 可以把状态方程写为

$$\frac{p}{\varepsilon} = \frac{1}{19}(9 \mp 2\sqrt{6}). \tag{3.4.36}$$

在四维宇宙中, 我们选择一个和适当的时间 τ, 标度因子 e^{λ} 可以写为

$$e^{\lambda} = \left\{\left[(-2 \mp 2\sqrt{6})/C_5\right]^{1/2}(4 \pm \sqrt{6})(\tau + K)/5\right\}^{(6\pm4\sqrt{6})/15}$$

常数 K 包含 x_c^5 和 x_c^6. 由于我们的宇宙正在膨胀, 所以 e^{λ} 表达式中应均有上面的符号. 状态方程为

$$\frac{p}{\varepsilon} = \frac{1}{19}(9 - 2\sqrt{6}) \approx 0.2,$$

这表明宇宙充满了热气体. 由此我们得出结论, 电磁辐射和热气体是早期宇宙的两个主要成分.

宇宙标度因子还显示 C_5 应取负号, 因此第五维坐标是类空的.

2. 球对称引力场

为了说明自然现象的起源, 我们把上述观点运用于球对称引力场.

1) 度规

度规的一般形式为

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{e}^{\nu}\mathrm{d}x^{0^2} - \mathrm{e}^{\lambda}\mathrm{d}r^2 - r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) - \mathrm{e}^{\mu}\mathrm{d}x^{5^2} - \mathrm{e}^{\eta}\mathrm{d}x^{6^2}, \tag{3.4.37}$$

式中 ν, λ, η 是 $x^0, x^1(=r), x^5$ 和 x^6 的函数, x^2 和 x^3 分别为 θ 和 φ. 由前面的讨论可知, 第五维、第六维应是类空的, 不为零的爱因斯坦张量有 12 个, 它们是 ${}^{(5)}G^0_0, {}^{(6)}G^0_1, {}^{(6)}G^0_5, {}^{(6)}G^0_6, {}^{(6)}G^1_1, {}^{(6)}G^1_5, {}^{(6)}G^1_6, {}^{(6)}G^2_2 (= {}^{(6)}G^3_3, {}^{(6)}G^5_5, {}^{(6)}G^5_6, {}^{(6)}G^6_6)$. 目前还没有找到真空场方程 ${}^{(6)}G^a_b = 0$ 的解, 下面的讨论将给出这个可能解必须满足的一些条件.

2) 宏观物体的能量–动量张量

宏观物体的能量–动量张量在五维引力中的形式已由 Fukui(1993) 讨论过. 六维引力理论中所有张量方程都与五维的不同, 这里只给出球对称引力场的状态方程

$$p = \frac{\varepsilon}{3} - \frac{c^4}{48\pi G} \quad \overset{*}{\nu}\overset{*}{\lambda}\mathrm{e}^{-\mu}. \tag{3.4.38a}$$

3)　电磁场的能量–动量张量

电磁场能量–动量张量的不为零分量为

$$
\begin{aligned}
{}^{(\mathrm{em})}T_0^0 =& \frac{1}{4c^2}(\dot{\mu}+\dot{\lambda})\dot{\eta}\mathrm{e}^{-\nu} - \mathrm{e}^{-\lambda}\left[\frac{1}{2}\eta'' + \frac{1}{4}\eta'^2 + \frac{1}{4}(\mu'-\lambda')\eta' + \frac{1}{r}\eta'\right] \\
& -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mu}\left[\overset{**}{\eta} + \frac{1}{2}\overset{*}{\eta}{}^2 + \frac{1}{2}(\overset{*}{\lambda}-\overset{*}{\mu})\overset{*}{\eta}\right] - \left\{\ddot{\lambda}+\ddot{\mu}+\frac{1}{2}(\overset{\circ}{\lambda}{}^2+\overset{\circ}{\mu}{}^2)+\frac{1}{2}[\overset{\circ}{\lambda}\overset{\circ}{\mu}-\overset{\circ}{\eta}(\overset{\circ}{\lambda}+\overset{\circ}{\mu})]\right\}, \\
{}^{(\mathrm{em})}T_1^0 =& \frac{-1}{2c}\mathrm{e}^{-\nu}\left[\dot{\eta}' + \frac{1}{2}\dot{\eta}\eta' - \frac{1}{2}\nu'\dot{\eta}\right], \\
{}^{(\mathrm{em})}T_1^1 =& \frac{1}{2c^2}\left[\ddot{\eta} + \frac{1}{2}\dot{\eta}^2 - \frac{1}{2}(\dot{\nu}-\dot{\mu})\dot{\eta}\right] - \left[\frac{1}{4}(\nu'+\mu')\eta' + \frac{1}{r}\eta'\right]\mathrm{e}^{-\lambda} \\
& -\frac{1}{2}\left[\overset{**}{\eta} + \frac{1}{2}\overset{*}{\eta}{}^2 + \frac{1}{2}(\overset{*}{\nu}-\overset{*}{\mu})\overset{*}{\eta}\right]\mathrm{e}^{-\mu}, \\
{}^{(\mathrm{em})}T_2^2 =& {}^{(\mathrm{em})}T_3^3 = \frac{1}{2c^2}\left[\ddot{\eta} + \frac{1}{2}\dot{\eta}^2 + \frac{1}{2}\dot{\mu}\dot{\eta} + \frac{1}{2}\dot{\eta}(\dot{\lambda}-\dot{\nu})\right]\mathrm{e}^{-\nu} \\
& -\frac{1}{2}\left[\eta'' + \frac{1}{2}\eta'^2 + \frac{1}{2}\mu'\eta' + \frac{1}{2}\eta'(\nu'-\lambda') + \frac{1}{r}\eta'\right]\mathrm{e}^{-\lambda} \\
& -\frac{1}{2}\left[\overset{**}{\eta} + \frac{1}{2}\overset{*}{\eta}{}^2 + \frac{1}{2}\overset{*}{\lambda}\overset{*}{\eta} + \frac{1}{2}\overset{*}{\eta}(\overset{*}{\nu}-\overset{*}{\mu})\right]\mathrm{e}^{-\mu} \\
& -\frac{1}{2}\left[\overset{\circ\circ}{\nu} + \overset{\circ\circ}{\lambda} + \ddot{\mu} + \frac{1}{2}(\dot{\nu}^2+\dot{\lambda}^2+\dot{\mu}^2) + \frac{1}{2}\dot{\nu}(\dot{\lambda}-\dot{\eta})\right. \\
& \left. +\frac{1}{2}\dot{\lambda}(\dot{\mu}-\dot{\eta}) + \frac{1}{2}\dot{\mu}(\dot{\nu}-\dot{\eta})\right]\mathrm{e}^{-\eta}.
\end{aligned}
\tag{3.4.39}
$$

由方程 (3.4.35) 可以得到

$$
\begin{aligned}
& F_{01}=0, \quad F_{23}=0, \quad F^{02}F_{03} = -F^{12}F_{13}, \\
& F^{02}F_{02} - F^{03}F_{03} + F^{12}F_{12} - F^{13}F_{13} = 0, \\
& {}^{(\mathrm{em})}T_0^0 = -{}^{(\mathrm{em})}T_1^1 = \frac{-1}{4\pi}(-F^{02}F_{02} + F^{13}F_{13}), \\
& {}^{(\mathrm{em})}T_1^0 = \frac{-1}{4\pi}(F^{02}F_{12} + F^{03}F_{13}), \\
& {}^{(\mathrm{em})}T_2^2 = {}^{(\mathrm{em})}T_3^3 = 0.
\end{aligned}
\tag{3.4.40a}
$$

一个可能的球对称解应该满足 (3.4.40a).

从推广的麦克斯韦方程可以得到四维矢量 J^α. 它满足连续性方程

$$J^\alpha_{;\alpha} = 0.$$

它的各分量为

$$J^0 = -\frac{\cos\theta F_{02}\mathrm{e}^{-\nu}}{r^2\sin\theta},$$

$$J^1 = \frac{\cos\theta F_{12}\mathrm{e}^{-\lambda}}{r^2\sin\theta},$$
$$J^2 = \frac{\mathrm{e}^{-\nu}}{r}\frac{\partial F_{02}}{\partial x^0} + \frac{(\dot{\lambda}-\dot{\nu})F_{02}\mathrm{e}^{-\nu}}{2cr^2} - \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{r^2}\frac{\partial F_{12}}{\partial x^1} + \frac{(\lambda'-\nu')F_{12}\mathrm{e}^{-\lambda}}{2r^2},$$
$$J^3 = \frac{\mathrm{e}^{-\nu}}{(r\sin\theta)^2}\frac{\partial F_{03}}{\partial x^0} + \frac{(\dot{\lambda}-\dot{\nu})F_{03}\mathrm{e}^{-\nu}}{2c(r\sin\theta)^2} - \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{(r\sin\theta)^2}\frac{\partial F_{13}}{\partial x^1} + \frac{(\lambda'-\nu')F_{13}\mathrm{e}^{-\lambda}}{2(r\sin\theta)^2}. \quad (3.4.41)$$

当我们取 $F_{03}=F_{13}=0$ 时, 方程 (3.4.40) 变为

$$F_{02}^2 = 4\pi r^2\mathrm{e}^{\nu(\mathrm{em})}T_0^0,$$
$$F_{12}^2 = 4\pi r^2\mathrm{e}^{\lambda(\mathrm{em})}T_0^0,$$
$$[^{(\mathrm{em})}T_1^0]^2 = \mathrm{e}^{\lambda-\nu}[^{(\mathrm{em})}T_0^0]^2. \quad (3.4.40\mathrm{b})$$

由于 ν,λ,μ,η 都只是 x^0,x^1,x^5 和 x^6 的函数, 与 x^2 和 x^3 无关, 所以能量–动量张量 T_β^α 也只是 x^0,x^1,x^5 和 x^6 的函数. 于是这个场一定是球对称的. 方程 (3.4.40b) 通过 $^{(\mathrm{em})}T_0^0$ 也代表了一个围绕球对称物质的电磁场.

由能量–动量张量守恒定律还可以得到一些关系式. 由 $T_{0;\alpha}^\alpha=0$ 得到

$$\frac{\partial T_0^0}{\partial x^0} - \frac{1}{2c}\dot{\lambda}(T_1^1-T_0^0) - \mathrm{e}^{\nu-\lambda}\left[\frac{\partial T_1^0}{\partial r} + \left(\frac{3}{2}\nu' - \frac{1}{2}\lambda' + \frac{2}{r}\right)T_1^0\right] = 0.$$

由 $T_{1;\alpha}^\alpha=0$ 得到

$$\frac{\partial T_1^0}{\partial x^0} - \frac{1}{2c}(\dot{\nu}+\dot{\lambda})T_1^0 + \frac{\partial T_1^1}{\partial r} + \left(\frac{\nu'}{2}+\frac{2}{r}\right)T_1^1,$$
$$-\frac{1}{2}\nu' T_0^0 - \frac{2}{r}T_2^2 = 0. \quad (3.4.42)$$

3. 结论

上面的讨论说明, 第五、第六维度的数学量可以解释 4 维宇宙中的物理性质.

第一段讨论使我们有可能研究一些物理量的起源, 第二段讨论使我们能够研究自然现象的起源. 我们把 $^{(6)}G_5^5$ 分为 $^{(4)}G_5^5+H_5^5+I_5^5$, 把 $^{(6)}G_6^6$ 分为 $^{(4)}G_6^6+H_6^6+I_6^6$, 再由 $^{(6)}G_b^a=0$ 得到关系式

$$^{(4)}G_\alpha^\alpha = 2^{(4)}G_5^5 = 2^{(4)}G_6^6,$$
$$H_\alpha^\alpha = -H_5^5 + 3H_6^6. \quad (3.4.43)$$

式 (3.4.43) 可导致和 (3.4.38a) 一致的状态方程

$$\varepsilon - 3p = H_5^5 - 3H_6^6. \quad (3.4.38\mathrm{b})$$

对 $^{(6)}G_5^5$ 和 $^{(6)}G_6^6$ 有约束关系

$$I_5^5 = 3I_6^6, \quad (3.4.38\mathrm{c})$$

此式导致电磁场能量-动量张量是零迹的, 即

$$^{(\mathrm{em})}T_{\alpha}^{\alpha}=0.$$

关系式 (3.4.38a)~(3.4.38c) 也许能在四维宇宙的物理性质和引力-电磁场的状态方程中得到体现. 在特殊情况下, $\mathrm{e}^{\mu}=\mathrm{e}^{\nu}=1, \overset{*}{\nu}(=-\overset{*}{\lambda})=\dot{\nu}(=-\dot{\lambda})=0$, 度规 (3.4.37) 是静态的, 此时四维 Schwarzschild 解的六维模拟解满足方程 $^{(6)}G_{b}^{a}=0$. 在同样情况下, 四维 R-N 解的六维模拟解满足 $^{(6)}G_{b}^{a}=0(a\geqslant 5, b\geqslant 5)$, 但不满足 $^{(6)}G_{\beta}^{\alpha}=0$.

为了研究引力和电磁力, 我们引入了第五维和第六维坐标时带了 G 和 e, 就像爱因斯坦引入第四维时间坐标时带了常数 c 一样.

3.5 Einstein-Cartan 宇宙

本节讨论在 Einstein-Cartan 理论中的 Fridmann 宇宙模型. 讨论这一模型相对于宇宙常数 λ 和空间曲率变化的结构稳定性, 研究保守系和非保守系 (考虑黏滞性) 的情况.

R-W 度规为

$$\mathrm{d}s^{2}=\mathrm{d}t^{2}-a^{2}(t)\left[\frac{\mathrm{d}r^{2}}{1-kr^{2}}+r^{2}(\mathrm{d}\theta^{2}+\sin^{2}\theta\mathrm{d}\varphi^{2})\right]. \tag{3.5.1}$$

设引力场源是有旋理想流体, 则有

$$\varepsilon-\frac{A}{a^{6}}=-\Lambda+\frac{3k}{a^{2}}+\frac{3\dot{a}^{2}}{a^{2}}, \tag{3.5.2}$$

$$p-\frac{A}{a^{6}}=\Lambda-\frac{2\ddot{a}}{a}-\frac{\dot{a}^{2}}{a^{2}}-\frac{k}{a^{2}}+\frac{2\alpha\dot{a}}{a}. \tag{3.5.3}$$

式中 α 是体黏滞系数 (滑动黏滞系数不考虑, 因为宇宙是各向同性的), $A=k^{2}S_{0}^{2}a_{0}^{2}/4$, S_0 和 a_0 是现在宇宙的参量. 采用单位系 $c=1$, $k=\dfrac{8\pi G}{c^{4}}=1$.

利用态方程 $p=\gamma\varepsilon, 0\leqslant\gamma\leqslant 1$, 则上面二式可化为振动方程

$$\ddot{x}-\alpha\dot{x}-\frac{D^{2}\Lambda x}{3}+D(D-1)kx^{1-2/D}-D(3-D)\frac{Ax^{1-6/D}}{3}=0. \tag{3.5.4}$$

式中 $x=a^{D(\gamma)}, D=3(1+\gamma)/2$.

方程 (3.5.4) 在相空间 $(x,\dot{x})$ 中构成动力学方程组

$$\begin{aligned}&\dot{x}=y,\\&\dot{y}=\frac{D^{2}\Lambda x}{3}+\alpha y-D(D-1)kx^{1-2/D}+D(3-D)\frac{Ax^{1-6/D}}{3}.\end{aligned} \tag{3.5.5}$$

对于我们所研究的特殊情况 (辐射 D=2 和尘埃 D=3/2) 上述方程组分别具有形式

辐射 $D=2$

$$\dot{x}=y,$$
$$\dot{y}=\frac{4\Lambda x}{3}+\alpha y-2k+\frac{2Ax^{-2}}{3}; \tag{3.5.6}$$

尘埃 $D=3/2$

$$\dot{x}=y,$$
$$\dot{y}=\frac{3\Lambda x}{4}+\alpha y-\frac{3kx^{-1/3}}{4}+\frac{3Ax^{-3}}{4}. \tag{3.5.7}$$

我们借助于定性分析动力学系统的方法, 来研究 (3.5.6) 和 (3.5.7) 相对于 Λ 项和空间曲率的结构稳定性. 假定所研究的微分方程组中的参量有一个微小的扰动, 并要求相的几何形状的拓扑不变性.

$\alpha=0$ 时,(3.5.5) 具有哈密顿

$$H(x,y)=-\frac{y^2}{2}+\frac{D^2\Lambda x^2}{6}-\frac{D^2kx^{2-2/D}}{2}-\frac{D^2Ax^{2-6/D}}{6}.$$

这个哈密顿的相曲线 $H(x,y)=\text{const.}$ 对就于 (3.5.5)($\alpha=0$) 的第一积分

$$\frac{y^2}{2}+\left(-\frac{D^2\Lambda x^2}{6}+\frac{D^2kx^{2-2/D}}{2}+\frac{D^2Ax^{2-6/D}}{6}\right)=C.$$

我们在相平面上描述平直宇宙 ($k=0$) 中系统的解. 对于 $\Lambda>0$[图 6-4(a)]

$$\dot{x}=y,$$
$$\dot{y}=D^2\Lambda x/3+D(3-D)Ax^{1-6/D}/3;$$
$$D=2:\quad y^2/2=C+2\Lambda x^2/3-2Ax^{-1}/3,$$
$$D=3/2:\quad y^2/2=C+3\Lambda x^2/8-3Ax^{-2}/8.$$

对于 $\Lambda=0$[图 6-4(b)]

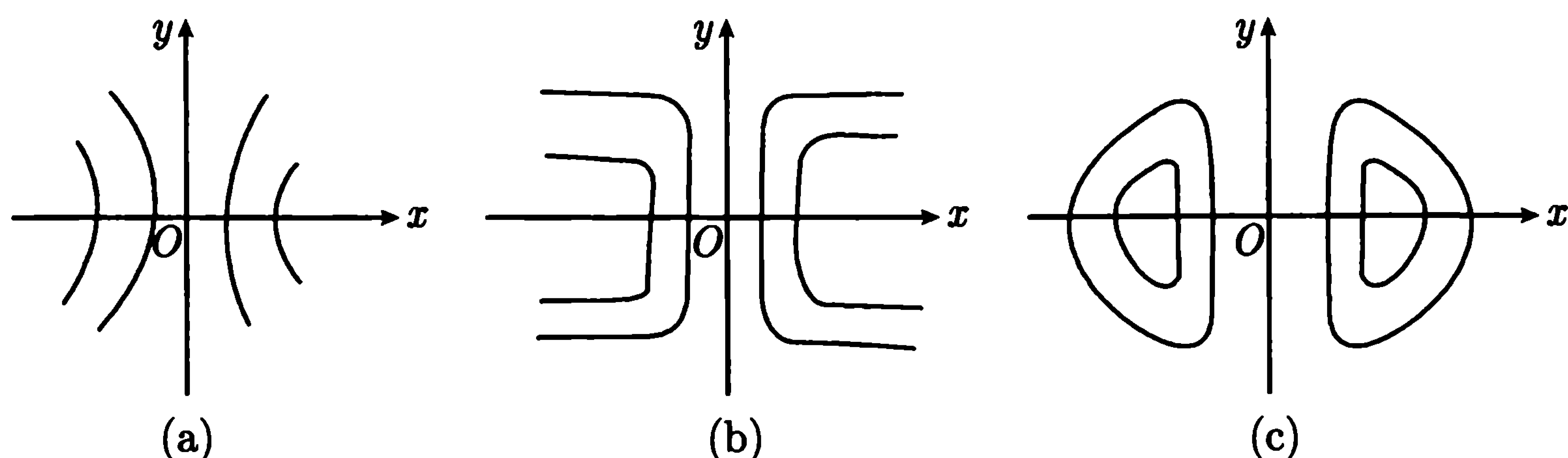


图 6-4

$$\dot{x} = y,$$
$$\dot{y} = D(3-D)Ax^{1-6/D}/3;$$
$$D = 2: \quad y^2/2 = C - 2Ax^{-1}/3,$$
$$D = 3/2: \quad y^2/2 = C - 3Ax^{-2}/8.$$

对于 $\Lambda < 0$[图 6-4(c)]

$$\dot{x} = y,$$
$$\dot{y} = -D^2|\Lambda|x/3 + D(3-D)Ax^{1-6D}/3;$$
$$D = 2: \quad y^2/2 = C - 2|\Lambda|x^2/3 - 2Ax^{-1}/3,$$
$$D = 3/2: \quad y^2/2 = C - 3|\Lambda|x^2/8 - 3Ax^{-2}/8.$$

由图 6-4 中可以看到, 在平直宇宙的情况下, 宇宙常数的变化引起相平面结构的本质变化. 值 $\Lambda = 0$ 是参量的相值, 我们得到结论, 在 Λ 的零值附近宇宙模型相对于小的变化具有结构不稳定性.

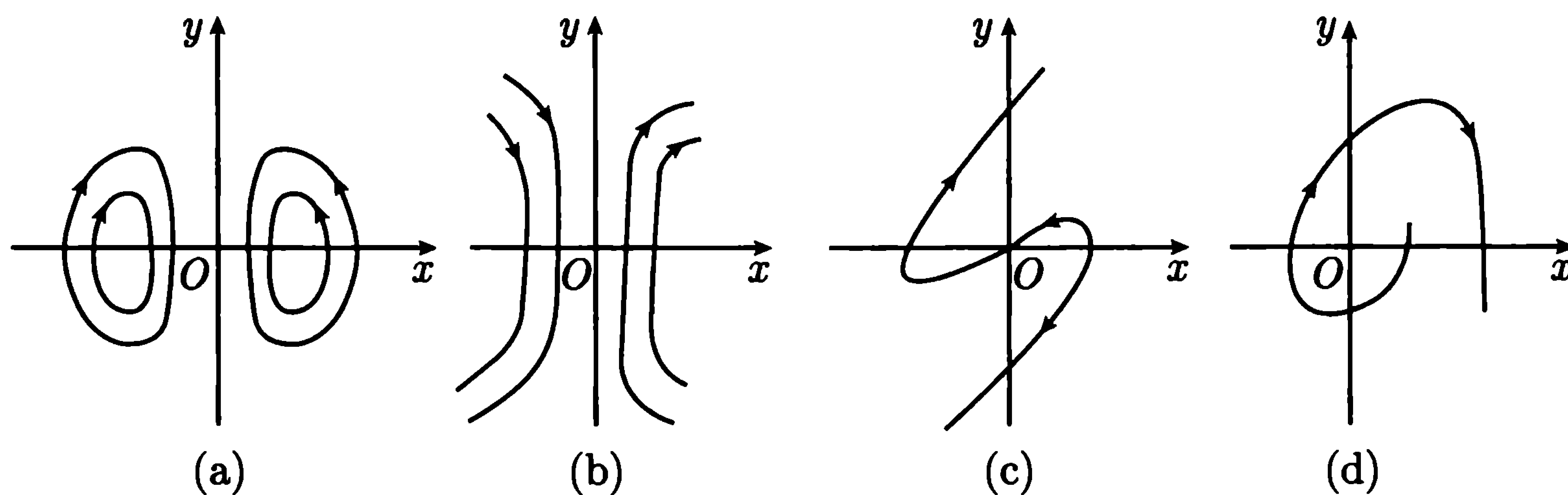


图 6-5

现在讨论弯曲效应. 当 $\Lambda \neq 0$, 很容易证明, 相的形象与平直模型没有区别. 对于闭合宇宙 $(k = +1)$, 当 $\Lambda = 0$(图 6-5(c))

$$\dot{x} = y,$$
$$\dot{y} = -D(D-1)x^{1-2/D} + D(3-D)Ax^{1-6/D}/3;$$
$$D = 2: \quad y^2/2 = C - 2x - 2Ax^{-1}/3,$$
$$D = 3/2: \quad y^2/2 = C - 9x^{2/3} - 3Ax^{-2}/8.$$

对于开放的宇宙 $(k = -1)$, 当 $\Lambda = 0$[图 6-5 中的 (b)]

$$\dot{x} = y,$$
$$\dot{y} = D(D-1)x^{1-2/D} + D(3-D)Ax^{1-6/D}/3;$$
$$D = 2: \quad y^2/2 = C + 2x - 2Ax^{-1}/3,$$

$$D = 3/2: \quad y^2/2 = C + 9x^{2/3}/8 - 3Ax^{-2}/8.$$

因此, 当 $\Lambda = 0$ 时, 弯曲效应改变了相平面的结构. 换言之, 平直模型相对于空间曲率的变化是结构不稳定的.

现在讨论考虑体黏滞系数的宇宙系统的一些解. 方程组 (3.5.5) 是非线性的, 具有复杂的奇点. 对于闭合宇宙 ($k = +1$), 在 $\Lambda = 0$ 的情况下, 允许应用线性化程序.

对于辐射 ($D = 2$)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= \alpha y - 2 + 2Ax^{-2}/3. \end{aligned}$$

在具有物理意义的区域 $x \geqslant 0$, 奇点是

$$x_0 = \sqrt{A/3}.$$

线性化方程

$$\ddot{\bar{x}} - \alpha\dot{\bar{x}} + 4\bar{x}\sqrt{A/3}/3 = 0$$

有解

$$x = C_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + C_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t}, \quad y = C_1 \kappa_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + C_2 \kappa_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t}.$$

式中 λ_1 和 λ_2 是特征方程

$$\lambda^2 - \alpha\lambda + 4\sqrt{3/A} = 0$$

的根,κ_1 和 κ_2 是"分布系数"方程

$$\kappa^2 - \alpha\kappa + 4\sqrt{3/A} = 0$$

的根.

对于相平面上的解, 可以考虑下面的情况.

1. λ_1 和 λ_2 是实的, 且同号

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(\alpha \pm [\alpha^2 - 16\sqrt{3/A}]^{1/2}),$$

α 满足 $A > A_\alpha = 768/\alpha^4$. 这时有 $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$, 且存在新的变量 (ξ, η),使 $\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t} = \lambda_1 \xi, \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t} = \lambda_2 \eta, \eta = C\xi^a, a = \lambda_2/\lambda_1$. 初始坐标是不稳定节点类型的奇点.

方程组的通解 [图 6-5(a)] 为

$$x(t) = x_0 + C_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + C_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t}.$$

2. 根 λ_1 和 λ_2 是复共轭的

当 $0 < A < A_\alpha, A_\alpha = 768/\alpha^4$ 时出现这种情况, 此时有

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left[\alpha \pm \mathrm{i}(-\alpha^2 + 16\sqrt{3/A})^{1/2}\right] = a + \mathrm{i}b.$$

奇点 (0, 0) 是不稳定的焦点. 由于当 $\bar{x}, y$ 是实的时 ξ 和 η 是复共轭, 故可引入中间变换

$$\lambda_1 = a_1 + \mathrm{i}b_1, \quad \lambda_2 = a_1 - \mathrm{i}b_1,$$

$$\xi = u + \mathrm{i}v, \quad \eta = u - \mathrm{i}v,$$

在极坐标系中我们得到对数螺线簇

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{a_1}{b_1}r, \quad r = C\exp\left(\frac{a_1}{b_1}\varphi\right).$$

当过渡到相平面 $(\bar{x}, y)$ 时, 螺线变形 [图 6-5(b)]. 通解为

$$x(t) = x_0 + C\mathrm{e}^{a_1 t}\sin(b_1 t + c_1),$$

$$a_1 = \mathrm{Re}\lambda, \quad b_1 = \mathrm{Im}\lambda.$$

3. 当 $A = A_\alpha = 768/\alpha^4$, 临界点是不稳定的节点

通解为 $x(t) = x_0 + \exp(\alpha t/2)(C_1 t + C_2)$.

在尘埃的情况下, 奇点 $x_0 = A^{3/8}$. 线性化方程为

$$\ddot{\bar{x}} - \alpha\bar{x} + 2\bar{x}\sqrt{1/A} = 0.$$

特征方程

$$\lambda^2 - \alpha\lambda + 2\sqrt{1/A} = 0$$

的根为

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left[\alpha \pm \left(\alpha^2 - 8\sqrt{\frac{1}{A}}\right)^{1/2}\right].$$

相的形象类似于辐射的情况 $(A_\alpha = 64/\alpha^4)$.

现在讨论当 $t \to \infty$ 时系统的渐近行为. 正如由相的形象看到的, 当 $\Lambda < 0, \alpha = 0$, 在闭合宇宙的情况下系统是周期性的, 不具有渐近行为. 当 $t \to \infty$ 时具有 $\Lambda > 0, \alpha = k = 0$ 的动力学系统由方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} - \frac{D^2\Lambda x}{3} = 0$$

描述, 而渐近由下式表述:

$$x(t) = C_1 \exp\left(\sqrt{\frac{D^2 \Lambda}{3}} t\right) + C_2 \exp\left(-\sqrt{\frac{D^2 \Lambda}{3}} t\right).$$

相应地, 当 $\Lambda = 0, \alpha = k = 0$, 系统由方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = 0$$

描述, 渐近为

$$x(t) = C_1 t + C_2.$$

当 $\Lambda = \alpha = 0, k = -1$, 由方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = 2, \quad D = 2$$

描述, 渐近为

$$x(t) = (t - t_0)^2.$$

现在, 对于恒定体黏滞系数 $\alpha = \text{const.}$, 我们建立奇点的相图 (图 6-6). 半平面 (A, α) 上任一点对应一个宇宙模型, 式中

$$A = \frac{768(D-1)^3}{(3-D)\alpha^4}.$$

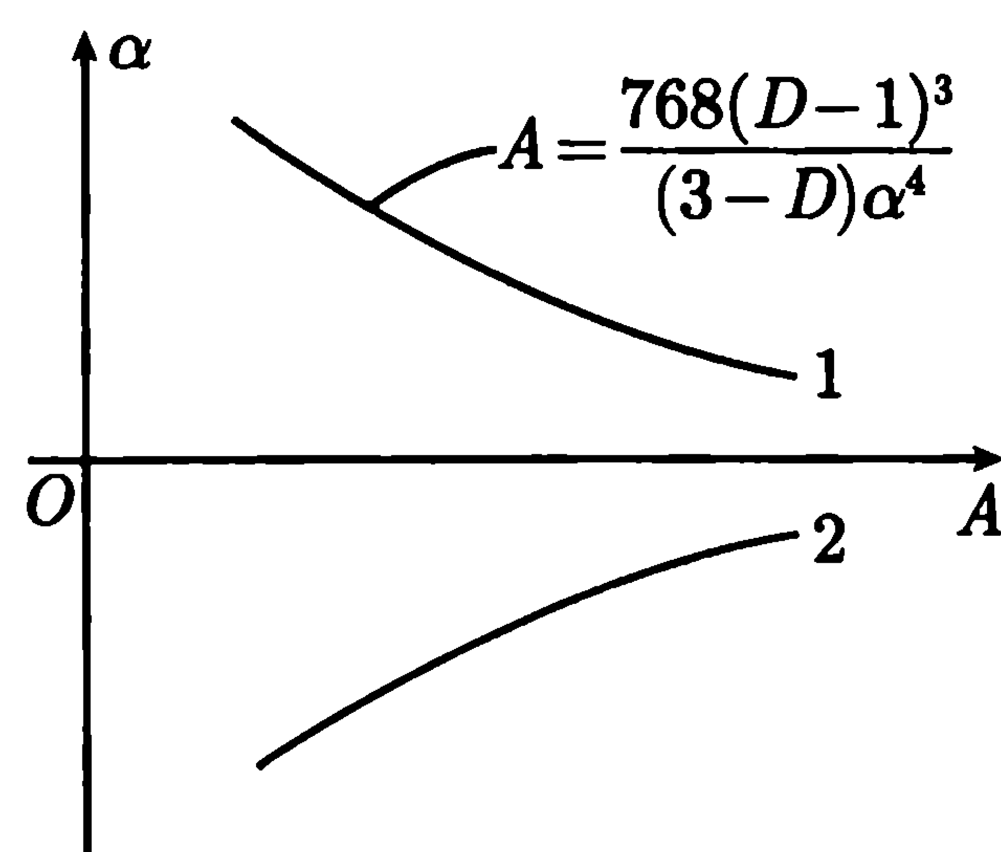


图 6-6

区域 $\alpha > 0$ 对应于不稳定的节点 (曲线 1 的上方) 和焦点 (曲线 1 和轴 OA 之间), $\alpha < 0$ 的区域对应于稳定的节点 (曲线 2 下方) 和焦点 (曲线 2 和轴 OA 之间). 奇点的种类由系统的线性化矩阵的本征值确定. 如果体黏滞系数是某个参量 δ(比如态方程中的 γ) 的函数. 则 δ 的变化引起线性化矩阵行列式的变化. 由图可见, 当参量 δ 取某些值 (相图的大小) 时, 曲线由一种类型奇点的区域过渡到另一种类型奇点的区域. 由图可见, 结构稳定性的要求导致研究非零黏滞系数的必要性. 因此, 在这类解中, 黏滞系数是稳定性的要素.

对本节的讨论作一小结:

(1) 所讨论的模型对于宇宙的变化 (在 $\Lambda = 0, \alpha = 0$) 是结构不稳定的.

(2) 具有 $k = \Lambda = 0$ 的模型对于空间曲率 k 的变化 (在 $\alpha = 0$) 是结构不稳定的.

(3) 宇宙常数是相图参量. 这说明即使宇宙项很小, 对于比较不同的理论模型和真实宇宙也起着重要作用. 因此, 在研究真实宇宙时, 必须考虑非零的宇宙项.

3.6 Dirac 假设

把自然界中的常数作一些组合, 按数量级有如下关系:

$$\frac{Rm_e c^2}{e^2} \sim \frac{e^2}{Gm_e^2} \sim \frac{hc}{Gm_p m_e} \sim \left(\frac{M}{m_p}\right)^{1/2} \sim 10^{40}. \tag{3.6.1}$$

式中 R 和 M 分别为现在的宇宙半径和相应的宇宙总质量. Dirac 认为这些数值关系不是偶然的, 是宏观量和微观量之间存在某种联系的结果. 这实际上可认为是马赫原理的推广. 就是把以局部物理规律为基础的惯性系作为宇宙普适参考系.

比如膨胀宇宙, R 随时间变化. 由 (3.6.1) 第一式可知, 如果设微观常数不变, 则引力常数 G 就要随时间变化: $G \sim R^{-1}$; 如果假设 G 不变, 则 $e \sim R^{1/4}$. 若 e 随时间变化, 则宇宙过去的原子光谱的精细结构就会改变. 由于铀等重原子核的静电能及 α 衰变几率不同, 所以原子核的衰变方式和寿命也会改变. 这样, 用放射性元素综合确定宇宙年龄的方法就会与用其他方法测得的结果不一致. 如果 G 随时间变化, 则对恒星年龄有一定影响. 现在还没有足够证据来否定这些可能的变化.

3.7 奇点定理

在 3.3 节中已指出, 物理上合理的宇宙模型 (弗里德曼宇宙和 Bianchi 型宇宙) 都存在类空奇点. 通常人们是不喜欢有奇点的模型的, 因此总要设法避免奇点. 那么, 是否可以通过与高度对称性的偏离或其他途径避免奇点呢? 了解下面的定理是有益的.

根据第二篇 (3.11.24), 有

$$u_{\mu;\nu} = \omega_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu} + \frac{1}{3}\theta(g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu) - \dot{u}_\mu u_\nu. \tag{3.7.1}$$

将上式代入恒等式

$$(u_{\mu;\nu;\tau} - u_{\mu;\tau;\nu})g^{\mu\nu}u^\tau = -R_{\mu\nu}u^\mu u^\nu, \tag{3.7.2}$$

并利用场方程, 我们得到

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\tau} = -\frac{\theta^2}{3} - \sigma_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} - k(3p+\rho) + \omega_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu} + \dot{u}^\mu_{;\mu}. \tag{3.7.3}$$

假设 $\rho + 3p \geqslant 0$, 则当旋速度和加速度等于零时, 由 (3.7.3) 可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{1}{\theta}\right) \geqslant \frac{1}{3}. \tag{3.7.4}$$

由此可知, 若 $\theta > 0$, 则 θ^{-1} 在过去的某一时刻为零; 若 $\theta < 0$, 则 θ^{-1} 在将来的某一时刻为零. 由于膨胀速度 θ 是体积相对变化的量度, 因此我们得到定理: 在场源物质无旋、无加速且满足 (3.7.4) 的模型中一定存在奇点. 在弗里德曼模型中 $\theta = 3\dot{R}/R$, 这一奇点恰与 $R = 0$ 对应.

如果物质本身有旋, 但宇宙空间中存在无旋的类时短程线簇, 仍能得到类似的结论. 我们熟知, 两个指向未来的类时单位矢 u^μ 和 v^μ, 总满足 $u^\mu v_\mu \leqslant 1$. 由此根据场方程得到

$$R_{\mu\nu}v^\mu v^\nu \geqslant k(\rho + 3p)/2. \tag{3.7.5}$$

根据满足这些条件的短程线, 同样得到不等式 (3.7.5). 物理上试验粒子行为的奇异性对应于数学上空间的奇异性.

作为上述定理的推广, 可以证明, 如果宇宙在某段时间内是均匀的 (具有一个空间运动群), 对应的初值问题在初始曲面上有唯一解, 且所有类时 (或零) 矢量 v^μ 都满足条件 $R_{\mu\nu}v^\mu v^\nu > 0$, 则宇宙一定存在一奇点.

3.8 暗物质和暗能量

1. 宇宙动力学方程和临界密度

宇宙学原理告诉我们, 在宇宙学尺度上宇宙是均匀各向同性的. 其四维时空为 Robertson-Walker 度规所描述:

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - a^2(t)\left(\frac{\mathrm{d}r^2}{1-kr^2} + r^2\mathrm{d}\theta^2 + r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2\right), \tag{3.8.1}$$

式中 $a(t)$ 为宇宙标度因子, k 为一常数. 适当选择 r 的单位, 可以使 $k = +1, 0, -1$, 分别对立于正曲率空间、零曲率空间和负曲率空间, 即分别对立于闭合的、平直的和开放的宇宙.

宇宙物质的能量–动量张量通常写成理想流体的形式:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)U_\mu U_\nu + pg_{\mu\nu}, \tag{3.8.2}$$

式中 ρ 和 p 分别为宇宙物质密度和压强, U_μ 为四维速度

$$U^0 = 1, \tag{3.8.3}$$

$$U^i = 0. \tag{3.8.4}$$

守恒定律表述为

$$T^{\mu\nu};\nu = 0. \tag{3.8.5}$$

当 $\mu = i$, 上式显然成立; 当 $\mu = 0$, 上式成为

$$\mathrm{d}[a^3(\rho + p)] = a^3 \mathrm{d}p, \tag{3.8.6}$$

或者

$$\mathrm{d}(\rho a^3) = -p\mathrm{d}(a^3). \tag{3.8.7}$$

对于最简单的状态方程

$$p = w\rho, \tag{3.8.8}$$

能量密度和宇宙标度因子的关系是

$$\rho \sim a^{-3(1+w)}. \tag{3.8.9}$$

对于辐射、物质和真空分别有

辐射

$$p = \frac{1}{3}\rho, \quad \rho \sim a^{-1}; \tag{3.8.10}$$

物质

$$p = 0, \quad \rho \sim a^{-3}; \tag{3.8.11}$$

真空

$$p = -\rho, \quad \rho = \mathrm{const}.$$

由 Robertson–Walker 度规出发, 根据广义相对论, 我们可以得到 Ricci 张量的非零分量

$$\begin{aligned} R_{00} &= -3\frac{\ddot{a}}{a}, \\ R_{ij} &= -\left(\frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2\frac{k}{a^2}\right) g_{ij}. \end{aligned} \tag{3.8.12}$$

Ricci 标量为

$$R = -6\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}\right). \tag{3.8.13}$$

爱因斯坦场方程

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G T_{\mu\nu} \tag{3.8.14}$$

的 00 分量就是弗里德曼方程

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G\rho}{3}, \tag{3.8.15}$$

场方程的 ii 分量是

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = -8\pi G\rho. \tag{3.8.16}$$

方程 (3.8.7), (3.8.15), (3.816) 由 Bianchi 恒等式相联系, 这三个方程中只有两个是独立的, 由 (3.8.15) 和 (3.8.16) 可以得到一个能直观表示宇宙膨胀加速度的方程

$$\frac{\ddot{a}}{a}=-\frac{4\pi G}{3}(\rho+3p). \tag{3.8.17}$$

我们知道现在宇宙在加速膨胀, 即 $\ddot{a}>0$, 这就要求 $\rho+3p<0$, 从而我们知道, 宇宙加速膨胀的条件是物态方程参数 $w<-1/3$.

宇宙膨胀的速度由哈勃常数描述, 它是这样定义的:

$$H\equiv\frac{\dot{a}}{a}. \tag{3.8.18}$$

哈勃常数其实并非常数, 而是随时间变化的. 哈勃常数 H_0 是哈勃常数的当前值.

弗里德曼方程可以写成下面的形式:

$$\frac{k}{H^2a^2}=\frac{\rho}{\rho_c}-1, \tag{3.8.19}$$

$$\rho_c\equiv\frac{3H^2}{8\pi G}. \tag{3.8.20}$$

由 (3.8.19) 可见, 宇宙空间的曲率完全取决于密度. 若密度大于临界密度 ρ_c, 则 k 是正的, 宇宙空间是弯曲且有限的; 若密度小于 ρ_c, 则 k 是负的, 宇宙空间是弯曲且无限的; 若密度等于 ρ_c,k 等于零, 宇宙空间是平直的、无限的.

我们定义一个无量纲密度参数

$$\Omega=\frac{\rho}{\rho_c}, \tag{3.8.21}$$

则弗里德量方程可写为

$$\frac{k}{H^2a^2}=\Omega-1, \tag{3.8.22}$$

显然,$\Omega>1,\Omega=1$ 和 $\Omega<1$ 分别对应于 $k>0,k=0$ 和 $k<0$.

2. 暗物质

1937 年, 弗里兹 • 札维奇 (Fritz Zwicky) 发现大星系团中的星系具有极高的运动速度. 要束缚住这些星系, 星系团的实际质量应该是观测到的恒量总质量的 100 多倍, 即有大量的暗物质存在. 为了简化, 下面我们用牛顿引力理论讨论旋涡星系的质量计算. 假定星系质量分布是球对称的, 设半径为 r 的球面以内的质量为 $M(r)$, 则距中心 r 处的恒量的轨道速率为

$$v(r)=\sqrt{\frac{GM(r)}{r}}. \tag{3.8.23}$$

随着距离球心的距离 r 的增大. 发光物质变得很稀少了, 这时应该可以认为 M 近于一个常量, 速度 v 就应该随半径 $r^{\frac{1}{2}}$ 下降. 然而实际的观测与此恰恰相反, 转

动曲线在距星系中心很远处并不下降, 而是维持一个恒定的速度. 据此我们可以推知, 一定有我们所看不见的暗物质晕在贡献其引力, 维持旋转速度 (图 6-7).

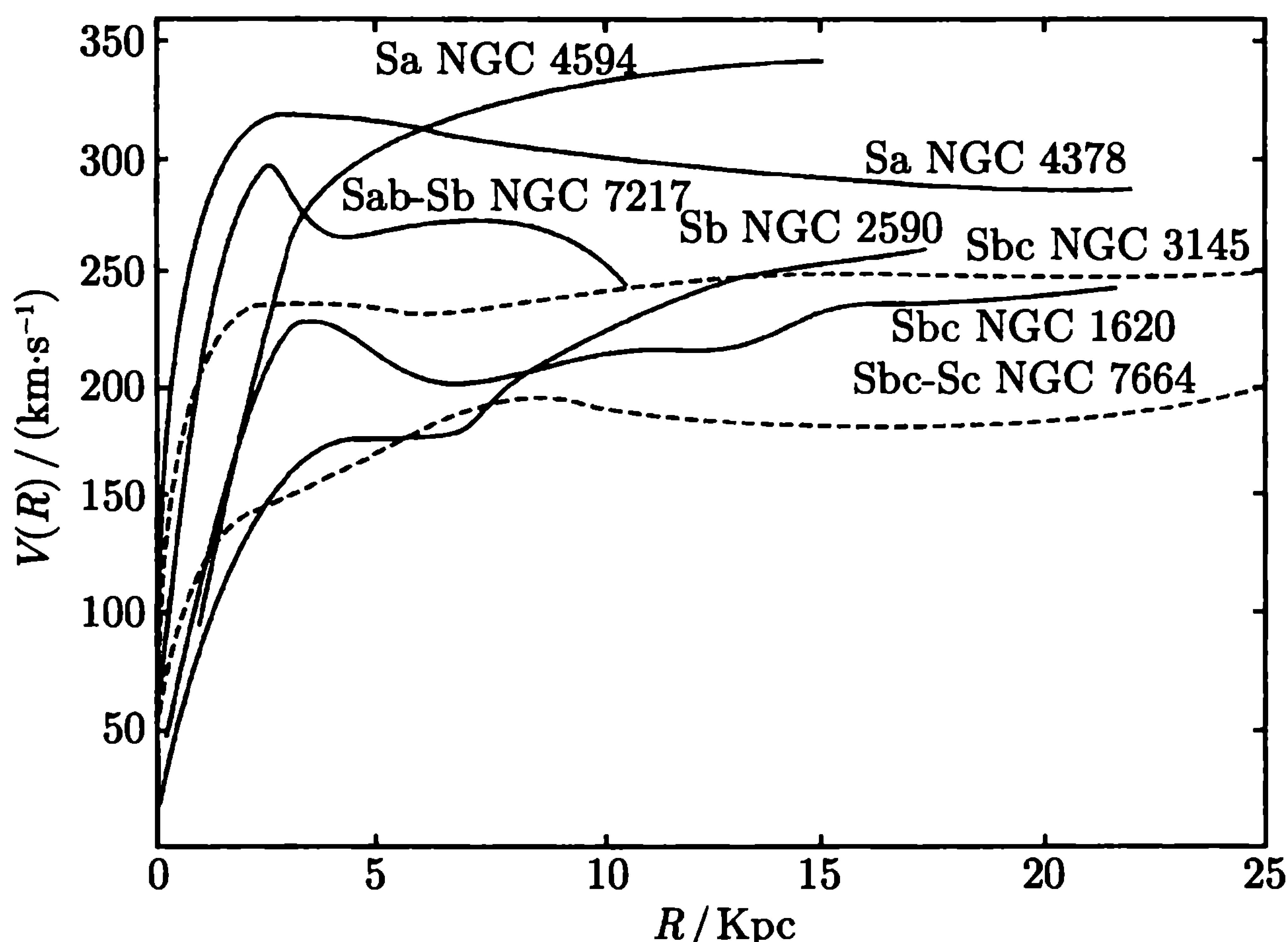


图 6-7　七个漩涡星系的旋转曲线, 它们在距离星系中心很远的地方依然维持恒定的速度, 说明星系被一个巨大的暗物质晕所包围

根据天文观测数据, 经过简单的计算得到, 发光物质对密度参数的现在值 Ω_0 的贡献

$$\Omega_{0\mathrm{L}} \approx 0.5\% \tag{3.8.24}$$

人们用类似的牛顿动力学方法, 对星系团进行观测, 假定维里定理成立, 应用式 (3.8.23), 得到星系团对 Ω_0 的贡献为

$$10\% < \Omega_{0\mathrm{G}} < 30\% \tag{3.8.25}$$

此式与 (3.8.24) 比较, 表明星系团中除发光物质以外还有大量暗物质.

20 世纪 80 年代提出的宇宙暴胀理论认为 $\Omega_0 \approx 1$, 后来的测量和计算都支持这一结论, 宇宙暴胀理论已得到公认. 式 (3.8.25) 表明星系团中的发光物质和暗物质的总和对 Ω_0 的贡献也只有 20% 左右, 与 $\Omega_0 \approx 1$ 比较, 人们认为除了星系团之类的成团物质之外, 还有 80% 的物质不成团, 甚至均匀分布于宇宙中. 这问题我们在下面一小节再继续讨论.

正是暗物质促成了宇宙结构的形成. 如果没有暗物质就不会形成星系、恒星和行星, 也就更谈不上今天的人类了. 宇宙尽管在大尺度上表现出均匀和各向同性, 但是在小一些的尺度上则存在着恒星、星系、星系团、巨洞以及星系长城. 在大尺度上主宰物质运动的力只有引力. 但是均匀分布的物质不会产生引力, 因此今天所有的宇宙结构必然源自于宇宙极早期物质分布的微小涨落, 这些涨落会在宇宙微波背景辐射 (CMB) 中留下痕迹. 然而, 普通物质不可能通过其自身的涨落形成实质上的结构而又不在宇宙微波背景辐射中留下痕迹, 因为在宇宙极早期普通物质还没

有从辐射中退耦出来. 而暗物质不与辐射耦合, 其微小的涨落在普通物质退耦之前就放大了许多倍. 在普通物质退耦之后, 已经成团的暗物质就开始吸引普通物质, 进而形成了我们现在观测到的结构. 这一初始涨落的振幅非常非常小. 这样的物质是无热 (低速) 运动的非相对论性粒子, 因此称为冷暗物质.

对于先前提到的小扰动 (涨落), 为了预言其在不同波长上的引力效应, 小扰动谱必须具有特殊的形态. 为此, 最初的密度涨落应该是标度无关的. 也就是说, 如果我们把能量分布分解成一系列不同波长的正弦波之和, 那么所有正弦波的振幅都应该是相同的. 暴涨理论的成功之处就在于它提供了很好的动力学机制来形成这样一个标度无关的小扰动谱 (其谱指数 $n = 1$). WMAP 的观测结果证实了这一预言, 其观测到的结果为 $n = 0.99 \pm 0.04$.

现在已经知道了两种暗物质 —— 中微子和黑洞. 但是它们对暗物质总量的贡献是非常微小的. 最被看好的暗物质是低温无碰撞暗物质 (CCDM), 其粒子具有寿命长、温度低、无碰撞的特性. 寿命长意味着它的寿命必须与现今宇宙年龄相当, 甚至更长. 温度低意味着在退耦时它们是非相对论性粒子, 只有这样它们才能在引力作用下迅速成团. 由于成团过程发生在比哈勃视界 (宇宙年龄与光速的乘积) 小的范围内, 而且这一视界相对现在的宇宙而言非常小, 因此最先形成的暗物质团块或者暗物质晕比银河系的尺度要小得多, 质量也要小得多. 随着宇宙的膨胀和哈勃视界的增大, 这些最先形成的小暗物质晕会合并形成较大尺度的结构, 而这些较大尺度的结构之后又会合并形成更大尺度的结构. 其结果就是形成不同体积和质量的结构体系, 这是与观测相一致的. 相反的, 对于相对论性粒子, 如中微子, 在物质引力成团的时期由于其运动速度过快而无法形成我们观测到的结构. 因此中微子对暗物质质量密度的贡献是可以忽略的. 在太阳中微子实验中对中微子质量的测量结果也支持了这一点. 无碰撞指的是暗物质粒子 (与暗物质和普通物质) 的相互作用截面在暗物质晕中小得可以忽略不计. 这些粒子仅仅依靠引力来束缚住对方, 并且在暗物质晕中以一个较宽的轨道偏心率谱无阻碍地作轨道运动.

低温无碰撞暗物质 (CCDM) 被看好有几方面的原因. 第一, CCDM 的结构形成数值模拟结果与观测相一致. 第二, 作为一个特殊的亚类, 弱相互作用大质量粒子 (WIMP) 可以很好地解释其在宇宙中的丰度. 如果粒子间相互作用很弱, 那么在宇宙最初的万亿分之一秒它们是处于热平衡的. 之后, 由于湮灭它们开始脱离平衡. 根据其相互作用截面估计, 这些物质的能量密度大约占了宇宙总能量密度的 20%~30%. 这与观测相符.

3. 暗能量

自从 1929 年哈勃发现宇宙膨胀以来, 人们一直以为宇宙是减速膨胀的. 因为主宰宇宙物质运动的力是引力, 在引力作用下膨胀只能减速. 如同地面上一个竖直

上抛的物体, 在重力作用下只能减速. 然而 1997 年 12 月, 作为大红移超新星搜索小组成员的哈佛大学天文学家 R. 基尔希纳的观测结果显示, 宇宙膨胀不是减速而是在加速. 1998 年, S. 玻尔穆特和 B. 史密特两个小组利用 Ia 型超新星作标准烛光, 精确测量距离－红移关系, 发现宇宙在加速膨胀. 这一事实告诉我们, 宇宙中除了普通物质之外, 还有一种一直未被人们发现的能量, 这种能量会产生斥力, 从而推动宇宙加速膨胀. 芝加哥大学的 M. 特纳给这种能量起了个名字, 叫暗能量. 后来更多的天文观测, 如新的超新星探测, 斯隆数字巡天得到的宇宙大尺度结构, 威尔金森宇宙微波背景辐射各向异性探测器 WMAP(Wilkinson Microwave Anisotrope Probe) 的观测, 都证实了暗能量的存在, 并且使它成为标准宇宙模型的一部分.

因为维里 (Virial) 观测到宇宙微波背景辐射的各向异性和黑体谱, 进一步支持了标准宇宙模型, 获得了 2006 年诺贝尔物理学奖.

暗能量是一种不可见的巨大的能量, 在宇宙总物质中约占 73%, 足以主宰宇宙的运动. 它与普通物质和暗物质都有本质的不同, 它产生负压强而且均匀分布于宇宙中. 普通物质和暗物质的压强都是非负的.

暗能量是近年来宇宙学研究中一个具有里程碑意义的重大成果. 支持暗能量主要证据有二：一是观测发现宇宙在加速膨胀. 按照爱因斯坦场方程 (3.8.17), 加速膨胀要求 $p/\rho < 0$, 导致具有负压强的暗能量; 二是由 WMAP 给出的宇宙中物质总密度的精确测定结果：普通物质和暗物质加起来只占 27%, 仍有 73% 的短缺. 这一短缺的物质就是暗能量.

由于 WMAP 的精密数据和超新量 Ia 的观测数据, 人们确认以下观测结果：

(1) 宇宙总密度参数 $\Omega_0 = 1.02 \pm 0.02$, 即宇宙几近平直;

(2) 宇宙年龄是 137 ± 2 亿年;

(3) 哈勃常数 $H_0 \approx 0.71 \pm 0.01 \mathrm{km} \cdot \mathrm{s}^{-1} \cdot \mathrm{Mpc}^{-1}$;

(4) 宇宙总质量 (100%)≈ 重子 ＋ 轻子 (4.4%)+ 热暗物质 (⩽ 2%)+ 冷暗物质 (≈ 20%)+ 暗能量 (73%).

暗能量的一个很重要的参数, 就是它的物态方程参数 w. 由 (3.8.17) 可知, 只有当 $p + 3p < 0$ 时, 才会得到加速膨胀, 即 $\ddot{a} > 0$, 此时对于特态方程 $p = w\rho$, 其参数 $w < -1/3$. 因而各种暗能量模型都必须满足 $w < -1/3$ 的条件, 同时由观测确定的 w 的值又成为检验各种暗能量模型的标准. 例如利用 WMAP 和 SNLS(supernova legacy survey) 可以给暗能量的物态方程参数一个很强的限制：$w = -0.967^{+0.073}_{-0.072}$.

一些主要的暗能量候选者有以下几个：

1) 宇宙学常数

爱因斯坦根据广义相对论构建第一个宇宙模型时, 人们尚不知道宇宙膨胀这一事实, 因而爱因斯坦引入了宇宙学常数, 试图构建一个静态的宇宙模型. 引入宇宙

学常数后, 场方程变为如下形式:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}.$$

将 $\Lambda g_{\mu\nu}$ 项移到方程的右边, 可以看出, 宇宙学常数其实提供了一个等效的能量–动量张量. 它的能量密度和压强分别是

$$p_c = \frac{\Lambda}{8\pi G} \tag{3.8.26}$$

$$p_c = -\frac{\Lambda}{8\pi G} \tag{3.8.27}$$

由此可知, 相应的物态方程参数 $w = -1$. 实际上用宇宙常数构造的静态宇宙是不稳定的, 只要变大一点就会导致斥力增大和引力减小, 从而使膨胀加速. 这恰好符合现在观测到的宇宙加速膨胀的事实.

然而, 用宇宙学常数解释宇宙的加速膨胀尚有两个疑难问题. 第一个问题是宇宙常数问题, 第二个问题称为巧合 (coincidence) 问题. 由量子场论可以计算真空能, 所得到的形式与宇宙学常数给出的能量–动量张量相同, 因此可以把二者作为等效的宇宙学常数或等效真空能处理. 但是由 WMAP 给出的等效真空能为

$$p_{\mathrm{c}}^{\mathrm{obs}} = 10^{-47}\mathrm{GeV}^4, \tag{3.8.28}$$

理论预言值为

$$p_{\mathrm{c}}^{\mathrm{th}} = 10^{74}\mathrm{GeV}^4, \tag{3.8.29}$$

两者相差上百个数量级.

所谓巧合问题, 是指的今天的物质密度与真空能密度恰好处在同一个量级. 由于两者随宇宙膨胀的演化规律不同, 所以需要在极早期对宇宙的初始条件进行精细的微调 (fine-tuning).

2) Quintessence

Quintessence 是通过引入一个标量场来构造的暗能量模型. 它的拉氏量为

$$\mathscr{L} = \sqrt{-g}\left[\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^u\phi - V(\phi)\right], \tag{3.8.30}$$

式中 $V(\phi)$ 是势. 度规取平直的 R-W 度规. 由拉氏量变分就可得到 Quintessence 的运动方程

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0. \tag{3.8.31}$$

上面的撇号表示对 ϕ 求导. 由理想流体的能量–动量张量形式, 得到 Quintessence 的能量密度和压强分别是

$$\rho_q = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V, \tag{3.8.32}$$

$$p_q = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V. \tag{3.8.33}$$

由此我们可以得到它的物态方程参数

$$w = \frac{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V}{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V}. \tag{3.8.34}$$

势函数 $V(\phi)$ 取不同形式, 则 w 可在 0 到 -1 之间变化. 并且一般来说, w 不再是一个常数, 而是变化的. 作为一个动力学模型, Quintessence 可以解决巧合问题. 这是一个被公认的候选者, 可认为是继夸克、轻子、中间破色子和非重子暗物质之后的第五原质.

除了 Quintessence 以外, 还有一些不同的暗能量候选者, 下面介绍两种.

3) Phantom Quintessence 虽然能够实现 $w < -1/3$, 从而解释宇宙加速膨胀, 但是实测表明, w 也很有可能是小于 -1 的. 因此 Caidwell 于 2002 年提出 Phantom. Phantom 也引入了一个标量场, 但与 Quintessence 不同的是, 它的动能项是负的. Phantom 的拉氏量是

$$\mathscr{L} = \sqrt{-g}\left[-\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi)\right] \tag{3.8.35}$$

它的能量密度和压强分别是

$$\rho_Q = -\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V, \tag{3.8.36}$$

$$p_Q = -\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V. \tag{3.8.37}$$

因而它的物态方程参数为

$$w = \frac{-\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V}{-\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V}. \tag{3.8.38}$$

很明显地, 与 Quintessence 相比, Phantom 可以实现 $w < -1$. 由于 $w < -1$, Phantom 具有很有趣的性质. 例如, Phantom 的能量密度是随着宇宙膨胀而增加的. 还有一种新的宇宙结局的可能性 “Big Rip” . 哈勃膨胀只是星系退行, 作为引力束缚体的星系本身是并不膨胀的. 然而 Phantom 导致的 “Big Rip” 却可以将星系、恒星、行星等引力束缚体全部撕裂.

4) Quintom

Quintessence 和 Phantom 虽然可以分别实现 $w > -1$ 和 $w < -1$, 但是却不能实现 w 穿越 -1. 为了解决这个问题 Quintom 被提了出来. Quintom 实际是由 Quintessence 和 Phantom 两场构成的. 它的拉氏量是

$$\mathscr{L} = \sqrt{-g}\left[-\frac{1}{2}\partial_\mu\phi_1\partial_\mu\phi_1 + \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_2\partial^\mu\phi_2 - V(\phi_1,\phi_2)\right], \tag{3.8.39}$$

它的物态方程参数为

$$w = \frac{-\frac{1}{2}\dot{\phi}_1^2 + \frac{1}{2}\dot{\phi}_2^2 - V(\phi_1, \phi_2)}{-\frac{1}{2}\dot{\phi}_1^2 + \frac{1}{2}\dot{\phi}_2^2 + V(\phi_1, \phi_2)}. \tag{3.8.40}$$

可见 Quintom 可以实现物态方程参数 w 穿过 -1.

第七篇　宇宙的暴胀

大爆炸宇宙模型已经为人们普遍接受, 故被称为标准宇宙模型. 然而大爆炸宇宙模型在宇宙演化的极早期还存在四个疑难问题: 奇点问题、视界问题、平直性问题和磁单极问题. 本章阐述的宇宙暴胀理论可以解决四个问题中的后三个. 剩下的奇点问题是第八篇量子宇宙学讨论的内容.

第 1 章　暴胀宇宙模型概述

1.1　标准 (大爆炸) 宇宙模型的成就和困难

大爆炸宇宙模型成功地解释了自 $t = 10^{-2}$s (轻核形成) 至 $t = 10^{10}$ 年 (现在) 宇宙演化阶段的观测事实. 其中包括元素的起源 (氦丰度测量)、星系光谱的宇宙学红移、3K 微波背景辐射、星系计数、宇宙大尺度的均匀各向同性等. 因此, 大爆炸宇宙模型是普遍被人们所接受的. 与其他宇宙模型相比, 它是最成功的宇宙模型, 所以人们称之为标准宇宙模型.

然而, 大爆炸宇宙模型也有它的困难, 就是在 $t = 0$(大爆炸奇点) 到 $t = 10^{-10}$s 这一极早期演化阶段中的四个问题：奇点问题、视界问题、平直性问题、磁单极问题.

第一个问题是奇点问题. 正如第六篇 3.7 节所论证的, 根据爱因斯坦引力理论和宇宙学原理, 以及哈勃定律和强能量条件 $\rho + 3p \geqslant 0$, 必然导致一个结论：宇宙必然存在一个内禀的过去类空奇点 $(t = 0, R = 0)$. 在奇点处, 温度、能量和物质密度都等于无限大, 这是没有物理意义的, 是物理学家最讨厌的. 这一问题 (宇宙的创生) 我们留在第八篇 (量子宇宙学) 详细讨论.

后面三个问题 (视界问题、平直性问题、磁单极问题) 都可以由宇宙暴胀 (inflation) 的引入而得到解决.

为了说明这三个问题的内容, 我们首先对极早期宇宙作简单的讨论.

我们考虑 $10^{-10}\text{s} > t > t_{\text{p}} \sim 10^{-43}\text{s}$ 这一宇宙演化的极早期, 这时对应的宇宙温度为 $T_{\text{p}} \sim 10^{32}\text{K} > T > 10^{15}\text{K}$, 相应的能标为 $m_{\text{p}} \sim 10^{19}\text{GeV} > E > 10^{2}\text{GeV}$. 这时宇宙处于辐射为主的时期, 与极端相对论粒子的情况相同, 都有

$$p = \frac{\rho}{3}, \quad \rho \sim [R(t)]^{-4}. \tag{1.1.1}$$

由此可得

$$p \sim [R(t)]^{-4}, \quad p[R(t)]^4 = \lambda = \text{const.} \tag{1.1.2}$$

由于 $TR(t) = \text{const.}$ 可知

$$\rho \sim T^4. \tag{1.1.3}$$

考虑到极端相对论粒子的静止质量为零, 由量子统计得到

$$\rho = \frac{\pi^2}{30}N(T)T^4. \tag{1.1.4}$$

式中 $N(T)=N_{\rm b}+\frac{7}{8}N_{\rm f}$, $N_{\rm b}$ 和 $N_{\rm f}$ 分别为玻色子和费米子的手征态数目. 熵密度为

$$s=\frac{4}{3}\frac{\rho}{T}=\frac{2\pi^2}{45}N(T)T^3, \tag{1.1.5}$$

粒子数密度为

$$n=\frac{\zeta(3)}{\pi^2}\left(N_{\rm b}+\frac{3}{4}N_{\rm f}\right)T^3. \tag{1.1.6}$$

式中 $\zeta(3)$ 为 Riemam-Zeta 函数. 由 (2.6.5) 和 (1.1.1) 得到

$$\frac{\dot{R}^2(t)}{R^2(t)}=H^2=\frac{8\pi}{3}\rho-\frac{k}{R^2(t)}\approx\frac{8\pi}{3}\frac{\lambda}{R^4(t)}, \tag{1.1.7}$$

积分得

$$R(t)=\left(\frac{32\pi\lambda}{3}\right)^{1/4}t^{1/2}. \tag{1.1.8}$$

考虑到 (1.1.3), 将 (1.1.4) 代入 (2.6.5), 得到

$$\begin{aligned}&\frac{\dot{T}^2}{T^2}+\varepsilon(T)T^2=\frac{4\pi^3}{45}N(T)T^4,\\&\varepsilon(T)=\frac{k}{R^2(t)T^2}=k\left[\frac{2\pi^2N(T)}{45SR^3(t)}\right]^{2/3}.\end{aligned} \tag{1.1.9}$$

类似于得到 (1.1.8), 由 (1.1.9) 得到

$$T=\left[\frac{90}{32\pi^3N(T)}\right]^{1/4}t^{-1/2}. \tag{1.1.10}$$

下面我们说明标准宇宙模型在宇宙极早期存在的三个问题.

1. 视界问题

我们现在 (图 7-1 中的 O 点) 所接收到的宇宙中过去的信息, 都只能来自我们的**过去光锥**之内. 如图所示, 我们接收到的来自相反方向的两个辐射信号只能发自图中的 M 和 N 两个时空点, 这两点的过去光锥并不相交. 由于信息有一个最大传播速度 (真空光速 c), 所以在大爆炸起源的宇宙内, 在时刻 t, 任意两点 (如二星系) 间的距离大于 $D=2ct$. 这两点在小于 t 的时间内从未发生过因果联系.

$$D=2ct \tag{1.1.11}$$

叫做**视界距离**. 由于视界距离 D 正比于时间 t, 而宇宙半径 R 正比于 $t^{1/2}$, 故在宇宙极早期 ($t\ll 1{\rm s}$) 有 $D<R$. 即视界距离小于宇宙半径. 例如, 当 $t\sim 10^{-39}{\rm s}$ 时有

$$\frac{R}{D}\sim 10^{20}. \tag{1.1.12}$$

这就是说, 当 $t\sim 10^{-39}{\rm s}$ 时, 宇宙中至少存在 10^{20} 个无因果联系的区域.

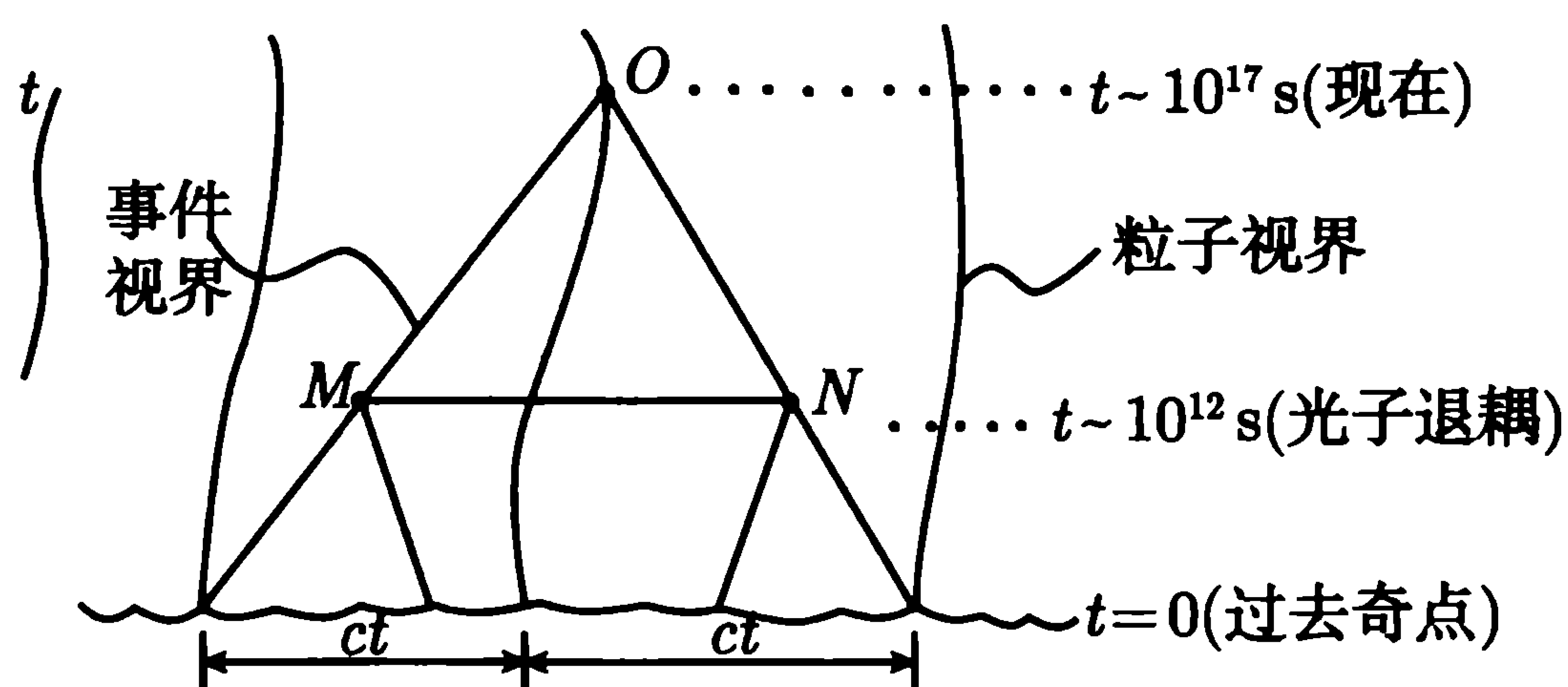


图 7-1

考虑方向相反的两个微波天线, 接收到了发自 $t\sim 10^{12}$s 时的两个辐射源的微波信号, 由于宇宙大尺度的均匀各向同性, 这两个辐射源之间的距离应为视界距离的 90 倍. 这当然是不可能的. 所以, **在宇宙极早期, 宇宙大尺度的均匀各向同性是和视界的存在不相容的.** 这就是大爆炸宇宙模型的第二个困难 —— 视界问题.

2. 平直性问题 (熵疑难)

引入参量 $\Omega=2q_0$, 根据 2.3 节的计算, 有

$$\Omega=\frac{\rho_0}{\rho_c}=\frac{8\pi\rho_0}{3H^2}=\frac{4\pi^3N(T)T^2}{45\varepsilon}. \tag{1.1.13}$$

ρ_0 为现在的宇宙物质密度. 由目前观测资料有

$$0.1<\Omega<4,\ \rho_0\leqslant 10\frac{3H_0^2}{8\pi}. \tag{1.1.14}$$

在极早期, 宇宙物质的熵主要来源于光子和三种中微子. 利用熵守恒, 和总熵

$$S_0=S_0R^3(t_0)=\frac{2\pi^2N(T_0)}{45}R^3(t_0)T_0^3,\ T_0\approx 2.7\text{K},$$

可以得到目前宇宙的总熵

$$S_0\geqslant 10^{90}. \tag{1.1.15}$$

又由 (1.1.13) 可得

$$\frac{\rho-\rho_c}{\rho}=\frac{45}{4\pi^3N(T)T^2}\left[\frac{k}{R^2(t)T^2}\right]. \tag{1.1.16}$$

考虑到 $t\approx t_{\mathrm{p}}$ 时宇宙的物质状态情况, $N(T)\sim 10^2$, 利用式

$$\frac{k}{R^2T^2}=k\left[\frac{2\pi^2}{45}\frac{N(T)}{S}\right]^{2/3}, \tag{1.1.17}$$

可以得到普朗克时期宇宙物质密度 ρ 满足

$$\frac{|\rho-\rho_c|}{\rho}<10^{-58}, \tag{1.1.18}$$

这表明 $\rho\approx\rho_c$, 即宇宙极早期已非常平直. 事实上, 由于有了式 (1.1.15), 才有式 (4.1.18), 即极早期宇宙非常平直取决于现在的宇宙有一极大的熵. 那么, 为什么宇宙在极早期就已经非常平直了呢? 或者说, 为什么现在的宇宙有这么大的熵呢? 大爆炸宇宙模型给不出任何理由. 这就是所谓平直性问题, 也称为熵疑难.

3. 磁单极问题

特霍夫特和玻利雅可夫 ('tHooft-Polyakov) 曾证明, 任何一个单群 [如 $SU(5)$] 自发破缺到 $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ 时一定要出现磁单极 (非阿贝尔磁单极). 可以证明, 磁荷

$$\begin{aligned} &g_{na}=\frac{hc}{e}=2g_a,\\ &m\sim 10^{16}\mathrm{GeV}\sim 10^{-8}g. \end{aligned}$$

式中 g_{na} 和 g_a 分别表示非阿贝尔磁单极和阿贝尔磁单极的磁荷.

磁单极是联结不同希格斯 (Higgs) 场真空平均值的拓扑结 (拓扑孤子). 这表示真空简并或出现畴状真空 (真空泡) 时, 在不同真空泡的交接处要出现磁单极.

每个真空泡 (畴) 的线度 l, 应该不大于因果关联区的长度 D

$$l\leqslant D=2ct. \tag{1.1.19}$$

由此可知, 磁单极密度 n_{m} 应满足

$$n_{\mathrm{m}}\sim\frac{1}{l^3}\geqslant\frac{1}{8c^3t^3}. \tag{1.1.20}$$

现在, $t=t_0$, 代入上式得到

$$\begin{aligned} &\frac{n_{\mathrm{m}}}{n_\gamma}\geqslant 10^{-12},\quad n_\gamma\sim 4\times 10^3\mathrm{cm}^{-3},\\ &n_{\mathrm{m}}\geqslant 4\times 10^{-9}\mathrm{cm}^{-3}\sim\frac{1}{m_{\mathrm{m}}^3}. \end{aligned}$$

于是得到磁单极的质量密度

$$\begin{aligned} &\rho_{\mathrm{m}}=n_{\mathrm{m}}\cdot m_{\mathrm{m}}\geqslant 4\times 10^{-17}g\cdot\mathrm{cm}^{-3},\\ &\frac{\rho_{\mathrm{m}}}{\rho_{\mathrm{c}}}\sim 10^{12}. \end{aligned} \tag{1.1.21}$$

但是实际观测的结果是

$$\frac{n_{\mathrm{m}}}{n_\gamma}<2\times 10^{-28}, \tag{1.1.22}$$

而且

$$0.1<\frac{\rho_0}{\rho_{\mathrm{c}}}<4. \tag{1.1.23}$$

理论与实测不一致, 这就是大爆炸宇宙模型的第四个困难问题 —— 磁单极问题.

1.2 暴胀宇宙模型概述

1. 大统一相变

1980 年, 麻省理工学院的古什 (Alan H.Guth) 提出了一个暴胀宇宙模型: 1982 年, 林德 (Linde) 等又作了改进. 暴胀宇宙模型解决了 1.1 节所讲的大爆炸宇宙模型的三个困难问题. 这一模型和大爆炸模型的区别在于, 它认为宇宙极早期经历了一个非常短暂而又非常迅速的膨胀阶段. 这一暴胀阶段只持续了大约 10^{-30}s. 在这段时间里宇宙增大了 10^{30} 倍. 为什么会出现这样的暴胀呢? 由于暴胀宇宙是对原有的大爆炸宇宙模型的改进, 所以我们还是从大爆炸模型说起.

按大爆炸宇宙模型, 在宇宙的极早期 ($10^{-43} \sim 10^{-35}$s), 宇宙处于超高能状态 ($10^{19} \sim 10^{15}$GeV), 粒子物理学中的三种基本相互作用 (强、电磁、弱) 应统一为一个只含一个耦合常数的基本相互作用, 这就是大统一理论 (GUT). 当能标为 $10^{19} \sim 10^{15}$GeV 时, $SU(5)$ 大统一理论成立; 当能标 $\sim 10^{15}$GeV 时 ($t \sim 10^{-35}$s, $T \sim 10^{28}$K), $SU(5)$ 对称性破缺为 $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$. 至于对称性破缺的原因, 规范场理论认为关键在于真空. 场方程的对称性总是保持的, 真空的对称性破缺 (真空简并, 不唯一, 出现畸状真空) 引起不可观测到的物理规律的对称性破缺.

理论上, 用一个标量场 φ(Higgs 场) 的基态来描述真空. 考虑到真空涨落 (单圈) 和温度效应后, 宇宙的有效势 (希格斯有效势) 如图 7-2 所示.

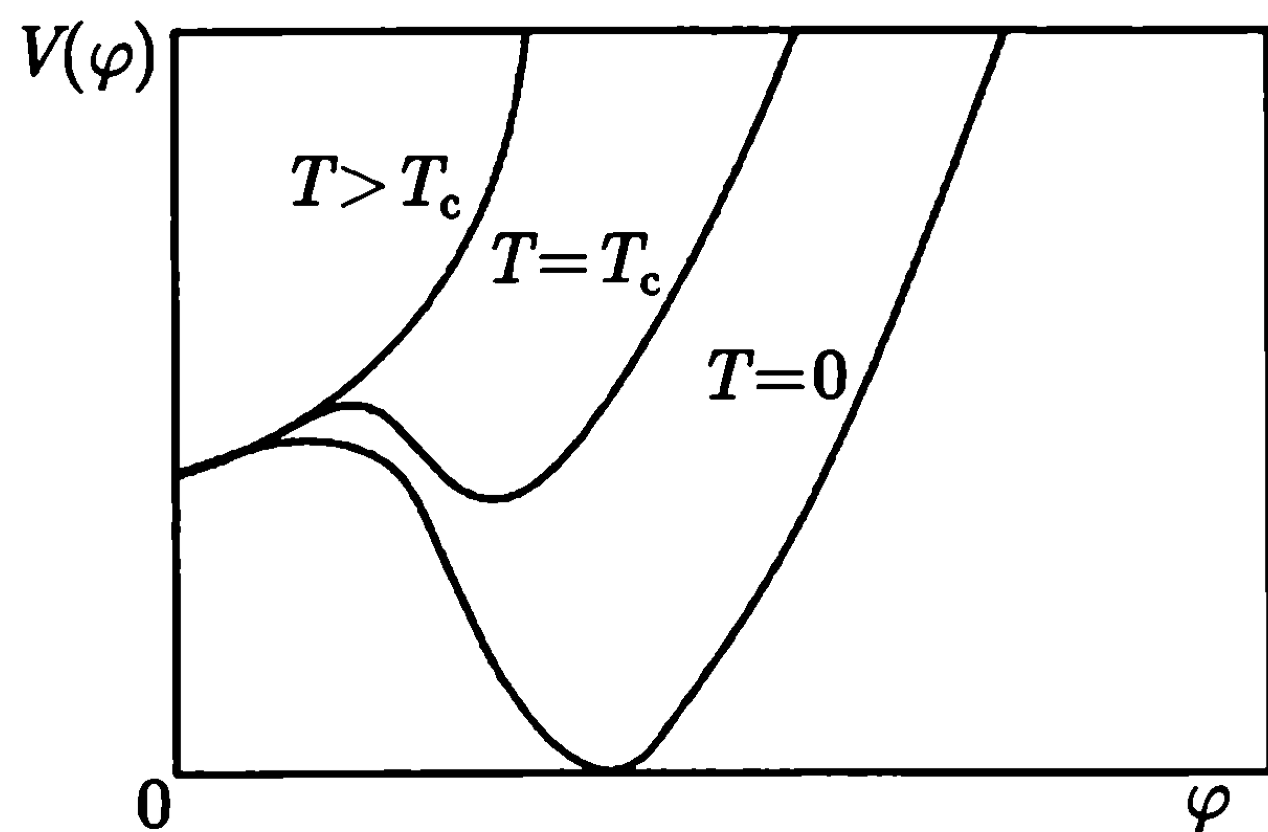


图 7-2

暴胀宇宙模型的主要思想是, 宇宙在大统一时间 ($t \sim 10^{-35}$s) 附近发生的对称性破缺相变是一级相变. 如图 7-2 所示, 在零温 ($T = 0$) 时, $\varphi = \sigma$, $V(\varphi)$ 有一个整体极小, 这是一个对称真空 ——**真真空**. 对于现在, 非零温 ($T \approx 2.7$K), 宇宙这一标量场围绕真真空值有一微小的涨落 ($\leqslant 10^{-45}$GeV). 有效势 V 和宇宙常数 λ 之间存在关系式

$$\lambda = 8\pi V(\sigma). \tag{1.2.1}$$

由于现在 λ 很小, 所以可设 $V(\sigma) = 0$. 另外, $T = 0$ 的有效势还有一个局部极小 $V|_{\varphi=0}$, 这是一个**假真空**.

设发生一级相变的温度为 T_c, 即当 $T > T_c$ 时, $V(\varphi)$ 有一整体极小; 当 $T \to T_c$ 时, 在 $\varphi \neq 0$ 处出现一个极小, 其有效势的值与假真空的相近, 在 $T = T_c$ 时这两

个极小是简并的. 在 $T \ll T_c$ 的情况下, 自发对称破缺 $(\varphi = \sigma)$ 的极小为有效势的整体极小. $SU(5)$ 大统一理论的有效势恰好具有上述性质. 这就是说, 当 $T \gg T_c$ 时, $\varphi = 0$ 为有效势的整体极小; 温度继续降低, 一直到 $T \geqslant T_c$ 之前, 宇宙一直处于 $\varphi = 0$ 的假真空态, 并按大爆炸模型 $(R \sim t^{1/2})$ 演化. 当 $T < T_c$ 时, 对称破缺的真真空态对应的极小 $(\varphi = \sigma)$ 远小于假真空态对应的极小 $(\varphi = 0)$, 真空能量密度远大于辐射能量密度, 于是宇宙处于假真空过冷状态 (亚稳态), 最后因低温破缺态的泡的自发形成而衰变, 借助于量子隧道效应, 贯穿势垒, 宇宙由假真空态跃迁到真真空态, 放出潜能 ρ_0, 实现一级相变. 当 $T_H < T < T_c$(式中 $T_H = H/2\pi k$ 是 Hawking 辐射温度) 时, 可证明真空能密度 ρ_v 远大于辐射能密度 ρ_γ, 宇宙物质密度 $\rho = \rho_v + \rho_\gamma \approx \rho_v = \text{const}$. 此常数值即 $V(0)$, 由大统一理论确定. 略去曲率项, 弗里德曼方程为

$$\frac{\dot{R}}{R} = \left(\frac{8\pi G\rho_v}{3}\right)^{1/2}, \tag{1.2.2}$$

积分得

$$R(t) \sim e^{Ht}, \quad H = \left(\frac{8\pi G\rho_v}{3}\right)^{1/2}, \tag{1.2.3}$$

即当处于亚稳态的假真空时, 宇宙按指数规律暴胀 (过冷的暴胀阶段).

由连续性方程

$$\dot{\rho} = -3(\rho + p)H \tag{1.2.4}$$

代入 $\dot{\rho} \approx \dot{\rho}_v = 0$, 得到

$$p = -\rho \approx -\rho_v. \tag{1.2.5}$$

将上式代入 (2.1.5), 可知 $\ddot{R} > 0$. 正是由于负压强的贡献超过了正能密度的贡献 (引力起了斥力的作用), 使得膨胀速度 $\dot{R}$ 随时间增大. 这和大爆炸模型的情况相反, 那里的 ρ 和 p 都是正的, 引使膨胀速度随时间减小.

2. **慢滚动相**

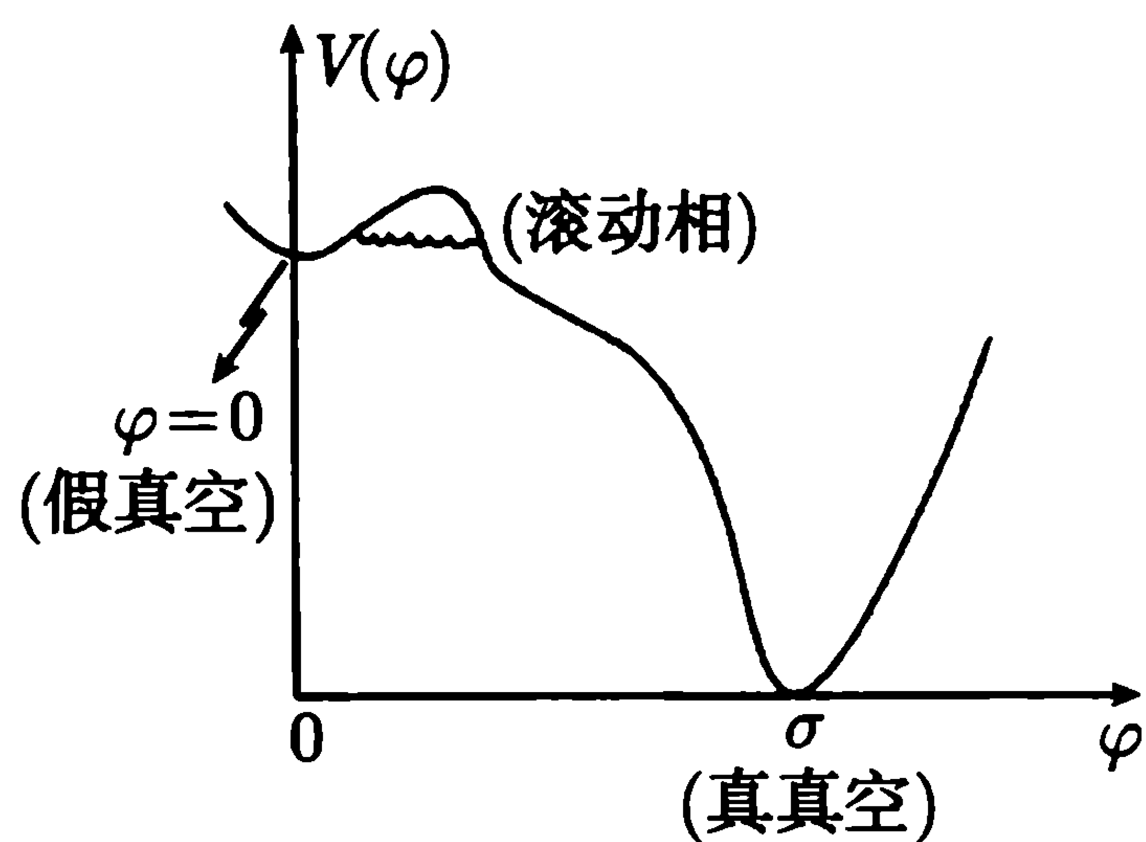


图 7-3

当 $T \approx T_H$ 时, 宇宙由假真空向真真空发生量子跃迁, 继续以指数形式暴胀 (图 7-3). 跃迁 (处于真真空) 的宇宙线度 $\sim 10^{-20}$cm, 经过滚动相阶段 $(\tau \sim 10^{-32}\text{s})$ 后, $R > 10^{28}$cm, 即达到目前可观测的宇宙半径. 这就是说, 只需要要求滚动相时间 $\tau > 10^{-32}$s, 真空泡的半径就大于目前可观测宇宙的半径, 即目前我们的可观测宇宙位于一个真空泡(畴内). 这样, 磁单极问题就得到了解决.

在滚动相后, 希格斯场在对称性破缺的稳定真真空 $\varphi=\sigma$ 处发生振荡, 出现下列转化:

希格斯粒子 → 规范粒子, 重子, 重子数不守恒,γ光子

真空能 → 物质能 (辐射为主)

指数暴胀($R\sim \mathrm{e}^{Ht}$) → 标准膨胀($R\sim t^{1/2}$)

随着真空能转化为物质能, 宇宙被重新加热 (潜热释放), 宇宙温度由 $T_{\min}$ 升至 $T_{\mathrm{c}}=T_{\mathrm{GUT}}$. 以后宇宙以辐射为主, 按标准模型 (大爆炸模型) 演化.

3. 宇宙熵

由前面的讨论可知, 暴胀前和暴胀后 (被重新加热) 的温度差不多都接近于 T_{c}, 因此暴胀前后宇宙的熵密度之间存在关系

$$\mathfrak{S}_1\approx\mathfrak{S}_2. \tag{1.2.6}$$

由于 $R_2\approx ZR_1$, 总熵 $\mathcal{S}=R^3\mathfrak{S}$, 所以有

$$\mathcal{S}_2=Z^3\mathcal{S}_1. \tag{1.2.7}$$

这样, 如果假设暴胀之前总熵 $\mathcal{S}_1\sim 1$, 那么只要 $Z\geqslant 10^{28}$(实际上没有上限), 就可知现在宇宙总熵 $\mathcal{S}_0$ 满足

$$\mathcal{S}_0\approx\mathcal{S}_2\geqslant 10^{90}. \tag{1.2.8}$$

这就成功地解释了现在观测到的宇宙总熵比 10^{90} 还大这一事实. 也就是说, 宇宙总熵几乎全部来源于由假真空态向真真空态跃迁直到重新加热的非绝热过程.

设 $t=10^{-39}$s(宇宙极早期), 可得

$$\left(\frac{D}{R_t}\right)^3=10^{-83}Z^3\sim 10^2, \tag{1.2.9}$$

即视界距离大于宇宙半径, 成功地解决了视界问题; 整个宇宙内各部分之间都可以存在因果联系.

设 $t=t_p=10^{-43}$s(暴胀前), 可得

$$\frac{|\rho-\rho_{\mathrm{c}}|}{\rho}<10^{-58}Z^2\sim 10^{-2}. \tag{1.2.10}$$

可见宇宙在极早期 ($t=t_{\mathrm{p}}$) 并不平直, 只是经过暴胀阶段 (熵骤增) 后宇宙才变得很平直, 于是平直性困难得到解决.

第 2 章　宇宙的暴胀

第 10 章我们讨论了暴胀宇宙模型的整体图像, 本章将对这一图像的一些细节和一些相关问题做一补充讨论.

2.1　'tHooft-Polyakov 磁单极

设背景时空为 $(1+D)$ 维 Minkowski 时空

$$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}x^{02}-\eta_{ik}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^k,\quad i,k=1,2,\cdots,D. \tag{2.1.1}$$

当 $D=3$ 时, 对于 Higgs 场 (标量场)$\varphi_a(x)$ 和 Yang-Mills 场 $A^\mu_a(x)$ 相互作用, 拉格朗日具有形式

$$L=-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}_aF_{a\mu\nu}+\frac{1}{2}\varphi_{a;\mu}\varphi^{;\mu}_a-\frac{\lambda}{4}\left(\varphi_a\varphi_a-\frac{m^2}{\lambda}\right)^2, \tag{2.1.2}$$

式中

$$F_{a\mu\nu}=A_{\mu a,\nu}-A_{\nu a,\mu}+e\varepsilon_{abc}A_{\mu b}A_{\nu c},\quad \varphi_{a;\mu}=\varphi_{a,\mu}+e\varepsilon_{abc}A_{\mu b}\varphi_c.$$

由于 $m^2>0$, 所以 $SU(2)$ 或 $SO(3)$ 的对称性是自发破缺的. 与上式对应的场方程为

$$\begin{aligned}&F^{;\nu}_{\mu\nu a}=e\varepsilon_{abc}(F_{\mu\nu b}A^\nu_c-\varphi_{b;\mu}\varphi_c),\\&\varphi^{;\mu}_{a;\mu}=e\varepsilon_{abc}\varphi_{b;\mu}A^\mu_c+m^2\varphi_a-\lambda\varphi_a\varphi^2.\end{aligned} \tag{2.1.3}$$

方程 (2.1.3) 的拓扑孤子解, 称为'tHooft-Polyakov 磁单极解, 此解可写为球对称形式

$$\begin{aligned}&e\varphi_a=g(r)\frac{r_a}{r^2},\\&A^a_0=0,\quad eA^a_i=\varepsilon_{aik}\frac{r_k}{r^2}[1-h(r)].\end{aligned} \tag{2.1.4}$$

将 (2.1.4) 代入场方程 (2.1.3), 得到微分方程

$$\begin{aligned}&r^2g_{,rr}=g(r)[2h^2(r)-m^2r^2+\eta g^2(r)/e^2],\\&r^2h_{,rr}=h(r)[h^2(r)-1+g^2(r)].\end{aligned} \tag{2.1.5}$$

(2.1.5) 的严格解至今尚未找到. Actor(1979) 经分析指出, 当 $r \to \infty$ 时, 此方程组的解应满足边界条件

$$h(r) \to A(m,\lambda,e)r\mathrm{e}^{-\beta r}, \quad \beta = \left(\frac{em}{\sqrt{\lambda}}\right)^{1/2}, \tag{2.1.6a}$$

$$g(r) \to \left(\frac{me}{\sqrt{\lambda}}\right) r + D(m,\lambda,e)\mathrm{e}^{-\sqrt{2}mr}, \tag{2.1.7a}$$

$$A_i^a \to \varepsilon_{\mathrm{ain}} \frac{1}{e}\frac{r_n}{r^2}, \tag{2.1.8a}$$

$$\varphi_a \to \frac{r_a}{r}\left[\left(\frac{m}{\sqrt{\lambda}}\right) + \left(\frac{D}{e}\right)\frac{1}{r}\mathrm{e}^{-\sqrt{2}mr}\right]. \tag{2.1.9a}$$

当 $r \to 0$ 时有

$$h(r) \to 1 + eB(m,\lambda,e)r^2, \tag{2.1.6b}$$

$$g(r) \to eC(m,\lambda,e)r^2, \tag{2.1.7b}$$

$$A_i^a \to -\varepsilon_{\mathrm{ain}} r_n B(m,\lambda,e), \tag{2.1.8b}$$

$$\varphi_a \to C(m,\lambda,e)r_a. \tag{2.1.9b}$$

式中 A, B, C, D 均为常数.

Arafune(1975) 指出, 与规范势 A_i^a 的无质量分量 G_μ 对应的 Maxwell 张量为

$$F_{\mu\nu} = \hat{\varphi}_a F_{a\mu\nu} = G_{\nu,\mu} - G_{\mu,\nu} - \frac{1}{e}\varepsilon_{abc}\hat{\varphi}_a\hat{\varphi}_{b,\mu}\hat{\varphi}_{c,\nu}. \tag{2.1.10}$$

式中

$$G_\mu = \hat{\varphi}_a A_\mu^a, \quad \hat{\varphi}_a = \frac{\varphi_a}{\varphi}, \quad \varphi = (\varphi_a\varphi_a)^{1/2}. \tag{2.1.11}$$

由 (2.1.4) 得到

$$G_\mu = 0, \quad \hat{\varphi}_a = \hat{r}_a, \tag{2.1.12}$$

代入 (2.1.10), 得到 Maxwell 张量的各分量和磁场强度

$$F_{0\mu} = 0, \tag{2.1.13}$$

$$F_{ij} = -\frac{1}{e}\varepsilon_{abc}\hat{r}_a\hat{r}_{b,i}\hat{r}_{c,j}, \tag{2.1.14}$$

而

$$\left(\frac{x_b}{r}\right)_{,i} = \frac{1}{r}\delta_{bi} - \frac{2}{r^2}x_i x_b, \ \left(\frac{x_c}{r}\right)_{,j} = \frac{1}{r}\delta_{cj} - \frac{2}{r^2}x_j x_c,$$

所以

$$F_{ij} = -\frac{1}{e}\varepsilon_{ijk}\frac{r_k}{r^3}. \tag{2.1.15}$$

由 (2.1.14)~(2.1.15) 得到

$$B_i = \frac{g}{r^2}\hat{r}_i. \tag{2.1.16}$$

这正是磁荷 $g = \frac{1}{e}$ 的静止磁单极在 r 处产生的磁场强度. 与狄拉克磁单极的磁荷

$$g_{\mathrm{D}} = \frac{1}{e}\frac{n}{2} \tag{2.1.17}$$

比较可知, 'tHooft-Polyakov 磁单极的最小磁荷 g 为 Dirac 磁单极磁荷的 2 倍.

引入磁流 J_μ

$$J_\mu = \tilde{F}^{\mu\nu}_{,\nu}. \tag{2.1.18}$$

式中 $\tilde{F}^{\mu\nu}$ 为 $F^{\mu\nu}$ 的对偶张量, 则显然有

$$J^{\mu}_{,\mu} = 0, \tag{2.1.19}$$

即存在积分守恒量 (磁荷)

$$g_{\mathrm{m}} = \frac{1}{e}\frac{\sqrt{\oint r \cdot \mathrm{d}s}}{r^3} = \frac{1}{e} \cdot 4\pi n. \tag{2.1.20}$$

式中 n 为积分路径环绕 $r = 0$ 的"圈数". 这一守恒量子数叫做数或拓扑荷.

假设 $n \neq 0$ 的闭合面连续变小, 如果面内一直没有拓扑奇点则闭合面将缩为一点, 这显然是不可能的. 可见'tHooft-Polyakov 磁单极位于拓扑奇点或拓扑缺陷处, 实际上这就是不同 $SU(2)$[或 $SO(3)$] 真空之间的拓扑结.

2.2 $SU(5)$ 大统一理论和有效势

20 世纪六七十年代, 理论物理学家提出了一类统一场理论, 把弱相互作用, 电磁相互作用和强相互作用纳入了一个统一的理论框架, 这类理论称为大统一理论 (GUT).

按照规范场理论, 一切现有的相互作用都是规范相互作用, 即用一个单群来描述一个场论的内部对称性, 它们在规范变换下具有不变性. 如果群参数与时空有关 (把规范变换局域化), 要使场论保持原有对称性, 就必须引入与群的生成元个数相同的规范场, 这些规范场就是传递对应相互作用的中间玻色子场. 在拉氏量中规范场不能含质量项 (为了保持规范不变性), 所以在这类理论中还必须引入一类 Higgs 场, 以使规范对称性破缺, 从而与我们观察到的物理现象相符.

与电磁相互作用, 弱相互作用和强相互作用相对应的对称群分别是 $U(1), SU(2)$ 和 $SU(3)$. 弱、电磁统一理论是通过规范群

$$SU(2) \times U(1) \tag{2.2.1}$$

实现的. 20 世纪 60 年代末, 人们把强相互作用纳入了 $SU(3)$ 规范场理论, 通过规范群

$$SU(3) \times SU(2) \times U(1) \tag{2.2.2}$$

建立了粒子物理中的标准模型理论.

20 世纪 70 年代, Georgi 等提出将单群 $SU(5)$ 作为规范群的大统一理论. 由于 $SU(5)$ 群的秩是 4, 恰好等于群 (2.2.2) 的秩, 所以可将 (2.2.2) 式的规范群嵌入 $SU(5)$ 中; 或者说在一定能量标度时, $SU(5)$ 的对称性可以破缺到 (2.2.2) 的对称性.

在规范场论中, 由于对称性自发破缺所出现的不对称真空的势能要低于对称真空的势能, 这时将导致相变. 下面将指出, 这是一种一级相变, 在相变过程中将放出潜热. 为了讨论在早期宇宙中的应用, 我们首先引入有效势的概念.

以标量场为例, 生成泛函为

$$Z(J) = \int \mathrm{D}[\varphi]\mathrm{e}^{\mathrm{i}s}, \tag{2.2.3}$$

$$s = s(\varphi, J) = \int \mathrm{d}^4x[L(\varphi) + J(x)\varphi(x)].$$

由 n 点格林函数

$$\begin{aligned} G^{(n)}(1,2,\cdots,n) &= \frac{1}{\mathrm{i}^n}\frac{\delta}{\delta J_1}\cdots\frac{\delta}{\delta J_n}Z(J)|_{J=0} \\ &= \langle 0|T\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)|0\rangle \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

可知

$$Z(J) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{i})^n}{n!}\int \mathrm{d}^4x_1\cdots\mathrm{d}^4x_n J(x_1)\cdots J(x_n)G^n(x_1\cdots x_n). \tag{2.2.5}$$

令 $Z(J) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}w(J)}$, 则 $W(J)$ 就是连通格林函数 $G_{\mathrm{c}}^{(n)}$ 的生成泛函, 即

$$G_{\mathrm{c}}^{(n)} = (-\mathrm{i})^{n-1}\frac{\delta^n W(J)}{\delta Jx_1\cdots\delta Jx_n}|_{J=0}. \tag{2.2.6}$$

故有

$$\mathrm{i}W(J) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{i}^n}{n!}\int \mathrm{d}^4x_1\mathrm{d}^4x_2\cdots\mathrm{d}^4x_n J(x_1)J(x_2)\cdots J(x_n)G_{\mathrm{c}}^{(n)}(x_1\cdots x_n). \tag{2.2.7}$$

令

$$\bar{\varphi}(x,J) = \frac{\delta}{\delta J(x)}W(J), \tag{2.2.8}$$

可以证明

$$\varGamma(\bar{\varphi}) = W(J) - \int \mathrm{d}^4xJ(x)\bar{\varphi}(x), \tag{2.2.9}$$

$$\bar{\varphi}(x,J)=\frac{\langle 0|\varphi|0\rangle^J}{\langle 0|0\rangle^J},$$
$$\frac{\delta\Gamma(\varphi)}{\delta\bar{\varphi}(x)}=-J(x). \tag{2.2.10}$$

由 (2.2.10) 可知, $\Gamma(\varphi)$ 正是考虑到所有量子改正后的有效作用量.

我们定义有效势 $V_{\rm eff}$: 当 $\bar{\varphi}=\text{const}$ 时

$$\Gamma(\bar{\varphi})=\int \mathrm{d}^4x[-V_{\rm eff}(\varphi)]. \tag{2.2.11}$$

已知 $\Gamma(\bar{\varphi})=\int \mathrm{d}^2xL_{\rm eff}$, 故当 $\bar{\varphi}=\text{const}$ 时有

$$V_{\rm eff}=-\mathscr{L}_{\rm eff}.$$

例如, 在 $\lambda\varphi^4$ 场论中

$$L=\frac{1}{2}(\varphi^{,\mu}\varphi_{,\mu}+m^2\varphi^2)-\frac{1}{4}\lambda\varphi^4,$$
$$V_{\rm eff}=-\mathscr{L}_0-\mathscr{L}_1=-\frac{1}{2}m^2\bar{\varphi}^2+\frac{1}{4}\lambda\bar{\varphi}^4+V(\bar{\varphi}).$$

在 $SU(5)$ 大统一理论中, Higgs 场有 24 个分量, 拉氏量为

$$\mathscr{L}=(\bar{\Psi}_{\rm R})_a\mathrm{i}\gamma^\mu(D_\mu)_{aa'}(\Psi_{\rm R})_{a'}+(\bar{\Psi}_{\rm L})_{ab}\mathrm{i}\gamma^\mu(D_\mu)_{ab,a'b'}(\Psi_{\rm L})_{a'b'}. \tag{2.2.12}$$

式中

$$\Psi_{\rm R}=\begin{pmatrix} d_1\\ d_2\\ d_3\\ \mathrm{e}^{\rm c}\\ -\nu_{\rm e}^{\rm c}\end{pmatrix}_{\rm R}, \text{上标 c 表示电荷共轭,}$$

$$\Psi_{\rm L}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & u_3^{\rm c} & -u_2^{\rm c} & u_1 & d_1\\ -u_3^{\rm c} & 0 & u_1^{\rm c} & u_2 & d_2\\ u_2^{\rm c} & -u_1^{\rm c} & 0 & u_3 & d_3\\ -u_1 & u_2 & -u_3 & 0 & \mathrm{e}^{\rm c}\\ -d_1 & -d_2 & -d_3 & -\mathrm{e}^{\rm c} & 0\end{pmatrix}_{\rm L}$$

分别是 $SU(5)$ 的 [5*] 维和 [10] 维表示, 一个代 (generation) 中的 15 个夸克和轻子就可以填充在上述表示中. (2.2.12) 中的 D_μ 为

$$D_\mu=\partial\mu+\mathrm{i}gA_{\mu,k}T_k,\quad k=1,2,\cdots,24,$$

T_k 即 24 个生成元, 在拉氏量的第一项中采用 5 维表示 $(T_k)_{ab}$, 在第二项中采用 10 维表示 $(T_k)_{ab,a'b'}$. $A_{\mu,k}$ 即 24 个规范场, 其中有 12 个 $A_\mu,W,Z^0,g^i(i=$

$1,2,\cdots,8)$; 12 个 $x_a(4/3),\bar{x}_a(4/3),Y_a(1/3),\bar{Y}_a(1/3)$, $a=1,2,3$ 是色指标. g 为大统一耦合常数 $g=\sqrt{4\pi/45}$. c 表示电荷共轭态.

按照 Coleman-Weinberg 模式, 引入把 $SU(5)$ 破缺到 $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ 的 Higgs 场

$$V_{\text{class}}=\frac{\lambda}{4!}\varphi^4, \tag{2.2.13}$$

则有效势可写为

$$V_{\text{eff}}=\frac{\lambda}{4!}\varphi^4+B\varphi^4\left[\ln\frac{\varphi^2}{\sigma^2}-\frac{25}{6}\right].$$

由 $\left.\frac{\mathrm{d}V_{\text{eff}}}{\mathrm{d}\varphi}\right|_{\varphi=\sigma}=0$ 确定 $\lambda=88B$, 代入上式得

$$V_{\text{eff}}=B\varphi^4\left(\ln\frac{\varphi^2}{\sigma}-\frac{1}{2}\right). \tag{2.2.14}$$

上式就是采用 C-W 势 [24] 时, 平直时空零温 $SU(5)$ 大统一理论的单圈有效势 [25]. 当 $\bar{\varphi}\beta\ll 1$ 时 $\left(\beta=\frac{1}{kT}\right)$, 有限温度下 $SU(5)$ 的单圈有效势可写为 (Colemen-Winberg)

$$V_{\text{eff}}^{(1)\beta}(\bar{\varphi})=B\bar{\varphi}^4\left(\ln\frac{\bar{\varphi}^2}{\sigma^2}-\frac{1}{2}\right)+\frac{75}{16\beta^2}g^2\bar{\varphi}^2-\frac{\pi^2}{15\beta^4}. \tag{2.2.15}$$

一般可忽略 β^{-4} 项而仅保留 β^{-2} 项, 这相当于在温度改正项中出现一个依赖于温度的改正项

$$\frac{75}{16\beta^2}g^2\bar{\varphi}^2=\frac{75}{16}k^2T^2g^2\bar{\varphi}^2.$$

这一项的作用是把零温单圈有效势中 $\bar{\varphi}=0$ 处的极大变为极小. 当 $T>T_{\rm c}$ 时, 这是一个整体极小 (真真空), 当 $T\ll T_{\rm c}$ 时, 它仍为局部极小, 成为一个亚稳态 (假真空).

2.3 由假真空向真真空的跃迁

由上节的讨论可知, 当温度 $T>T_{\rm c}$ 时, 有效势有一个整体极小, 即对应于一个对称的和稳定的基态或真空. 当温度 T 降至 $T\approx T_{\rm c}$ 时, 上述真空仍然存在, 但不再稳定, 称为假真空. 这时, 处于“过冷”状态的宇宙以指数形式膨胀, 即暴胀. 但是由于量子涨落 (或因量子隧道效应, 热涨落效应), 宇宙将由假真空向真真空跃迁, 此后即发生一级相变. 我们将计算单位时间的跃迁几率 Γ.

一个不稳定的波幅可表示为

$$\Psi(t)=\Psi(0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\varepsilon}{\hbar}t},$$

$$E = \alpha + \mathrm{i}\beta; \tag{2.3.1}$$

$$|\Psi(t)|^2 = |\Psi(0)|^2 \mathrm{e}^{-\Gamma t},$$

衰变几率为

$$\Gamma = \frac{2}{\hbar}|\mathrm{Im}E|, \tag{2.3.2}$$

即衰变几率由假真空能量的虚部给出. 设初态为 $|\varphi_1\rangle$, 末态为 $|\varphi_2\rangle$, 则有

$$\begin{aligned}\langle\varphi_2|\mathrm{e}^{-HT/\hbar}|\varphi_1\rangle &= \sum_{n,m}\langle\varphi_2|n\rangle\langle n|\mathrm{e}^{-HT/\hbar}|m\rangle\langle m|\varphi_1\rangle \\ &= \sum_n \mathrm{e}^{-E_nT/2}\langle\varphi_2|n\rangle\langle n|\varphi_1\rangle.\end{aligned}$$

令此时的 $|\varphi_1\rangle = |0\rangle$, 表示假真空, 则有

$$E_0 = -\hbar\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\ln\langle 0|\mathrm{e}^{-HT/\hbar}|0\rangle, \tag{2.3.3}$$

此即假真空的能量.

由路径积分表述

$$\begin{aligned}\langle\varphi_2|\mathrm{e}^{-HT/\hbar}|\varphi_1\rangle &= N\int \mathrm{D}(\varphi)\exp[-S_E(\varphi)/\hbar] \\ &= \exp[-S_{\mathrm{Eeff}}/\hbar] = \exp[-S_{\mathrm{Eclass}}/\hbar]\cdot\exp[-S_{\mathrm{Eone-loop}}].\end{aligned}$$

对于欧氏时空标量场的运动方程

$$\varphi_{;\mu}^{;\mu} = V'(\bar{\varphi}). \tag{2.3.4}$$

可以证明

$$\exp(-S_{\mathrm{Eone-loop}}/\hbar) = \left(\prod_n \lambda_n\right)^{-1/2}, \tag{2.3.5}$$

从而有

$$\langle\varphi_2|\exp(-HT/\hbar)|\varphi_1\rangle = \exp[-S_{\mathrm{E}}(\varphi)/\hbar]\left[\prod_n \lambda_n\right]^{-1/2} \tag{2.3.6}$$

式中 λ_n 为本征值

$$A\varphi_n = -\partial_\mu\partial_\mu\varphi_n + U''(\varphi_n) = \lambda_n\varphi_n.$$

在 A 的自身表象中有

$$A = \begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & & & \\ & \lambda_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^{-1} \end{pmatrix},$$

所以

$$\left(\prod_n \lambda_n\right)^{-1/2} = (\det A)^{-1/2} = \{\det[-\partial_\mu\partial_\mu + U'']\}^{-1/2} \tag{2.3.7}$$

实际上, 若设 $\bar{\varphi}$ 为方程 (2.3.4) 的解 (瞬子解), 则可在此解附近把 $S_{\mathrm{E}}(\varphi)$ 展开

$$\begin{aligned} S_{\mathrm{E}}(\varphi) =& S_{\mathrm{E}}(\bar{\varphi}) + \int \mathrm{d}^4x \frac{\delta S_{\mathrm{E}}(\bar{\varphi})}{\delta\bar{\varphi}(x)}[\varphi(x) - \bar{\varphi}(x)] \\ &+ \int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y \frac{\delta^2 S_{\mathrm{E}}(\bar{\varphi})}{\delta\bar{\varphi}(x)\delta\bar{\varphi}(y)}[\varphi(x) - \bar{\varphi}(x)]\cdot[\varphi(y) - \bar{\varphi}(y)] + \cdots. \end{aligned}$$

注意到

$$\frac{\delta S_{\mathrm{E}}}{\delta\varphi} = -\Box\varphi + U' = 0,$$

$$\frac{\delta^2 S_{\mathrm{E}}}{\delta\varphi(x)\delta\varphi(y)} = \{-\delta(x-y)\partial_\mu\partial_\mu - \bar{\varphi}(x)(-\partial_\mu\partial_\mu + U'')\},$$

得到

$$S_{\mathrm{E}}(\varphi) = S_{\mathrm{E}}(\bar{\varphi}) + \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x[\varphi(x) - \bar{\varphi}(x)](-\partial_\mu\partial_\mu + U'')[\varphi(x) - \bar{\varphi}(x)] + \cdots.$$

再采用式 $\int \mathrm{D}(\varphi)\exp\left[-\frac{1}{2}\varphi^+ A\varphi\right] = (\det A)^{-1/2}$, 便得到

$$\begin{aligned} &N\int \mathrm{D}(\varphi)\exp[-S_{\mathrm{Eclass}}/\hbar]\cdot\exp\left[-\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x(\varphi - \bar{\varphi})A(\varphi - \bar{\varphi})\right] \\ &= N\exp[-S_{\mathrm{Eclass}}/\hbar]\int \mathrm{D}(\varphi)\exp\left[-\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x(\varphi - \bar{\varphi})A(\varphi - \bar{\varphi})\right] \\ &= N(\det A)^{-1/2}\exp[-S_{\mathrm{Eclass}}/\hbar]. \end{aligned}$$

将 (2.3.7) 代入 (2.3.6) 得到

$$\langle\varphi_2/\exp(-HT/\hbar)|\varphi_1\rangle = K\exp(-B/\hbar). \tag{2.3.8}$$

式中 $K = N\{\det[-\partial_\mu\partial_\mu + U''(\varphi)]\}^{-1/2}, B = S_{\mathrm{E}}(\varphi)$ 叫衰变系数.

当 $T\to\infty$ 时, 可以证明

$$N\{\det[-\partial_\mu\partial_\mu + U''(\varphi)]\}^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2}\mathrm{e}^{-\omega T/2}. \tag{2.3.9}$$

式中 $\omega^2 = U''(\varphi)$. 由此可得

$$\langle\varphi_2|\exp(-HT/\hbar)|\varphi_1\rangle = \left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} \mathrm{e}^{-\omega T/2}\mathrm{e}^{-B/\hbar}. \tag{2.3.10}$$

设在 $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ 和体积 V 内存在 n 个瞬子, 每个瞬子的时空体元都不重叠, 这样便可作稀疏气体近似. 注意到每一个瞬子解的贡献由 (2.3.10) 式给出, 可以证明, 当 $T\to\infty, V\to\infty, n\to\infty$ 时有

$$\langle\varphi_2|\exp(-HT/\hbar)|\varphi_1\rangle = \left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} \exp(-\omega TV/2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(TV)^n}{n!}\exp(-nB/\hbar)\cdot K^n, \tag{2.3.11}$$

又由 (2.3.3) 得到 (当 $T\to\infty$ 时)

$$E_0 = -\frac{\hbar}{T}\left[\frac{1}{2}\ln\frac{\omega}{\pi\hbar} - VT\left(\frac{\omega}{2} - K\mathrm{e}^{-B/\hbar}\right)\right] = V\left(\frac{\hbar\omega}{2} - \hbar K\mathrm{e}^{-B/\hbar}\right).$$

再采用式

$$\mathrm{Im}K = \frac{1}{2}\left\{\frac{\det[-\partial_\mu\partial_\mu + U''(\varphi_+)]}{\det^\circ[-\partial_\mu\partial_\mu + U''(\varphi)]}\right\}^{1/2} \tag{2.3.12}$$

式中 $\det^\circ$ 表示去掉零本征值后的行列式, φ_+ 表示假真空, φ 表示经典瞬子解, U 是有效势, 最后得到单位体积、单位时间的衰变几率.

$$\frac{\Gamma}{V} \doteq \mathrm{e}^{-B/\hbar}\left\{\frac{\det[\partial_\mu\partial_\mu + U''(\varphi^+)]}{\det^\circ[\partial_\mu\partial_\mu + U''(\varphi)]}\right\}^{1/2} \tag{2.3.13}$$

下面讨论量子隧道效应后 φ 场的演化.

若欧氏时空中的瞬子方程 (经典运动方程)

$$\partial_\mu\partial_\mu\varphi = U'(\varphi) \tag{2.3.14}$$

存在一个 $O(4)$ 不变解, 则此解的作用量 S_E 要小于非 $O(4)$ 不变解的作用量. 类似地, 若闵氏时空中的运动方程

$$\partial_\mu\partial_\mu\varphi = -U'(\varphi) \tag{2.3.15}$$

存在一个 $O(3,1)$ 不变解, 则此解的作用量要小于非 $O(3,1)$ 不变解的作用量. 与 (2.3.14) 对应的解称为瞬子解 (或反弹解), 与 (2.3.15) 对应的解称为泡解. 我们只需考虑 $O(4)$ 不变瞬子解和 $O(3,1)$ 不变泡解.

四维欧氏空间度规可写为

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\xi^2 + \rho^2(\xi)\mathrm{d}\Omega_3^2,$$

$$\mathrm{d}\Omega_3^2 = \mathrm{d}x^2 + f^2(x)\mathrm{d}\Omega_2^2. \tag{2.3.16}$$

式中 $\rho^2(\xi)=t^2-r^2$ 表示 4 维空间间隔. 采用 $O(4)$ 不变瞬子拉氏量, 有

$$\begin{aligned}S_{\mathrm{E}}&=\int \mathrm{d}^4x\sqrt{g_E}[g_{\mathrm{E}}^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\varphi+U(\varphi)+(2k)^{-1}R]\\&=2\pi^2\int\mathrm{d}\xi\left[\rho^3\left(\frac{1}{2}\varphi'^2+U\right)+\frac{3}{k}(\rho^2\rho''+\rho\rho'^2-\rho)\right],\end{aligned}\tag{2.3.17}$$

由此得瞬子方程

$$\varphi''+\frac{3}{\rho}\rho'\varphi'=\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\varphi},\ \varphi'=\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\xi}.\tag{2.3.18}$$

欧氏引力场方程具有形式

$$\rho'^2-1=\frac{1}{3}k\rho^2\left(\frac{1}{2}\varphi'^2-U\right).$$

设我们处在真真空泡中, 真空能密度 (宇宙因子项) 为零, 则有

$$U(\varphi_-)=0,\quad U(\varphi_+)=\varepsilon.$$

式中 φ_- 为真真空泡, φ_+ 为假真空背景. 当真真空泡形成时, 设有 $\bar\rho\gg\varepsilon$(薄壁近似), 则由瞬子方程可以得到 [27].

$$B=-\frac{1}{2}\pi^2\bar\rho^4\varepsilon+2\pi^2\bar\rho s_1.$$

衰变系数 B 取极值时泡形式, 由 $\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}\bar\rho}=0$ 得到泡的半径

$$\begin{aligned}\bar\rho&=\frac{12s_1}{4\varepsilon+3ks_1^2}=\frac{\bar\rho_0}{1+(\bar\rho_0/2\lambda)^2}\approx\varepsilon^{-12}\sigma,\\B&=\frac{B_0}{[1+(\bar\rho_0/2\lambda)^2]^2}.\end{aligned}$$

式中 B_0 是无引力时的衰变系数, $\bar\rho_0=3s_1/\varepsilon$ 是无引力时泡的半径,

$$\begin{aligned}&s_1=\int_{\varphi_+.}^{\varphi_-}\mathrm{d}\varphi\{2[U_0(\varphi)-U_0(\varphi_+)]\}^{1/2}\approx\sigma(U_{0\max})^{1/2},\\&U_0(\varphi_-)=U_0(\varphi_+),\\&U(\varphi)=U_0(\varphi)-\frac{\varepsilon}{\sigma}(\varphi-\sigma),\\&\lambda=\left(\frac{k\varepsilon}{3}\right)^{-1/2},\quad k=8\pi G.\end{aligned}$$

$\rho=0$ 在欧氏空间中对应于 $\varphi=\varphi^*$, 即表示真空泡的边界 (泡壁), 在闵氏空间中 $\rho=0$ 对应于 $t\pm r=0$, 即表示泡壁沿光锥运动. 在所讨论的情况下, 引力的出现使真空泡出现的几率增大, 使泡半径减小.

以上的讨论是半经典的. 结果表明, 真真空泡由隧道效应产生, 并以光速膨胀. 要引入量子修正, 只需在 (2.3.18) 中将经典势 U 换成有效势 V_{eff}, 产生的效应是使振幅衰减得快一些.

2.4 林德等的工作

古什 (1981) 认为宇宙由假真空向真真空的过渡只能通过量子隧道效应. 为了解决磁单极问题、平直性问题和视界问题, 就要求泡的产生率较低, 以使在泡与泡发生碰撞之前, 泡就已经足够大. 但是泡的产生率如果这样低, 就会导致一个不合理的结果 —— 使得热化过程延迟到重子和核合成时期. 古什还认为, 宇宙尺度按指数增长只出现在泡形成之前. 真真空泡形成之后, 泡壁以光速膨胀, 真空能转化为泡壁的动能. 泡与泡之间的碰撞是热化的唯一机制. 这一观点也遇到了困难. 因为宇宙在假真空阶段按指数增长而真真空泡不按指数增长, 这样必然存在小于可观测宇宙的泡. 在可观测宇宙内泡的碰撞将破坏宇宙物质分布的均匀性, 而且会使 'tHooft 磁单极大量出现, 与观测结果不符.

林德 1982 年对古什的模型做了修改, 他认为在泡出现之后的一段时间 $\tau \approx T_b^{-1}$ 内, 宇宙仍按指数规律膨胀. 下面我们介绍林德的工作.

按照林德理论的要求, 需要一个与希格斯势形状不同的有效势. 科尔曼–温伯格 (Coleman -Winberg) 势基本上符合这一要求, 有效势曲线如图 7-4 所示.

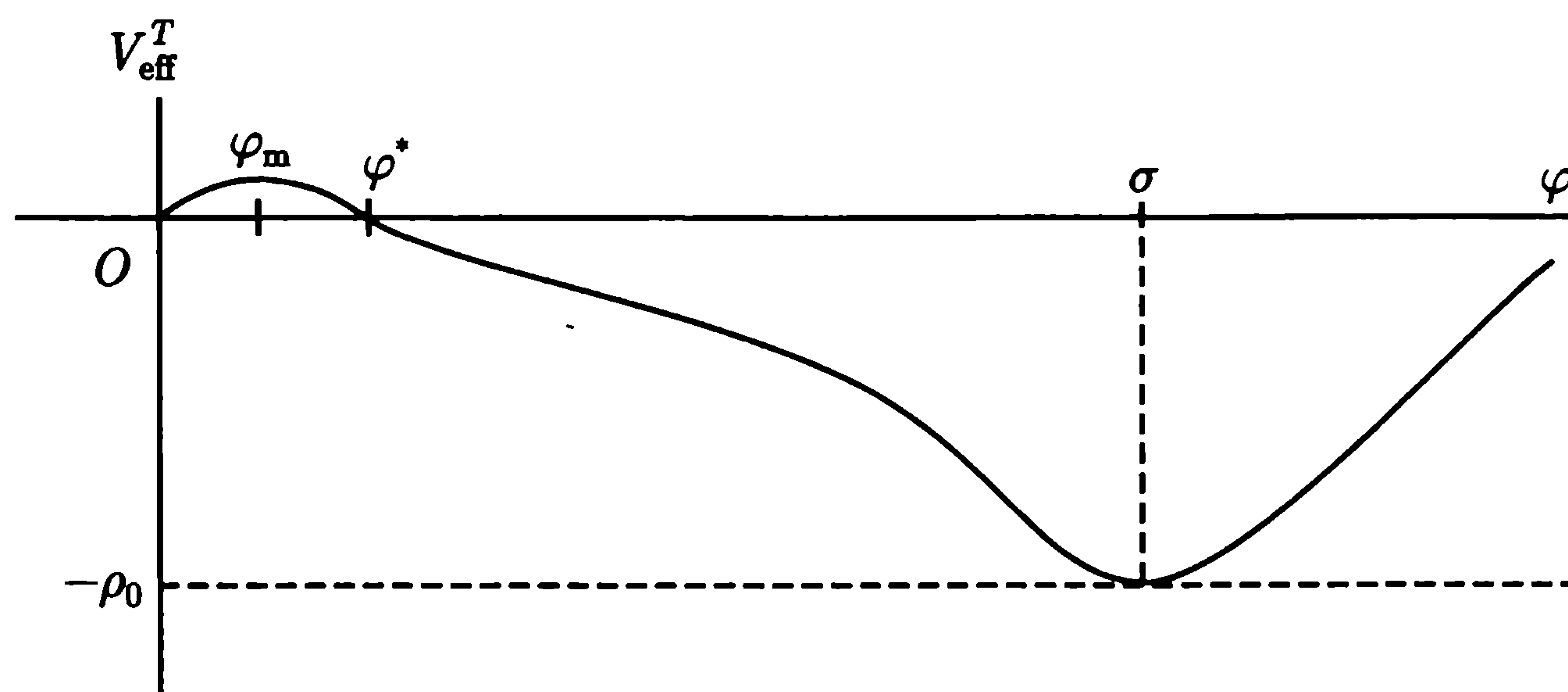


图 7-4

令 $\dfrac{\mathrm{d}V_{\text{eff}}}{\mathrm{d}\varphi}=0$, 得到

$$
\begin{aligned}
&\varphi=0,\\
&\frac{\varphi^2}{\sigma^2}\ln\frac{\varphi^2}{\sigma^2}=-\frac{C}{2B}\frac{T^2}{\sigma^2}\approx\frac{T^2}{T_{\text{c}}^2}\approx 0\quad(\text{当}T\ll T_{\text{c}}).
\end{aligned}
\tag{2.4.1}
$$

(2.4.1) 有两个解, 第一个解对应于 $\varphi\approx\sigma$, 代表真真空; 第二个解对应于势垒的最高点处 $\varphi=\varphi_{\text{m}}$. 我们采用 $SU(5)$ 大统一理论中的 g, B, C 值. 在所有情况下 $T_B\ll\sigma$, 再考虑到

$$\left|\ln\frac{\varphi^2 m}{\sigma^2}\right|\gg 1, \tag{2.4.2}$$

$$\frac{\varphi_{\text{m}}}{\sigma}<\frac{T_b}{\sigma}, \tag{2.4.3}$$

我们得到

$$V_{\text{eff}}^{T_b}(\varphi_{\text{m}})/\rho_0 = 2\frac{\varphi_{\text{m}}^4}{\sigma^4}\cdot\left[\ln\frac{\varphi_{\text{m}}^2}{\sigma^2}-\frac{1}{2}\right]+\frac{2C}{B}\frac{\varphi_{\text{m}}^2T_b^2}{\sigma^4}<\frac{\varphi_{\text{m}}^2}{\sigma^2}<\frac{\varphi_{\text{m}}}{\sigma}.$$

由于有效势比 ρ_0 小几个数量级, 所以有效势在 $\varphi \ll \sigma$ 时是很平坦的. 在区间 $\varphi_{\text{m}}<\varphi<\sigma$, 标量场 φ 要经历一段足够长的滚动相 $\left(\tau\sim\dfrac{1}{T_b}\right)$.

如图 7-4 所示, 当 $\varphi=\varphi^*\ll\sigma$ 时, 泡形成. 此后, 在任一固定空间点, 如果忽略引力作用, 则可采用闵氏时空的经典运动方程 (2.3.15). 假设在一个泡内 φ 是空间均匀的, 此时有

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\varphi-\varphi_{\text{m}}) &= -V_{\text{eff}}'(\varphi-\varphi_{\text{m}})\\ &= -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\varphi^2}V_{\text{eff}}\big|_{\varphi_{\text{m}}}(\varphi-\varphi_{\text{m}}).\end{aligned}$$

考虑到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}V_{\text{eff}}^T &= 4B\varphi\sigma^2\left(\frac{\varphi^2}{\sigma^2}\ln\frac{\varphi^2}{\sigma^2}+\frac{C}{2B}\frac{T^2}{\sigma^2}\right),\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi^2}V_{\text{eff}}^T &= 2\left(6B\varphi^2\ln\frac{\varphi^2}{\sigma^2}+4B\varphi^2CT^2\right)\Big|_{\varphi_{\text{m}}}<0,\\ -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\varphi^2}V_{\text{eff}}^T\big|_{\varphi_{\text{m}}}(\varphi-\varphi_{\text{m}}) &\approx 3CT_b^2(\varphi-\varphi_{\text{m}}),\end{aligned}$$

积分, 得

$$\varphi(t)\approx\varphi^*\mathrm{e}^{\sqrt{c}T_b(t-t_b)}. \tag{2.4.4}$$

此即隧道效应后, 泡在平坦区的演化方程 (忽略重力)—— 泡仍按指数规律膨胀. 只要泡形成时的大小为 10^{-20}cm, 经过时间 $\tau\geqslant10^2H^{-1}$, 泡的大小便可增至 $R(\tau)\geqslant 10^{28}$cm, 即大于现在可观测宇宙的半径 10^{28}cm; 整个宇宙处于一个泡内. 此后, 场绕着真真空做阻尼振荡, 真空能量耗散, 指数膨胀停止, 宇宙按标准模型演化. Higgs 场在 $\varphi=\sigma$ 附近的阻尼振荡相当于粒子的产生. 真空能量在相变时作为潜能释放出来, 使宇宙重新加热至 $T\approx T_{\text{c}}$. 这里, 热化的机制不再解释为泡壁的碰撞, 而解释为阻尼振荡中产生的粒子之间的相互作用.

Hawking 和 Moss 考虑到引力和 Higgs 场的耦合, 采用了更普遍的有效势

$$\begin{aligned}V_{\text{eff}}(\varphi)=&\frac{1}{2}(m^2+\xi R+CT^2)\varphi^2+\frac{1}{4}\alpha^2\varphi^4\\ &\times\left(\ln\frac{\varphi^2}{\varphi_0^2}-\frac{1}{2}+\frac{m^2}{\alpha^2\varphi_0^2}\right)+\frac{1}{8}\alpha^2\varphi_0^4-\frac{1}{4}m^2\varphi_0^2.\end{aligned} \tag{2.4.5}$$

式中 φ_0 是平直空间零温下 $V_{\rm eff}(\varphi_0)=0$ 的期望值, m^2 和 ξ 是重整化参量, $\alpha=5g^2/8\pi, \alpha^2/4\approx B$. 这一有效势比平直时空有限温度下的科尔曼–温伯格势多了几项, 包括含 m 的项和 φ 场与曲率的耦合项.

由于 de Sitter 时空中 $R=12H^2$, 故知 $\xi R=48\pi^2\xi k^2 H_{\rm H}^2$ 代表霍金温度 $T_{\rm H}$ 对有效势的贡献. 当温度降至 $T\approx T_{\rm H}$ 时, 质量项已可忽略; 有效势退化为科尔曼–温伯格势. 此时势垒很低, 量子涨落或热涨落就足以使 φ 场从对称真空过渡不对称真空.

引力和 Higgs 耦合场方程存在一个唯一的均匀解

$$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}t^2-H_1^{-2}\cosh^2(H_1 t)(\mathrm{d}x_2^2+\sin^2 x\mathrm{d}\Omega^2)$$
$$\varphi=\varphi_1\approx\frac{m}{\alpha}\left[\ln\left(\frac{\alpha^2\sigma^2}{m^2}\right)\right]^{-1/2}\ll\sigma,\ H_1^2=\frac{8\pi}{3}\frac{V_{\rm eff}(\varphi_1)}{m_{\rm p}^2}.$$

式中 φ_1 对应于 V 的局部极大值.

如果令

$$B=\frac{3}{8}T_p^2[V_{\rm eff}^{-1}(0)-V_{\rm eff}^{-1}(\varphi_1)]\approx\frac{1}{\alpha^2}(m^2H^{-2})^2\left[\ln\left(\frac{\alpha^2\sigma^2}{m^2}\right)\right]^{-1},$$

则上述均匀解可解释为宇宙以几率

$$\Gamma\approx(m^2+\xi R)^2\exp(-B/\hbar)$$

跃迁至 $\varphi=\varphi_1$ 处, 再沿势垒滚下, 一直到达 $\varphi=\sigma$ 处, 滚动相以后的演化和泡解相同.

在前面讨论的暴胀宇宙论中, 实际上假定了初始的标量场只取一个特定值 (如 $\varphi=0$). 1983 年, Linde 提出更自然地, φ 在初始时刻应该可以取一系列值, 即在一定条件下取任何值. 考虑到量纲的要求, 对极早期 φ 的取值有一定限制, 如哈密顿量中动能项和势能项均不能大于 planck 质量 M_p 的四次方 $M_{\rm p}^4$. 以 φ^4 场为例, 即要求 $\partial_\mu(\varphi)^2\leqslant M_{\rm p}^4, \dfrac{\lambda}{4!}\varphi^4\leqslant M_{\rm p}^4$. 这样, 在空间不同区域 φ 可以取 $\pm M_{\rm p}/\lambda^{1/4}$ 之间的任一值.

φ 场运动方程

$$\ddot\varphi+3H\dot\varphi=-\lambda\varphi^3,\ H=\left(\frac{2}{3}\pi\lambda\right)^{1/2}\varphi^2/M_{\rm p}$$

的通解为

$$\varphi=\varphi_0\exp\{-[\lambda^{1/2}M_{\rm p}/(6\pi)^{1/2}]t\}.$$

由此可以看出, 场 φ 需要时间

$$\Delta t \sim \frac{\sqrt{6\pi}}{\sqrt{\lambda}M_{\rm p}}$$

才能有足够的衰减. 因此, 当 $\lambda \ll 1$, 在 $\Delta t > t_{\rm p} \sim \dfrac{1}{M_{\rm p}}$ 时间内宇宙按指数规律膨胀. 膨胀后宇宙半径为

$$R(\Delta t) \sim R_0 {\rm e}^{H\Delta t} \sim R_0 \exp(2\pi\varphi_0^2/M_{\rm p}^2).$$

要使膨胀后的宇宙大于可观测宇宙, 就要求 $\exp(H\Delta t) \geqslant \exp(65)$. 于是, 按上式和量纲限制条件应有

$$\varphi_0 \geqslant 3M_p, \lambda \leqslant 10^{-2}.$$

这表明, φ 场在宇宙的不同空间区域具有混沌的初始值 φ_0, 任一满足 $\varphi_0 \geqslant 3M_{\rm p}$ 的空间区域 (空间畴) 都将作指数膨胀, 经 Δt 后形成一个比可观测宇宙大的微宇宙泡; 我们生活的宇宙就是其中某一个微宇宙泡演化来的. 这个模型称为混沌暴胀模型.

混沌暴胀模型的另一个特点是它不要求宇宙早期的高温修正. 一般说来, 对有效势的高温修正实际上是给 φ 增加了一有效质量项

$$\Delta m^2(T) = CT^2.$$

式中 C 是一个常系数. 这一项的作用是使原来的 φ 场 (自发破缺的) 由负质量变为正质量, 从而导致对称性恢复. 我们考虑 $C \sim 1$ 的情况, 这时高温修正的影响需要一个弛豫时间

$$\tau \sim \frac{1}{\Delta m^2(T)} \approx \frac{1}{T}.$$

考虑到宇宙极早期物质以相对论粒子为主, 能量密度主要是它们的贡献, 以及一般典型大统一模型 $N \sim 200$, 则可算得宇宙时

$$t \sim \frac{1}{50}\frac{M_{\rm p}}{T^2}.$$

高温修正效应在 t 时刻起作用的必要条件是

$$t \geqslant \tau \quad 或 \quad T \leqslant \frac{M_{\rm p}}{50}.$$

此式表明, 空间畴的指数膨胀要比温度降至 $\dfrac{M_{\rm p}}{50}$ 来得早. 这样, 因空间畴的指数膨胀将导致畴内温度指数下降. 所以高温修正效应始终不存在, 即使 $t > \tau$, 指数形式的急剧下降也将超过高温修正的影响. 于是得到结论, 在每个畴暴胀前, 不会发生高温相变.

这一模型认为, 每个畴暴胀后都可形成一个微宇宙, 只需要要求局部微宇宙满足均匀和各向同性条件, 不需要要求这一条件是整体的. 按此模型, 我们现在的可观测宇宙仅是这些微宇宙中的某一个. 也就是说, 我们的宇宙是由极早期宇宙中某一微小的空间畴暴胀起来形成的.

混沌暴胀模型仍存在一个困难, 就是得不到能量密度涨落的合理量级 $\frac{\delta\rho}{\rho}\sim 10^{-4}$.

2.5　量子涨落和密度扰动的演化

1978 年, Bunch 和 Davies 求得了宇宙暴胀过程中的真空平均值

$$\langle\varphi^2\rangle=\frac{3H^4}{8\pi^2m^2}. \tag{2.5.1}$$

由此式可见 $m^2\to 0$ 时 $\langle\varphi^2\rangle\to\infty$, 这是由于宇宙做指数膨胀, 当 $m^2\to 0, \langle\varphi^2\rangle$ 与在 de Sitter 空间中反常大波长密度涨落有关. 在涨落量 $|K|\ll H$ 时, Vilenkin 等导出了对 $\langle\varphi^2\rangle$ 的主要贡献

$$\langle\varphi^2\rangle\approx\frac{H^{2-\frac{4m^2}{3H^2}}}{2\pi}\int_0^H\frac{k^2\mathrm{d}k}{\{\Delta m^2(T)+k^2\}^{\frac{3}{2}-\frac{2m^2}{3H^2}}}. \tag{2.5.2}$$

式中 $\Delta m^2(T)$ 是温度效应对质量的贡献, $\Delta m^2(T)\sim o(g^2T^2)$. 当 $T\to 0$ 时, 上式可写为

$$\langle\varphi^2\rangle=\frac{H^{2-\frac{4m^2}{3H^2}}}{2\pi}\int_0^H\frac{k^2\mathrm{d}k}{k^{3-\frac{4m^2}{3H^2}}}=\frac{3H^4}{8\pi^2m^2},$$

恰为 (2.5.1) 式. 当 $T\gg H$ 时, 上述反常贡献消失, 此时有

$$\langle\varphi^2\rangle=\frac{T^2}{12},$$

这正是 Minkowski 空间的结果. 当 $0<T<H$ 时, 由于宇宙暴胀, $\Delta m^2(T)$ 按指数规律减小, 此时 (2.5.2) 可写成

$$\langle\varphi^2\rangle=\frac{3H^4}{8\pi^2m^2}\left\{1-\exp\left[-\frac{2m^2}{3H}(t-t_0)\right]\right\} \tag{2.5.3}$$

式中 t_0 是与 $m^2(T)=2H^2$ 对应的时刻. 当 $t-t_0\gg\frac{3H}{2m^2}$ 时, 上式成为

$$\langle\varphi^2\rangle\sim\frac{H^2}{4\pi^2}(t-t_0), \tag{2.5.4}$$

即场的涨落与时间呈线性关系, 当 $t-t_0\geqslant\frac{3H}{2m^2}$ 时, 有

$$\langle\varphi^2\rangle\sim\frac{3H^4}{8\pi^2m^2}\exp\left[\frac{2|m|^2}{3H}(t-t_0)\right],$$

此时 $\langle\varphi^2\rangle$ 按指数规律增长.

考虑到场的量子涨落, 暴胀过程就不是严格均匀的; 这将对暴胀后的能量密度扰动产生影响, 从而有可能解释物质和星系的起源问题. 场初始分布的不均匀会使宇宙暴胀过程中场的不同区域的势达到最小值需要不同的时间, 但最后将升至相同的重加热温度. 这不同的时间正表现出暴胀后的密度扰动. 古什曾计算出这一扰动:

$$\frac{\delta\rho(k)}{\rho}=\frac{1}{\sqrt{2}\pi}\frac{H^2}{\dot{\varphi}}\left[1+\frac{3}{2}\ln(kH)\right]^2_{\varphi=\varphi_*}.$$

式中 φ_* 是动量 $k_*=H$ 时的 $\sqrt{\langle\varphi^2\rangle}$ 值, 而 k_* 与具体势有关. 当选取科尔曼–温伯格势时, 得到

$$\frac{\delta\rho}{\rho}\sim 50. \tag{2.5.5}$$

这和观测到的微波背景辐射不符合. 霍金等采用将空间分成不均匀的和均匀的两部分, 并引入与空间位置有关的时间延缓因子, 得到暴胀结束时有

$$\frac{\delta H}{H}\sim\frac{1}{3\pi}\left(\frac{g^2}{4\pi}\right). \tag{2.5.6}$$

注意到 $T\sim H$, 得到

$$\frac{\delta T}{T}\sim\frac{1}{3\pi}\frac{g^2}{4\pi};$$

又由 $\rho\sim T^4$, 得到

$$\frac{\delta\rho}{\rho}\sim\frac{4\delta T}{T}\sim\frac{g^2}{4\pi}\sim 10^{-2}. \tag{2.5.7}$$

这一结果虽然比古什的结果小了三个量级, 但仍比观测到的微波背景辐射密度涨落 $\dfrac{\delta\rho}{\rho}\sim 10^{-5}$ 要大. 下面将看到, 超对称宇宙早期理论的预言与观测结果相符合.

1986 年, Ruiz-Altaba 等提出了 $N=1$ 的超对称宇宙早期模型, 其标势为

$$V=\mathrm{e}^{|\phi|^2}\left[\left|\frac{\partial P}{\partial\phi}+\phi P\right|^2-3P\right]. \tag{2.5.8}$$

式中 P 就是超对称的超势.

如果真空处于手征超场 ϕ_0, 则为了使相应的宇宙常数为零, 必有 $V(\phi_0)=0$. 若该点超对称不破缺, 则有

$$\left|\frac{\partial P}{\partial\phi}+\phi R\right|_{\phi=\phi_0}=0. \tag{2.5.9}$$

令

$$P=\left(\frac{\Delta^2}{M}\right)(\phi-\phi_0)^2,\quad M=M_{\mathrm{p}}/\sqrt{8\pi}\equiv 1, \tag{2.5.10}$$

Δ 是质量参数,

$$m_\phi \sim \Delta^2, \tag{2.5.11}$$

则 (2.5.8) 可改写为

$$V = \Delta^4 \left[1 - 4\phi^3 + \frac{13}{2}\phi^4 - 8\phi^5 + \frac{23}{3}\phi^6 + o(\phi^7)\right]. \tag{2.5.12}$$

宇宙从 $\phi \lesssim H_0, \dot{\phi} \approx 0$ 开始暴胀, 由于势为主暴胀场 ϕ 满足经典运动方程

$$\begin{aligned} &\ddot{\phi} + 3\dot{H}\phi + \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\phi} = 0, \\ &H^2 = \left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)\right]; \\ &\Delta V_H \approx -\Delta^8 \phi \ \ (\text{Hawking 辐射项}). \end{aligned} \tag{2.5.13}$$

我们得到反 de Sitter 相的 Hubble 常数

$$H_0^2 = V(0) = \Delta^4. \tag{2.5.14}$$

暴胀场产生在 $\ddot{\phi} \ll 3H_0\dot{\phi}, \phi \sim H_0$, 直到时间 $t_I \sim m_\phi^{-1}$. 然后暴胀场如物质一样演化, 直到再加热时间 $t_R \sim \Gamma_\phi^{-1}$, 然后衰变为辐射为主和再热相. 考虑到 (2.5.11) 有

$$\Gamma_\phi \sim \Delta^2 m_\phi \sim \Delta^4,$$

辐射能的增加满足式

$$\rho_\phi(t_R) = \rho(t_I)\left(\frac{t_I}{t_R}\right)^2 = \Delta^2\left(\frac{\Gamma_\phi}{m_\phi}\right)^2 \approx \frac{\pi^2}{15}NT_R. \tag{2.5.15}$$

式中 N 是光子有效自由度数. 由上式可以得到

$$T_R \sim \Delta^3. \tag{2.5.16}$$

如果取 $\Delta \sim 10^{-4}$(以 M 为单位), 则再热温度 $\sim 10^6$GeV. 暴胀数 N_I 满足

$$R(t_R) \sim \mathrm{e}^{N_I} R(t_I),$$

于是得到

$$N_I = \int_{\phi_I}^{\phi_R} H_0 \mathrm{d}t. \tag{2.5.17}$$

由于 $\phi_I \sim H_0, \phi_R \sim 10^{-1}$, 所以

$$N_I \sim 10^8. \tag{2.5.18}$$

另一方面, 暴胀的量子涨落的量级为 H_0, 因此在标度为 λ 时产生能量密度涨落. 按暴胀时能量密度涨落公式

$$\frac{\delta\rho}{\rho} \approx \frac{H_0^2}{\dot{\phi}(t_i)}\left[1+\frac{3}{2}\ln(\lambda H_0)\right]^2, \tag{2.5.19}$$

式中 H_0 是 $\phi=0$ 时的哈勃常数, λ 是前面提到的能量密度涨落时的能量标度, 代入 (2.5.13) 和 (2.5.14), 得到

$$\frac{\delta\rho}{\rho} \sim 10^2\Delta^2 \sim 10^{-4}. \tag{2.5.20}$$

(2.5.18) 和 (2.5.19) 均与观测结果相符, 这就克服了前面的以大统一和科尔曼–温伯格势为基础的暴胀理论遗留下来的两个问题: (i) 量子涨落导出的跃迁太快, 宇宙不足以膨胀到与观测一致的大小, 即标度因子达不到 e 指数上大于 65 的量级的增长. (ii) 暴胀时能量密度涨落太大, 按 (2.5.19) 算得的值远大于观测值 10^{-4}.

因此, 超对称理论应用于暴胀宇宙, 成功地解释了再热机制、暴胀指数及能量密度涨落等关键问题. Ruiz 的这一理论的遗留问题是再热温度较低, 不足以产生足够的重子数不对称.

2.6 小　结

为了解决大爆炸宇宙模型 (即标准宇宙模型) 在宇宙极早期存在的几个疑难问题, 1981 年, 古什首先提出了一个关于宇宙极早期的暴胀宇宙模型, 它认为暴胀产生在 (超冷) 假真空对称相破缺之前. 这理论无法解释大量宇宙泡的产生所引起的不均匀性等问题. 1982 年, Linde 等提出了新的暴胀过程模型, 它认为宇宙泡沿着势的平坦部分慢慢滚动下来, 即暴胀与对称破缺的相变同时发生, 由此解决了原暴胀模型存在的疑难问题. 1983 年, 人们抛弃了高温修正效应, 又提出一个混沌暴胀模型, 认为标量场在一定取值范围内, 在时空中都可形成宇宙泡, 每个宇宙泡都可以在暴胀后形成一个微宇宙, 每个微宇宙暴胀后都可超过我们可观测宇宙的线度; 我们就生活在这样的许多个宇宙中的一个里面. 1984 年以来, 人们又进一步引入了超对称理论, 把暴胀宇宙和 $N=1$ 的超引力物质相耦合, 使得标量场的势的形状更合理 —— 使所得推论更符合观测事实.

加上了暴胀模型的广义相对论宇宙学, 仍然无法解决宇宙的创生问题和星系的形成问题. 这些问题我们将在下一篇中讨论.

第八篇　量子宇宙学

第七篇的最后, 我们谈到暴胀宇宙学可以解释标准宇宙模型中的视界问题、平直性问题和磁单极问题. 它已经把我们带到了 $t = 10^{-35}\mathrm{s}$ 的宇宙极早期, 已接近于宇宙的开端. 剩下的一个问题就是宇宙的创生了, 这是量子宇宙学要回答的问题.

广义相对论宇宙学是建立在爱因斯坦引力理论基础上的. 严格地说, 量子宇宙学应该建立在量子引力理论的基础上. 然而, 至今人们还未能建立一个令人满意的量子引力理论. 尽管如此, 人们仍然可以根据已经了解的量子引力的某些特征, 去寻找各种途径, 尝试解决量子宇宙学的主要问题 —— 宇宙的创生问题. 20 世纪 80 年代初, 霍金、维林金 (Vilenkin) 等提出用宇宙波函数来描述宇宙的量子状态, 而宇宙波函数满足宇宙动力学方程 —— 惠勒–德维特 (Wheeler-De Witt) 方程. 这样, 只要确定宇宙的边界条件, 便可定量地研究宇宙的创生问题了.

第 1 章　宇宙量子力学

在量子宇宙学中, 宇宙的状态由宇宙波函数来描述, 由这个波函数可确定宇宙按特征量分布的几率幅. 故在量子力学意义上讲这种描述是完备的. 在哈特–霍金理论中, 可以自然地给出宇宙边界条件, 所以能够得到一个自洽的宇宙. 在这样的理论框架下, 人们的任务是给出宇宙按照对观测有兴趣量分布的宇宙波函数. 哈特–霍金采用了欧氏 (其中时间为纯虚数) 路径积分表述.

1.1　量子引力的路径积分表述

在量子力学中所有的物理定律都可以用路径积分形式来表述. 对于单个粒子系统, 粒子可以从事件 (x_1, t_1) 经由任何路径到达事件 (x_2, t_2), 每个路径的权重为 $\exp(\mathrm{i}I)$, 其中 I 是系统的作用量. 于是, 粒子由点 (x_1, t_1) 到达点 (x_2, t_2) 的几率幅为

$$\langle x_2, t_2 | x_1, t_1 \rangle = \int \delta x \exp(\mathrm{i}I), \tag{1.1.1}$$

其中的泛函积分是对连接 (x_1, t_1) 和 (x_2, t_2) 的所有路径进行的. 这一表述同样可用于量子场论. 我们把场 $\phi(x)$ 看作场构形空间的坐标, 则事件便可由点 $(\phi(x), t)$ 给出. 其含义是在时刻 t 场具有构形 $\phi(x)$. 于是, 场由 $(\phi_1(x), t_1)$ 到 $(\phi_2(x), t_2)$ 的几率幅为

$$\langle \phi_2(x), t_2 | \phi_1(x), t_1 \rangle = \int \delta\phi(x, t) \exp(\mathrm{i}I). \tag{1.1.2}$$

式中积分沿构形空间中连接 $(\phi_1(x), t_1)$ 和 $(\phi_2(x), t_2)$ 的所有路径进行. 这样, 只要作代换 $(x, t) \to (\phi(x), t)$, 对单粒子系统的讨论和对场的讨论便在形式上完全一样.

作为量子理论的起点, 是通过在适当的构形空间给出系统的波函数, 从而确定系统的状态. 波函数的构造要从它的几率解释出发, 可以写成

$$\Psi(x, t) = N \int_C \delta x(t) \exp(\mathrm{i}I[x(t)]), \tag{1.1.3}$$

其中 N 是归一化因子, 由系统的初始准备给出, 积分是沿一类路径进行的, 这类路径是从 (x, t) 出发并按前面所述的方式加权.

(1.1.3) 并不是好的定义, 因为在一般情况下 (1.1.1) 和 (1.1.2) 中的路径积分可能发散. 为了解决这一问题, 只要将时间轴在虚平面上顺时针转到虚时间轴 $(t \to$

iτ), 并且考虑到 $t \to -\infty$ 时对系统的准备对应于 $\tau \to -\infty$. 按照这种程序, 单粒子系统的基态波函数应构造为

$$\Psi(x,\tau) = N\int \delta x \exp(-I[x(\tau)]). \tag{1.1.4}$$

式中 $I(x(\tau))$ 是所谓欧氏作用量, 它是通过作代换 $t \to \mathrm{i}\tau$ 并调整一个整体符号 (使其为正) 得到的. 可以看出, 如果 $I[x(\tau)]$ 是正定的, 则路径积分 (1.1.4) 便是收敛的. 将所得波函数解析延拓到实时间轴, 便可得到物理结果.

上式可直接推广到量子场情况, 系统的基态波函数具有形式

$$\Psi(\phi(x),\tau) = N\int \delta\phi(x) \exp(-I[\phi(x)]). \tag{1.1.5}$$

我们希望将同样的表述用于量子引力. 在广义相对论中, 引力场即度规张量场. 一个紧致的 4 维流行时空度规可表示为

$$\mathrm{d}s^2 = -(N^2 - N_i N^i)\mathrm{d}t^2 + 2N_i \mathrm{d}x^i \mathrm{d}t + h_{ij}\mathrm{d}x^i \mathrm{d}x^j, \tag{1.1.6}$$

其中 N 是时移 (lapse) 函数, N_i 是位移 (shift) 函数, h_{ij} 是三维类空超曲面 $t = \mathrm{const}$ 上的内禀度规. N, N_i, h_{ij} 均为时空坐标的函数; h_{ij} 作为自由度构成一个无限维的超空间, 而 N 和 N_i 可以通过适当的广义变换消去, 因此它们不构成物理的自由度. 下面证明 (1.1.6) 式. 首先, 我们在时空流形中引入一个类空超曲面, 在其上任一点 (x^i, t) 引入法矢 n^a 和切矢 $X_i^a \equiv X_{,i}^a$, 它们满足关系

$$g_{ab}X^a n^b = g_{ab}X^a X^b = 0 \quad (\text{正交}),$$
$$g_{ab}n^a n^b = -1 \quad (\text{类时}),$$

$\{n^a x_i^b\}$ 构成一个局部 4 标架. 设超曲面在时空中连续变形, 广义变形矢量为

$$N^a \equiv \frac{\partial}{\partial t}X^a(x^i, t) \equiv \dot{X}^a.$$

它在局部 4 标架上分解:

$$N^a = Nn^a + N^i X_i^a.$$

式中的类时分量 N 就是前面说的时移 (lapse), 类空分量 N^i 即为位移 (shift). 由于

$$\mathrm{d}s^2 = g_{tt}\mathrm{d}t^2 + 2g_{it}\mathrm{d}x^i \mathrm{d}t + g_{ij}\mathrm{d}x^i \mathrm{d}x^j,$$

有

$$g_{tt} = \frac{\partial X^a}{\partial t}\frac{\partial X^b}{\partial t}g_{ab} = N^a N^b g_{ab}$$

$$= N^a N^b (h_{ab} - n_a n_b) = N^i N_i - N^2.$$

实际上

$$\begin{aligned} N^a N^b (h_{ab} - n_a n_b) &= N_a N^b h^a_b - N^2 \\ &= (N n_a + N^i X_{a,i})(N n^b + N^i X^b_i) h^a_b - N^2 \\ &= (N n_a + N^i X_{a,i})(0 + N^i X^b_i) - N^2 \\ &= N^i N_i - N^2. \end{aligned}$$

类似地有

$$\begin{aligned} g_{it} &= X^a_i N^b g_{ab} = X^a_i N^b (h_{ab} - n_a n_b) = N_i, \\ g_{ij} &= X^a_i X^b_j g_{ab} = X^a_i X^b_j (h_{ab} - n_a n_b) = h_{ij}, \end{aligned}$$

由此即可得到 (1.1.6) 式.

关于时间 t, 在广义相对论 (经典) 宇宙学中是用的世界时, 它是宇宙的内禀属性. 显然, 当研究量子宇宙学时, 任何测量系统本身作为宇宙的一部分也必须量子化, 因此独立的时间便完全失去了意义. 这样, 构形空间的坐标应该只有 h_{ij}, 若还存在物质场 ϕ, 则仅由 (h_{ij}, ϕ) 描述. 于是, 宇宙由三维类空超曲面 h_{ij}(其上有场 ϕ) 跃迁到类空超曲面 h'_{ij}(其上有场 ϕ') 的跃迁几率幅可表示为

$$\langle h'_{ij}, \phi' | h_{ij}, \phi \rangle = \int \delta[g_{\mu\nu}, \phi] \exp(\mathrm{i} I[g_{\mu\nu}, \phi]). \tag{1.1.7}$$

与一般量子系统的处理相类似, 量子引力系统的波函数可表示为

$$\Psi[h_{ij}, \phi] = N \int_C \delta g_{\mu\nu} \delta\phi \exp(\mathrm{i} I[g_{\mu\nu}, \phi]). \tag{1.1.8}$$

式中 N 是归一化常数, 积分区域 C 是构形空间中连接点 (h_{ij}, ϕ) 和初始点的所有路径. 系统的基态波函数具有形式

$$\Psi[h_{ij}, \phi] = N \int_C \delta g_{\mu\nu} \delta\phi \exp(-I[g_{\mu\nu}, \phi]). \tag{1.1.9}$$

式中 $I[g_{\mu\nu}, \phi]$ 是欧氏作用量.

我们期望, 波函数 (1.1.9) 应满足一个类似于薛定谔 (Schrödinger) 方程的宇宙动力学方程. 下面我们将得到这样一个方程, 它被称为惠勒–德维特 (Wheeler-De Witt) 方程.

在单圈 (也称为半经典的 WKB) 近似下, (1.1.9) 具有形式

$$\Psi[h_{ij}, \phi] = N \sum_i B_i \exp(-I^i_{\mathrm{cl}}). \tag{1.1.10}$$

式中 I^i_{cl} 是第 i 个满足最小作用量原理的经典欧氏作用量, N 是归一化常数, B_i 是对经典轨道的涨落.

1.2　宇宙动力学方程

我们首先给出广义相对论的哈密顿形式. 为此, 引力场的作用量取为

$$I_{\mathrm{g}}=\frac{1}{16\pi}\left[\int_M \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}(R-2\Lambda)+2\int_{\partial M}\mathrm{d}^3x\sqrt{h}K\right]. \tag{1.2.1}$$

式中中括号内第二项的引入是为了抵消第一项在变分时出现的表面积分项. 实际上, 第一项在对 $g_{\mu\nu}$ 变分时给出的表面积分项为

$$\Delta I_{\mathrm{g}}=\frac{1}{16\pi}\int_{\partial M}(\Delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}g^{\mu\nu}-\Delta\Gamma^{\mu}_{,\mu}g^{,\alpha})\mathrm{d}\sigma_{\alpha}, \tag{1.2.2}$$

积分是在时空流形 M 的表面 ∂M 上进行的. 由于含有场量 $g_{\mu\nu}$ 的一阶导数项, 所以 $\Delta\Gamma'$ 在表面 ∂M 上不能取为零. 在式 (1.2.1) 中, $h=\det h_{ij}, K=h_{ij}K^{ij}, h_{ij}$ 和 K_{ij} 分别是三维边界上的内禀度规张量和外部曲率张量, R 是标曲率, Λ 是宇宙常数.

如果存在物质场, 作用量中还应加一项 I_{m}, 注意到度规表示式 (1.1.6), 可将作用量写为

$$I=I_{\mathrm{g}}+I_{\mathrm{m}}=\frac{1}{16\pi}\int \mathrm{d}^4xh^{1/2}N(K_{ij}K^{ij}-K^2+^3R-2\Lambda)+I_{\mathrm{m}}. \tag{1.2.3}$$

式中

$$K_{ij}=\frac{1}{N}\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial h_{ij}}{\partial t}+N_{(i|j)}\right), \tag{1.2.4}$$

下标的小竖表示对 h_{ij} 取协变微商, ${}^3R$ 是由 h_{ij} 给出的内部曲率标量.

由 (1.2.3) 可以得到系统的哈密顿量的表示式

$$H=\int \mathrm{d}^3x(\pi\dot{N}+\pi^i\dot{N}_i+NH^0+N_iH^i), \tag{1.2.5}$$

这里 N 和 N^i 起拉格朗日乘子的作用,

$$H^0=\frac{h^{1/2}}{16\pi}[K_{ij}K^{ij}-K^2-^3R(h)+2\Lambda], \tag{1.2.6}$$

$$H^i=-2\pi^{ij}_{|j}, \tag{1.2.7}$$

$$\pi=\frac{\delta S_{\mathrm{g}}}{\delta\dot{N}}=0,$$

$$\pi^i=\frac{\delta S_{\mathrm{g}}}{\delta\dot{N}_i}=0,$$

$$\pi^{ij}=\frac{\delta S_{\mathrm{g}}}{\delta\dot{h}_{ij}}=\frac{h^{1/2}}{16\pi}(Kh^{ij}-K^{ij}). \tag{1.2.8}$$

由于 $\pi = 0$ 和 $\pi^i = 0$ 恒成立, 所以 $\dot{\pi} = 0, \dot{\pi}^i = 0$. 由哈密顿方程得

$$H^0 = 0, \tag{1.2.9}$$

$$H^i = 0. \tag{1.2.10}$$

式 (1.2.9) 和 (1.2.10) 即为哈密顿约束和动量约束.

在由场构形 $\{h_{ij}\}$ 构成的超空间中引入度规

$$G_{ijkl} = \frac{1}{2}h^{-1/2}(h_{ik}h_{jl} + h_{il}h_{jk} - h_{ij}h_{kl}), \tag{1.2.11}$$

则 (1.2.6) 可写为

$$H^0 = \frac{1}{16\pi}[G_{ijkl}\pi^{ij}\pi^{kl} - h^{1/2}({}^3R - 2\Lambda)]. \tag{1.2.12}$$

作算符化处理 $\pi^{ij} \to \frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\delta}{\delta h_{ij}}$; 如果有物质场存在, 将相应的广义动量以算符代替, 则哈密顿约束给出:

$$\left\{-G_{ijkl}\frac{\delta^2}{\delta h_{ij}\delta h_{kl}} + h^{1/2}\left[-{}^3R + 2\Lambda + 16\pi T_{nn}\left(\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\delta}{\delta\phi}, \phi\right)\right]\right\}\Psi[h_{ij}, \phi] = 0, \tag{1.2.13}$$

此即 Wheele-De Witt 方程, 也就是我们要寻找的宇宙动力学方程. 式中 T_{nn} 是物质场能量–动量张量在三维类空超曲面法线方向上的分量. 人们可以把 (1.2.13) 认为是宇宙的薛定谔方程, 但由于波函数不明显地依赖于时间, 所以方程中没有时间导数项.

由动量约束可得

$$\left(\frac{\delta\Psi}{\delta h_{ij}}\right)_{lj} = T^{ni} \cdot \Psi(h_{|j}, \phi), \tag{1.2.14}$$

此即动量约束方程. 它表明, 对于相互之间可以由坐标变换得到的不同度规 h_{ij}, 其波函数必须是相同的.

方程 (1.2.13) 和 (1.2.14) 都是无限维空间中的变分方程, 没有普遍的严格的求解方法, 只有通过限制超空间自由度个数, 也就是用小超空间模型 (只有有限个自由度的超空间模型), 将量子涨落限制在保持时空某些拓扑及几何特征的自由度上, 从而将变分方程简化为简单得多的偏微分方程组.

宇宙波函数 $\Psi(h_{ij}, \phi)$ 要满足方程 (1.2.13) 和 (1.2.14), $|\Psi|^2$ 表征宇宙在超空间中出现在点 (h_{ij}, ϕ) 处的几率.

关于方程 (1.2.13) 和 (1.2.14), 我们再作一补充讨论.

(1) 由经典几何动力学可以得到经典几何应满足的两个约束; 正则量子化以后, 我们得到波函数应满足的两个偏微分方程, 这就是量子几何动力学中的基本动力学方程. 原则上, 它们应适用于任何量子引力系统, 关键在于选择适当的边界条件.

我们可以把 (1.2.13) 看作一个零能的定态薛定谔方程. 对于闭合宇宙, 它表示宇宙的总能量 (引力能加上物质能) 恒为零. 实际上, 闭合宇宙的总能量必须为零, 因为否则引力线通量将不会为零, 而对于闭合宇宙这是不可能的.

对于真空引力场或按宇宙学原理, (1.2.14) 式化为

$$\left[\frac{\delta}{\delta h_{ij}}\Psi(h_{ij},\phi)\right]_{|j}=0.$$

此式表明, 三维曲面上坐标系的微小变化将引起度规的微小变化, 由此导致的波函数的变化为零, 这意味着波函数是规范不变的.

(2) 泛函微分方程 (1.2.13) 可以看作度规场流体 $\{h_{ij}\}$ 上以 G_{ijkl} 为超度规的微分方程, 所有无限多种三维几何 $\{h_{ij}\}$ 和物质构形一起构成一个无限维构形空间, 叫超空间. 1967 年, De Witt 首先指出了 G_{ijkl} 的几何意义, 可以验证

$$G_{ijkl}=G_{jikl},\quad G_{ijkl}=G_{ijlk},\quad G^{ijkl}=G^{jikl},$$
$$G^{ijkl}=G^{ijlk},\quad G_{ijkl}G^{klab}=\delta^{ab}_{ij}.$$

独立的对称指标是 11, 22, 33, 12, 13, 23; 对角元素为 $G_{1111}, G_{2222}, G_{3333}, G_{1212}, G_{1313}, G_{2323}$; 号差为 $(-+++++)$. 因此, W-D 方程就是六维超度量空间内的一个双曲方程.

(3) Kuchar 曾指出, 在量子几何动力学中, 由正则量子化并不能得到哈密顿, 而只是得到了一个哈密顿约束. 这一点与通常的量子力学不同. 这一特点将导致波函数不能构成一个希尔伯特空间, 因而波泛函的几率解释可能会遇到困难.

1.3 边界条件

为了给出宇宙动力学方程的解, 还需要有边界条件. 在量子宇宙学中, 由于时间是内禀时间, 所以初始条件包含在边界条件之中. 在量子宇宙学中, 也存在某些“自然边界条件”, 这些“自然边界条件”是由问题的物理意义考虑得到的. 比如, 考虑度规的正定性, 即当看成场量时必须满足 $h^{1/2}\geqslant 0$. 定义新的场量 $h_{ij}\to\bar{h}_{ij}\equiv h_{ij}/h^{1/2}$, 则此边界条件可写成

$$\Psi[\tilde{h}_{ij},h^{1/2},\phi]=0,\quad \text{当}h^{1/2}<0. \tag{1.3.1}$$

在路径积分表述中, 这个边界条件可以由适当选择积分路径来实现.

有了边界条件 (1.3.1) 还不够, 还需要有作为边界条件的初始宇宙波函数的形式. 这涉及 (1.1.9) 以及其中积分路径 C 的选取.

霍金认为, 宇宙中任何一点都不应处于特殊地位, 因此宇宙应该是没有边界的. 他认为物理定律在任何地方都应有效, 宇宙的开端处也不例外. 为此, 应该让路径

积分只对非奇异性度规取和. 在通常的路径情况下, 人们知道测度更集中于不可微的路径. 但是在某些适当的拓扑中, 这些路径是光滑路径的完备化, 并且具有定义完好的作用量. 类似地可以想到, 量子引力的路径积分应该对光滑度规的完备化空间取和, 不应包含奇异性度规 (因为它的作用量没有定义).

在黑洞的情况下, 路径积分应该对欧氏 (规则) 度规取和. 这意味着像 Schwarzschild 黑洞这样的奇异性在欧氏度规中不出现, 欧氏度规并没有到达视界面以内. 视界像是极坐标原点. 因此, 欧氏度规的作用量是完好定义的. 这一问题的处理可认为是宇宙监督的量子理论表述: 奇点处结构的破坏不应影响任何物理测量.

这样看来, 量子引力的路径积分应该对非奇异欧氏度规取和. 那么在这些度规上应赋予什么样的边界条件呢? 回答是: 只存在两个自然的选择. 第一个选择是度规在紧致集之外要趋于平直的欧氏度规; 第二个选择是在紧致和没有边界的流形上的度规.

第一类度规 (渐近欧氏度规) 对于散射计算仍然很合适. 在散射过程中, 粒子由无穷远处射入, 人们在无穷远处观测出射粒子, 无穷远处的背景度规是平直的, 可以用通常的方式把场的小涨落解释成粒子, 人们不必问在中间的相互作用区域发生了什么, 这就是人们让相互作用区域的路径积分对所有可能历史 (即对所有欧氏度规) 取和的原因.

在宇宙学中情况就不同了. 人们处在宇宙之中而非宇宙之外, 因此人们感兴趣的是在有限区域内而不是在无限远处进行测量. 首先假定宇宙学的路径积分是对所有渐近欧氏度规取和, 那么对于有限区内的测量的几率将存在两类贡献: 第一类来自于连通的渐进欧氏度规; 第二类来自于非连通的度规, 它由一个包含测量区域的紧致度规和一个与之相分离的渐近欧氏度规组成, 如图 8-1 所示.

人们不应该把非连通度规从路径积分中排除, 因为它们可以由连通度规来近似, 在这些度规中不同部分可由虫洞 (其作用量可忽略) 连接起来.

对于散射问题, 由于时空的非连通的紧致区域不和无穷远连接, 而测量是在无穷远处进行的, 所以紧致区域不影响散射计算. 但是它们会影响宇宙学中的测量, 因为宇宙学的测量是在有限区域进行的. 的确, 这种非连通度规贡献远远超过了来自连通的渐近欧氏度规贡献. 这样, 即使把宇宙学的路径积分对所有渐近欧氏度规取和, 其效应和对所有紧致度规取和几乎完全相同. 所以哈特和霍金认为, 更自然地应该对所有无边界的紧致度规取和. 这个宇宙的边界条件可以表述为: 宇宙的边界条件是它没有边界.

我们对前面的讨论做一个小结: 宇宙动力学方程由 Wheele-De Witt 方程给出, 边界条件由式 (1.1.9)(C 取上面所讨论的路径) 以及因某些物理要求给出. 对于一个动力学系统, 这种表述是完全的.

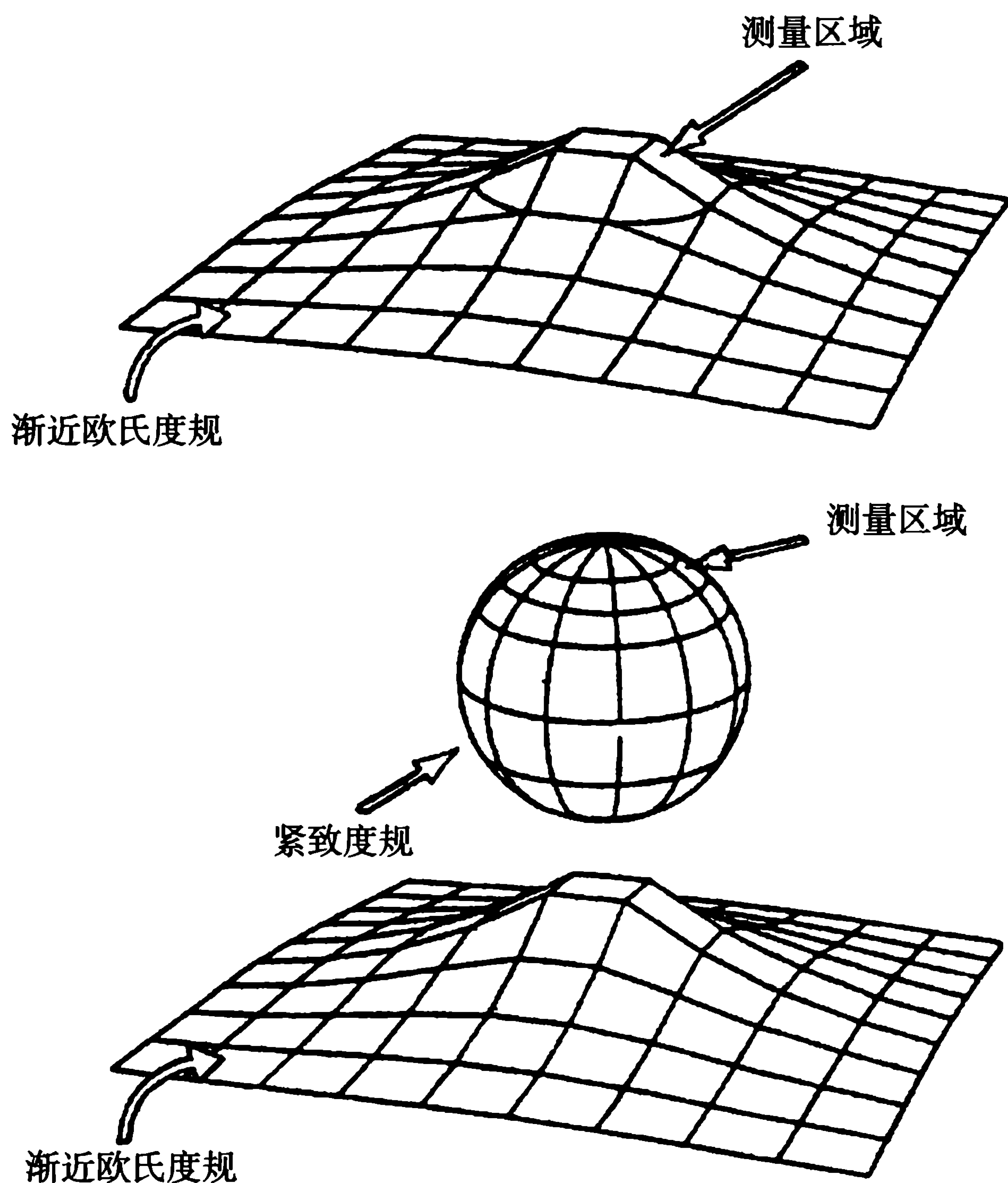


图 8-1

为了对哈特–霍金的“无边界”的边界条件有一个更清晰的了解, 我们再做一直观的描述. 先从确定宇宙边界条件的必要性谈起. 在宇宙学中被研究的系统是整个宇宙. 根据定义, 宇宙没有外部, 没有人们可对其要求边界条件的“宇宙之外的部分”. 而且仅仅依靠数学的相容性不可能求出 Wheeler-De Witt 方程的解. 因此, 宇宙学家不能不从物理的考虑出发来确定宇宙的边界条件. 用几何的语言表述就是要确定基态波函数 (1.1.9) 中路径积分的积分路径. 量子力学中的路径积分表述就是对历史求和, 波函数的计算就是对系统的某一类历史算出一个确定的和. 为了使波函数是唯一的, 必须精确规定需要求和的历史类. 这种对历史求和在数学上相当于解薛定谔方程. 在量子宇宙学中, 宇宙波函数可以通过对宇宙的某一类历史求和而计算出来. 这就是解 Wheeler-De Witt 方程的过程. 获得宇宙动力学方程的解取决于怎样选择对之求和的历史类. 我们可以由几何形体来描述哈特–霍金的工作. 把宇宙在指定时间的空间外延想象成位于水平面内的一个闭合圈 (图 8-2), 竖直轴代表时间, 随时间的增加, 闭合圈变大, 表示宇宙膨胀. 这样, 宇宙的各种可能的历史在宇宙随时间演化时就表现为宇宙圈生长成的管子. 管子的终端代表今天的宇宙, 最下端就表示宇宙的初始态 (创生). 初始态要由提出的边界条件来确定. 某些管子的下端可能像一个锥体的尖端一样封闭; 其他管子下端则可能突然结束. 哈特–霍

金认为, 只应考虑初始端以光滑规则方式收缩到零的半球形帽的那些管子. 就是说, 人们只应该对这些无边界几何形体求和, 终端除外 (终端是开放的, 相当于今天的宇宙). 这就是哈特–霍金的无边界的边界条件.

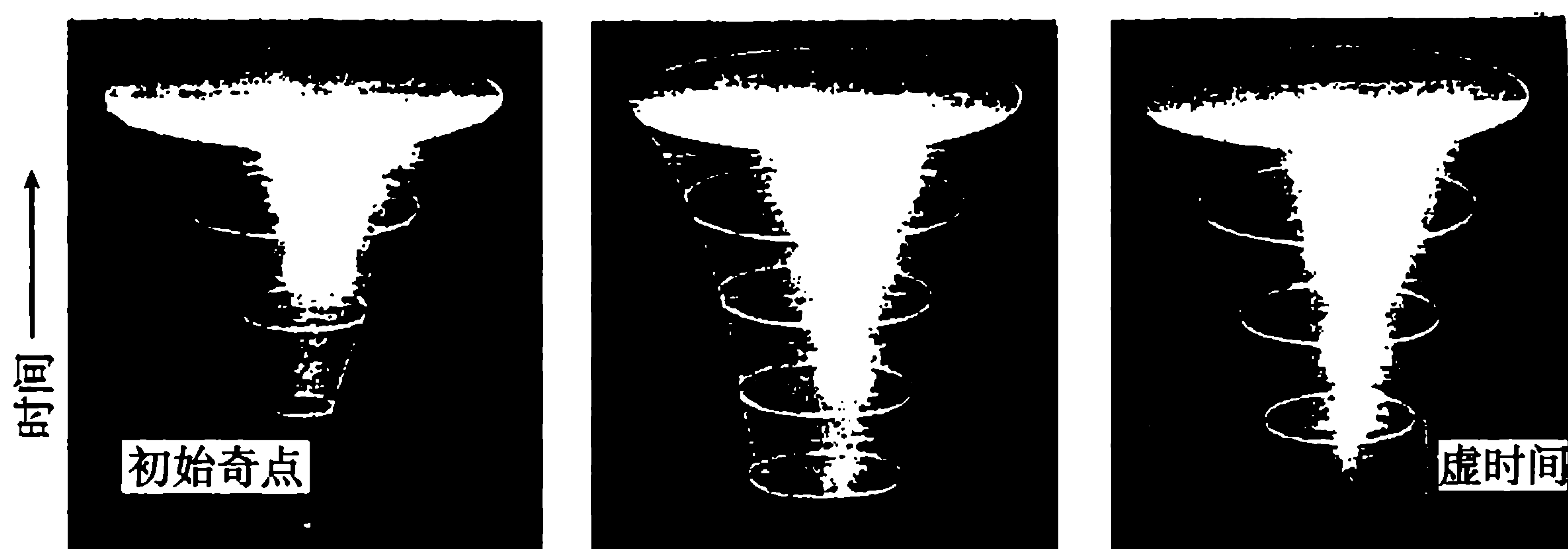


图 8-2

在广义相对论宇宙学中要用这样一种光滑的方式封闭几何形体是不可能的. 奇点定理告诉人们, 宇宙的所有经典历史都必须以奇点的方式收缩到零, 就像锥体的末端一样. 但是量子理论中对历史的求和法则允许有许多可能的历史, 而不仅仅是那些经典的历史. 于是光滑的封闭便成为可能. 特别是, 封闭的区域可以看作发生在虚时间内, 因而显然是非经典的.

哈特–霍金由这一边界条件得到了一个宇宙动力学方程的解. 由于虚时间的出现是量子理论中的隧道效应的特征, 因此宇宙可能是从"一无所有"经隧道效应创生出来的; 大爆炸是在隧道效应之后接着发生的.

下一章我们具体讨论哈特–霍金的宇宙波函数.

第2章 宇宙波函数

2.1 基态波函数的表述

这一章, 我们将比较详细地讨论哈特–霍金的基态波函数理论. 波函数依赖于类空超曲面的拓扑性质和三维度规以及曲面上的物质场的值. 为了简捷, 我们现在只考虑 S^3 拓扑性质, 其他可能性放在后面讨论.

正如前章所讨论的, 基态波函数构造成泛函积分形式

$$\Psi_0[h_{ij},\phi]=N\int \delta g_{\mu\nu}\delta\phi\exp(-I[g_{\mu\nu},\phi]), \tag{2.1.1}$$

式中 I 是总的欧氏作用量, 积分沿着具有紧致边界条件的一类 4 维欧氏几何和相应的一类欧氏场构形, 在边界上诱导 (或内禀) 度规为 h_{ij}. 为了实现基态波函数的定义, 需要给出一类几何和场用来求和. 其几何应当是紧致的, 其上的场应是规则的. 在正宇宙常数的情况下, 场方程的任何规则欧氏解必是紧致的. 最大的对称性解是半径为 $3/\Lambda$ 的四维球, 其度规可写为

$$\mathrm{d}s^2=(\sigma/H)^2(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\Omega_3^2). \tag{2.1.2}$$

式中 $\mathrm{d}\Omega^2$ 是 3 维球上的度规, $H^2=\sigma^2\Lambda/3$, 我们为以后表述方便还引入了一个因子 $\sigma^2=\dfrac{l_{\mathrm{p}}^2}{24\pi^2}, l_{\mathrm{p}}^2=16\pi G$. 显然, 当 $\Lambda>0$ 时, 对紧致的四维几何取和是唯一合理的选择.

如果 $\Lambda\leqslant 0$, 场方程没有紧致解. 最大对称性解是欧氏空间 $(\Lambda=0)$:

$$\mathrm{d}s^2=\sigma(\mathrm{d}\theta^2+\theta^2\mathrm{d}\Omega_3^2) \tag{2.1.3}$$

和欧氏反 de Sitter 空间 $(\Lambda<0)$:

$$\mathrm{d}s^2=(\sigma/H)^2(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\Omega_3^2). \tag{2.1.4}$$

正如 1.3 节中谈到的, 对于散射问题来说, 当 $\Lambda\leqslant 0$ 时, 基态波函数定义为渐近欧氏几何上或渐近反 de Sitter 几何上的泛函积分更合适. 然而在宇宙中, 人们感兴趣的是在时空内部进行的测量, 内部点是否与无穷远区域连通没什么关系. 哈特–霍金认为, 应该取由两部分组成的不连通的几何：其一是紧致的部分, 没有内部边界. 这个不连通几何实际上给出了对基态波函数的绝对主要的贡献.

在 $\Lambda\leqslant 0$ 的情况下, 由紧致四维几何上得到的基态波函数, 对大的三维几何发散, 且波函数不能归一化. 这是因为在作用量中, 正的 Λ 和负的 Λ 对大的四维几何

的作用刚好相反. 因此, 我们只考虑 $\Lambda > 0$ 的情况, $\Lambda = 0$ 将被视为 $\Lambda > 0$ 的极限情况.

有时在 K- 表象下描述波函数比较方便. 即 $h^{1/2}$ 代之以它的共轭动量 $-\frac{4}{3}Kl_{\rm p}^{-2}$. 这时也可用泛函积分构造之

$$\Phi_0[\tilde{h}_{ij}, K, \tilde{\phi}] = N\int \delta g_{\mu\nu}\delta\phi \exp(-I^k[g_{\mu\nu}, \phi]). \tag{2.1.5}$$

积分仍沿着前面的场和几何, 只是现在在边界上固定的是 $\tilde{\phi}, \tilde{h}_{ij}$ 和 K, 而不再是 ϕ 和 h_{ij}. 因此, I^K 是保持 $\tilde{\phi}, \tilde{h}_{ij}$ 和 K 在边界上固定的欧氏作用量. 我们有

$$l_{\rm p}^2 I_F^K(g_{\mu\nu}) = -\frac{2}{3}\int_{\partial M} {\rm d}^3x h^{1/2}K - \int_M {\rm d}^4x g^{1/2}(R - 2\lambda), \tag{2.1.6}$$

$$I_M^K(g_{\mu\nu}, \phi) = \frac{1}{2}\int_M {\rm d}^4x g^{1/2}\left[(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{6}R\phi^2\right]. \tag{2.1.7}$$

向 K- 表象变换时, 我们有

$$\Phi[\tilde{h}_{ij}, K] = \int_0^\infty \delta h^{1/2} \exp\left[-{\rm i}\frac{4}{3}l_{\rm p}^2\int {\rm d}^3x h^{1/2}K\right]\Psi(h_{ij}), \tag{2.1.8a}$$

反过来有

$$\Psi[h_{ij}] = \int_{-\infty}^\infty \delta K \exp\left[{\rm i}\frac{4}{3}l_{\rm p}^{-2}\int {\rm d}^3x h^{1/2}K\right]\Phi[\tilde{h}_{ij}, K]. \tag{2.1.9a}$$

按照欧氏的 K, 上两式可改写为

$$\Phi[\tilde{h}_{ij}, K, \tilde{\Phi}] = \int_0^\infty \delta h^{1/2} \exp\left[-\frac{4}{3}l_{\rm p}^2\int {\rm d}^3x h^{1/2}K\right]\Psi[h_{ij}, \tilde{\Phi}], \tag{2.1.8b}$$

$$\Psi[h_{ij}, \phi] = -\frac{1}{2\pi{\rm i}}\int_C \delta K \exp\left[\frac{4}{3}l_{\rm p}^2\int {\rm d}^3x h^{1/2}K\right]\Phi[\tilde{h}_{ij}, K, \tilde{\Phi}]. \tag{2.1.9b}$$

式中路径 C 从 $-{\rm i}\infty$ 到 $+{\rm i}\infty$.

从泛函积分 (2.1.5) 来构造基态波函数有一个优点, 就是 (2.1.9b) 中的积分总能满足波函数 $\Psi_0(h_{ij}, \phi)$ 的要求, 当 $h^{1/2} < 0$ 时这波函数等于零.

欧氏引力作用量 (2.1.6) 式不是明确限定的, 因为 (2.1.1) 和 (2.1.5) 中的泛函积分还需要仔细地加以限制. 其中一种限制方法是使积分改变为沿着共形因子和共形等效几何上进行. 通过适当选择共形因子的积分路径, 便可构造一种收敛的泛函积分.

这是哈特–霍金关于基态波函数的基本思想. 下面给出它的某些性质, 并在一小超空间模型中表明它的合理性.

2.2 半经典近似

基态波函数泛函积分定义的一个重要优点是它直接满足半经典近似. 本节将检验上一节定义的基态波函数的半经典近似. 为了简便, 我们只考虑纯引力的情况, 其结果可直接推广到含物质场的情况.

通过最陡下降法计算泛函积分, 可以得到半经典近似. 如果只有一个稳态相点, 半经典近似为

$$\Psi_0[h_{ij}] = N\Delta^{-1/2}[h_{ij}]\exp(-I_{\rm cl}[h_{ij}]). \tag{2.2.1}$$

这里, $I_{\rm cl}$ 是稳态相点的欧氏作用量, 即对应用于欧氏场方程

$$R_{\mu\nu} = \lambda g_{\mu\nu} \tag{2.2.2}$$

的解 $g^{\rm cl}_{\mu\nu}$; 在闭合 3 维曲面边界上, 它给出度规 h_{ij}, 且满足上节讨论的边界条件

如果存在不止一个稳态相点, 则必须仔细考虑积分路径, 以便确定哪个给出决定性的贡献. 一般地, 有最低 ReI 值将是稳态相点, 尽管也许不是. 比如, 有两个对应于四维几何的稳态相点, 则两个相互共形. 本节我们将看到一个这样的例子. 基态波函数是实的, 这意味着如果稳态相点有复的作用量值, 则必有其共轭的等同贡献; 如果稳态相点的四维几何不存在, 则在半经典近似下波函数将是零.

首先从泛函积分 (2.1.5) 求 Φ_0 的半经典近似, 然后用最陡下降法求积分 (2.1.9b), 从而获得 Ψ_0 的半经典近似. 要求

$$\int \delta h_{ij}\, \bar{\Psi}_0[h_{ij}]\, \Psi_0[h_{ij}] = 1, \tag{2.2.3}$$

可确定 (2.2.1) 中的归一化常数. 我们将 (2.2.3) 几何地解释为所有四维几何上的路径积分, 在度规为 h_{ij} 的三维曲面两边这些四维几何是紧致的. 从而, 根据无边界紧致四维几何的作用量, 给出这个可能路径积分的半经典近似. 当 $\Lambda > 0$, 其解是四维球. 于是

$$N^2 = \exp\left[-\frac{2}{3H}\right]. \tag{2.2.4}$$

由波函数的泛函积分定义, 波函数的半经典近似使我们对 Wheeler-De Witt 方程的边界条件有一个深刻的理解. 它们可以自然地应用到足够大体积的和无穷小体积的三维几何.

首先考虑小三维体积的极限. 如果极限三维几何可以嵌入平直空间, 则当 $\Lambda > 0$ 时 (2.2.2) 的经典解是四维球, 而且当三维几何缩为零时它保持为四维球. 此时作用量趋近于零. 因此必须考虑波函数的涨落行列式的行为. 在这种极限情况下, 可忽略曲率, 把涨落看作关于平直空间区域的. 考虑它在四维度规常共形尺度变化下和边界三维度规下的行为, 便可求其值.

在 $\Lambda > 0$ 时, 在半经典近似的基础上, 我们可以定性地讨论足够大的三维体积波函数的行为. 对于 (2.2.2) 任一实解来说, 四维球具有最大体积. 随着三维几何体积的增大, 将得到一不再能放入四维球任何地方的三维几何. 于是我们认为稳态相几何变为复的了; 如果 (2.2.1) 在稳态相的四维几何中取值, 基态波函数将变为 2 表示的实组合. 于是我们认为, 随着三维体积的增大, 波函数振荡. 如果振荡没有强烈地衰减, 则对应于一无限膨胀的宇宙.

以上讨论仅仅是定性的, 但已指出基态波函数行为照样取决于 Wheeler-De Witt 方程的边界条件. 下面将这些讨论用于一小超空间模型.

2.3 小超空间模型

超空间是一个无限维流形, 无法对 W-D 方程求解. 如果考虑上述无限维空间内的一个有限维子空间, 即所谓小超空间, 则往往可以对 W-D 方程的解进行一些讨论. 这里, 我们将采用一特别简单的小超空间模型, 来说明以前那些一般讨论的含义. 在这一模型中, 我们限定宇宙常数为正, 四维几何为空间均匀、各向同性且闭合. 这就是说, 设

$$\Lambda > 0,$$

三维几何的拓扑是 S^3. 此时度规可表示为

$$ds^2 = \sigma^2[-N^2(t)dt^2 + a^2(t)d\Omega_3^2]. \tag{2.3.1}$$

式中 $N(t)$ 为时移 (lapse), $\sigma = \dfrac{l^2}{24\pi^2}$. 为简单, 设物质场是共形不变标量场, 均匀性条件要求 $\phi = \phi(t)$. 这样, 波函数仅是两个变量 $a(t)$ 和 $\phi(t)$ 的泛函

$$\Psi = \Psi[a(t), \phi(t)],$$

$$\Phi = \Phi[K(t), \tilde{\phi}(t)]. \tag{2.3.2}$$

式中 $\tilde{\phi}(t) = a^{-3/2}\phi(t)$.

为了简化讨论, 我们引入如下定义并改变变量尺度:

$$\phi = \frac{\tilde{\phi}}{a} = \frac{\chi}{(2\pi^2\sigma^2)^{1/2}a}, \tag{2.3.3}$$

$$\Lambda = 3\lambda/\sigma^2, \quad H^2 = |\lambda|. \tag{2.3.4}$$

经典洛伦兹作用量可写为

$$I^a = \frac{1}{2}\int dt\left(\frac{N}{a}\right)\left[-\left(\frac{a}{N}\frac{da}{dt}\right)^2 + a^2 - \lambda a^4 + \left(\frac{a}{N}\frac{d\chi}{dt}\right)^2 - \chi^2\right]. \tag{2.3.5}$$

实际上, $I^a = I^a_{\rm g} + I^a_{\rm m}$, 而

$$I^a_{\rm g} = \int {\rm d}t{\rm d}x^3\sqrt{g}(R-2\varLambda),$$

$$I^a_{\rm m} = \frac{1}{2}\int {\rm d}^4x\sqrt{g}\left[g^{00}\left(\frac{{\rm d}\phi}{{\rm d}t}\right)^2 + \frac{1}{6}R\phi^2\right],$$

$$R-2\varLambda = 6\sigma^{-2}a^{-2}(a\ddot{a}N^{-2} - a\dot{a}\dot{N}N^{-3} + \dot{a}^2N^{-2} + 1 - a^2\lambda),$$

$$\dot{a} = \frac{{\rm d}a}{{\rm d}t}.$$

由于

$$\begin{aligned}{\rm d}s^2 &= \sigma^2\left\{-N^2(t){\rm d}t^2 + a^2(t)[{\rm d}\theta^2 + \sin^2\theta({\rm d}\theta_1^2 + \sin^2\theta_1{\rm d}\varphi^2)]\right\}\\ &= c(\eta)\left\{-{\rm d}\eta^2 + [{\rm d}\theta^2 + \sin^2\theta({\rm d}\theta_1^2 + \sin^2\theta_1{\rm d}\varphi^2)]\right\},\end{aligned}$$

所以有

$$\begin{aligned}R-2\varLambda &= C^{-1}\left[3\dot{D} + \frac{3}{2}D^2 + 6K\right] - 2\varLambda\\ &= 6\sigma^{-2}a^{-2}(a^{11}a^{-1} + 1 + a^2\lambda)\\ &= 6\sigma^{-2}a^{-2}(a\ddot{a}N^{-2} - a\dot{a}\dot{N}N^{-3} + \dot{a}^2N^{-2} + 1 - a^2\lambda).\end{aligned}$$

考虑到

$$a' = \frac{{\rm d}a}{{\rm d}\eta} = \frac{{\rm d}a}{{\rm d}t}\frac{{\rm d}t}{{\rm d}\eta} = \frac{a}{N}\dot{a},$$

$$\int {\rm d}\theta{\rm d}\theta_1{\rm d}\varphi\sqrt{-g} = 2\pi^2\sigma^4a^3N,$$

可得

$$I_{\rm g} = 12\pi^2\sigma^2\int {\rm d}t\left(\frac{N}{a}\right)\left[-\frac{a^2}{N^2}\dot{a}^2 + a^2 - \lambda a^4\right],$$

于是得到 (2.3.5).

用通常的方法可以由这一作用量构造 a 和 χ 的共轭支量 π_a 和 π_χ

$$\pi_a = \frac{\delta L}{\delta\dot{a}} = \frac{1}{2}\frac{N}{a}\left(2\frac{a}{N}\dot{a}\frac{a}{N}\right) = -\frac{a}{N}\dot{a},$$

$$\pi_\chi = \frac{\delta L}{\delta\dot{\chi}} = \frac{1}{2}\frac{N}{a}\left(2\frac{a}{N}\dot{\chi}\frac{a}{N}\right) = -\frac{a}{N}\dot{\chi}.$$

式 (2.3.5) 对 N 求变分, 得到

$$\frac{\delta I}{\delta N(t')} = \frac{1}{2}\int {\rm d}t\left\{\frac{\delta N(t)}{\delta N(t')}\frac{1}{a}\left[-\left(\frac{a}{N}\dot{a}\right)^2 + a^2 - \lambda a^4\right.\right.$$

$$
\begin{aligned}
&+\left(\frac{a}{N}\dot{\chi}\right)^2-\chi^2\Bigg]+\frac{N}{a}\left[2\left(\frac{a}{N}\dot{a}\right)\left(\frac{a}{N^2}\dot{a}\frac{\delta N(t)}{\delta N(t')}\right)\right.\\
&\left.\left.+2\left(\frac{a}{N}\dot{\chi}\right)\left(-\frac{a}{N^2}\dot{\chi}\frac{\delta N(t)}{\delta N(t')}\right)\right]\right\}\\
&=\frac{1}{2a}\left\{\frac{a^2}{N^2}\dot{a}^2-\frac{a^2}{N^2}\dot{\chi}^2+a^2-\lambda a^4-\chi^2\right\}.
\end{aligned}
$$

由此得到

$$\pi_a^2+a^2-\lambda a^4-\pi_\chi^2-\chi^2=0, \tag{2.3.6}$$

此即哈密顿约束.

引入正则量子化

$$\pi_a=-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial a},\ \pi_\chi=-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial \chi},$$

W-D 方程为

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2}{\partial a^2}-a^2+\lambda a^4-\frac{\partial^2}{\partial \chi^2}+\chi^2\right]\varPsi(a,\chi)=0. \tag{2.3.7a}$$

实际上, 在把 c 数变为 q 数时, 要出现排列中的不确定性, 一般有

$$\pi_a^2=-\frac{1}{a^p}\frac{\partial}{\partial a}\left(a^p\frac{\partial}{\partial a}\right). \tag{2.3.8}$$

式中 p 代表次序模糊因子. 因此, 在一般情况下, W-D 方程可写为

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{a^p}\frac{\partial}{\partial a}\left(a^p\frac{\partial}{\partial a}\right)-a^2+\lambda a^4-\frac{\partial^2}{\partial \chi^2}+\chi^2\right]\varPsi(a,\chi)=0. \tag{2.3.7b}$$

令上式中 $p=0$, 即得 (2.3.7).

现在, 我们讨论对波函数进行分离变量求解. 令

$$\varPsi(a,\chi)=\sum_n C_n(a)u_n(\chi), \tag{2.3.9}$$

由 (2.3.7b) 得到两个常微分方程:

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\chi^2}+\chi^2\right)u_n(\chi)=\left(n+\frac{1}{2}\right)u_n(\chi), \tag{2.3.10}$$

$$\frac{1}{2}\left[-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}a^2}C_n+(a^2-\lambda a^4)C_n\right]=\left(n+\frac{1}{2}\right)C_n. \tag{2.3.11a}$$

(2.3.11a) 也可以写为

$$\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{a^p}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\left(a^p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}C_n\right)+(a^2-\lambda a^4)C_n\right]=\left(n+\frac{1}{2}-\varepsilon_0\right)C_n. \tag{2.3.11b}$$

(2.3.10) 的解正是一个 1 维谐振子解

$$u_n(\chi) = \mathrm{e}^{-\chi^2/2} H_n(\chi). \tag{2.3.12}$$

(2.3.11a) 的严格解无法求得, 我们讨论其渐近行为.

当 a 甚小时, 有

$$C_n \approx \text{const.},\ C_n \approx a^{1-p}; \tag{2.3.13}$$

当 a 甚大时, 有

$$C_n \approx a^{-1} \exp\left(\pm\frac{\mathrm{i}}{3} H a^3\right). \tag{2.3.14}$$

为了构造小超空间模型中 (2.3.11a) 式的解, 我们可以把欧氏泛函积分的规定应用到小超空间模型中. 对于 $\Psi_0(a_0, \chi)$, 我们建议在满足边界条件的欧氏几何和场构形上对 $\exp(-I[g, \phi])$ 求和. 几何求和应该在形如

$$\mathrm{d}s^2 = \sigma^2[\mathrm{d}\tau^2 + a^2(\tau)\mathrm{d}\Omega_3^2] \tag{2.3.15}$$

的紧致几何上进行, $a(\tau)$ 与超曲面上给定的 a_0 值相对应. 对于物质场, 应在各向同性的场 $\chi(\tau)$ 上求和, 这个场与超曲面上规定的 χ_0 值相对应, 且在紧致几何上是规则的. 这样, 我们可以写出

$$\Psi_0(a_0, \chi_0) = \int \delta a \delta \chi \exp(-I[a, \chi]), \tag{2.3.16}$$

其中定义 $\mathrm{d}\eta = \mathrm{d}\tau/a$, 作用量为

$$I = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}\eta \left[-\left(\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\eta}\right)^2 - a^2 + \lambda a^4 + \left(\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}\eta}\right)^2 + \chi^2\right]. \tag{2.3.17}$$

一共形旋转可以使 (2.3.16) 中的积分收敛.

在小超空间模型中构造基态波函数的另一种方法是在 K 表象中进行. 对于具有三维超球面的四维球而言, 引入

$$k \equiv \frac{\sigma}{9} K,$$

由

$$K = h^{ij} K_{ij} = \frac{1}{N}\left(-\frac{1}{2} h^{ij} \frac{\partial K_{ij}}{\partial t}\right)$$

得到 $k = \dfrac{1}{3a}\dfrac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\tau}$. 又由

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 &= \left(\frac{\sigma}{H}\right)^2 (\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\Omega_3^2) \\ &= \sigma^2 \left[\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{H}\right)^2 + \left(\frac{\sin\theta}{H}\right)^2 \mathrm{d}\Omega_3^2\right] \end{aligned}$$

$$= \sigma^2[\mathrm{d}\tau^2 + a^2\mathrm{d}\Omega_3^2], \tag{2.3.18}$$

可得 $k = \dfrac{H}{3}\cot\theta$. 又由

$$I^K = Ka^3 + I$$
$$\mathrm{d}s^2 = \sigma^2[\mathrm{d}\tau^2 + a^2\mathrm{d}\Omega_3^2] = \sigma^2 a^2(\mathrm{d}\eta^2 + \mathrm{d}\Omega_3^2)$$

可知

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\int \mathrm{d}\eta\left[-\left(\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\eta}\right)^2 - a^2 + \lambda a^4\right] \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{\sin\theta}{H^2}(\sin^2\theta - 1 - \cos\theta)\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2H^2}\left[-\frac{1}{3}\cos\theta(\sin^2\theta + 2) + \cos\theta + \frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_0^\theta . \end{aligned}$$

式中 θ 为边界值. 由此可得

$$I^K = \frac{1}{3a}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\tau}\cdot a^3\bigg|_\theta + I = \frac{1}{3H^2}\cos\theta\sin^2\theta + I,$$
$$I^K = -\frac{1}{3H^2}\left[1 - \frac{K}{(\kappa^2+1)^{1/2}}\right]. \tag{2.3.19}$$

式中

$$\kappa = \frac{3}{H}k = \cot\theta. \tag{2.3.20}$$

在 $K(k)$ 表象中, 与 (2.3.16) 对应地有

$$\Phi_0(k_0, \chi_0) = \int \delta a \delta\chi \exp(-I^k[a, \chi]).$$

求和是在与 (2.3.16) 相同的几何和场上进行的, 只是现在要求在三维曲面边界上 k 取给定值. 即在边界上它们要满足

$$k_0 = \frac{1}{3a}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\tau}. \tag{2.3.21}$$

满足此要求的作用量是

$$I^k = k_0 a_0^3 + I. \tag{2.3.22}$$

如果算出了 $\Phi_0(k_0, \chi_0)$, 则通过线积分便可还原为 $\Psi_0(a_0, \chi_0)$

$$\Psi_0(a_0, \chi_0) = -\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C \mathrm{d}k \exp(ka_0^3)\Phi_0(k_0, \chi_0). \tag{2.3.23}$$

式中积分从 $-\mathrm{i}\infty$ 到 $+\mathrm{i}\infty$.

从普遍的观点看, 直接从 (2.3.16) 计算 $\Psi_0(a_0,\chi_0)$ 和通过 K 表象 (2.3.23) 计算没有区别. 在半经典近似下, 我们有

$$\Phi_0(K_0)=N\int\delta a\exp(-I^K)\approx N\exp[-I^K(K_0)], \tag{2.3.24}$$

$$\begin{aligned}\Psi_0(a_0)&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C \mathrm{d}K\exp\left[\frac{4}{3}\int h^{1/2}\mathrm{d}^3x\cdot K\right]\Phi_0(K)\\&=-\frac{N}{2\pi\mathrm{i}}\int\mathrm{d}K\exp(ka_0^3-I^K)\\&=-\frac{N}{2\pi\mathrm{i}}\exp[-I^K(K_0)+k_0a_0^3]\\&=-\frac{N}{2\pi\mathrm{i}}\exp(-I).\end{aligned} \tag{2.3.25}$$

式中 I 和 I^K 分别为 $h^{1/2}$ 表象和 K 表象中的纯引力场作用量. 在推导上式过程中用到了积分

$$\frac{4}{3}\int h^{1/2}\mathrm{d}^3xK=\frac{4}{3}\int(\sigma a)^3\mathrm{d}\Omega_3\left(\frac{9}{\sigma}k\right)=a^3k=\frac{H}{3}a^3\kappa.$$

式中 $\int\mathrm{d}^3x=\sigma^3a^3\int\mathrm{d}\Omega_3=2\pi^2\sigma^3a^3$.

按最小作用量原理有

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\kappa}=0,$$

由此可得

$$\sin\theta=Ha_0=\frac{a_0}{H^{-1}}, \tag{2.3.26}$$

而

$$\sin\theta=(1+\cot^2\theta)^{-1/2}=\frac{1}{(1+\kappa^2)^{1/2}}.$$

解之得

$$\kappa=\pm\frac{1}{Ha_0}\sqrt{1-H^2a_0^2},$$

即

$$\kappa^2=\frac{1-H^2a_0^2}{H^2a_0^2}. \tag{2.3.27}$$

把 (2.3.27) 代入 (2.3.19), 得到

$$I_\pm\doteq-\frac{1}{3H^2}[1\pm(1-H^2a_0^2)^{3/2}]. \tag{2.3.28}$$

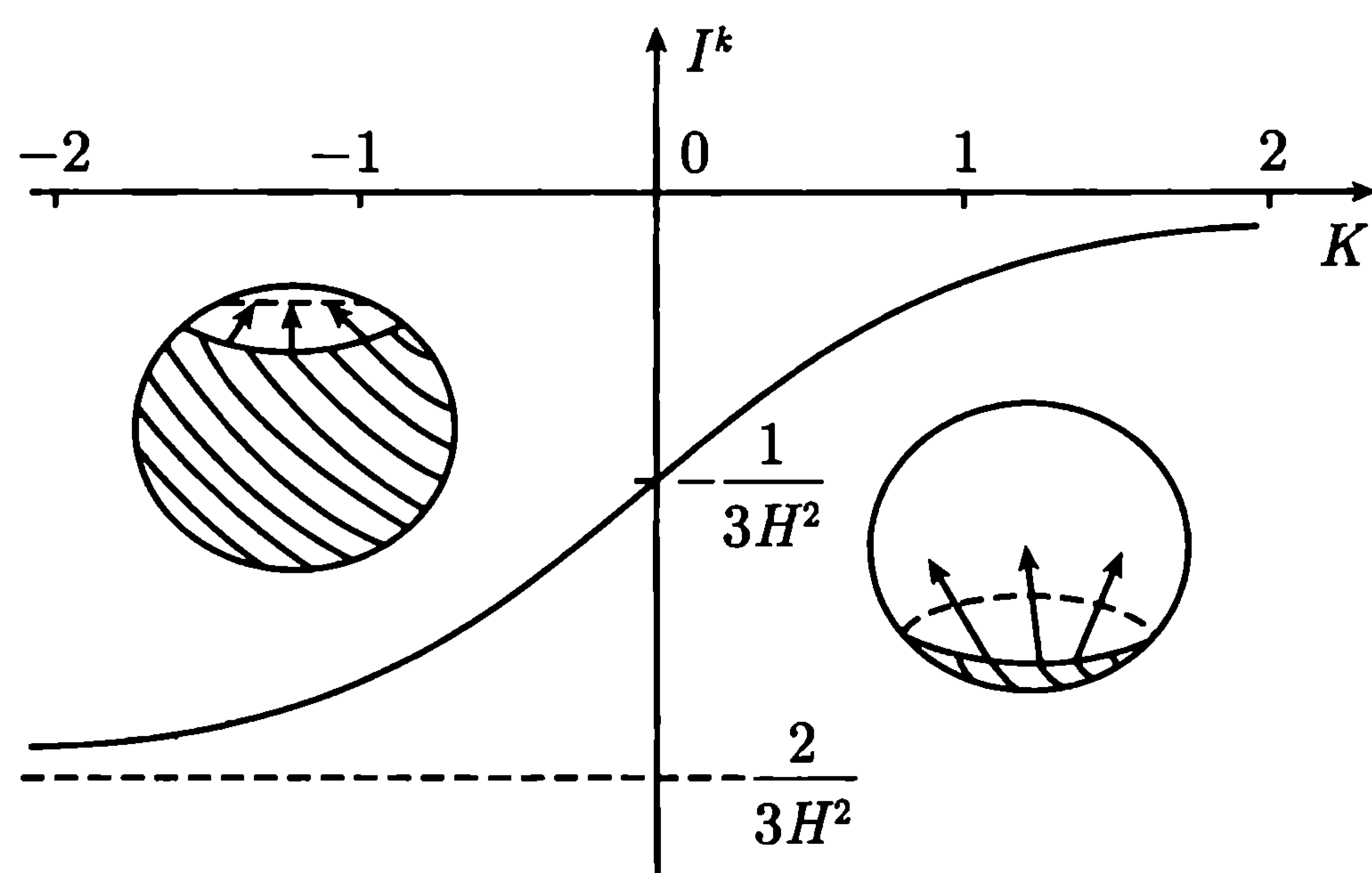


图 8-3

当 $Ha_0<1$, 即 3 球半径 a_0 小于 4 球半径 H^{-1}, 这相当于宇宙处于欧氏号差的量子演化阶段. I 的极值点出现在等值反号的实 κ 值, 此 3 球半径与 4 球半径之比为 $\sin\theta$.

$\kappa<0$ 对应于 4 球被 3 球面包围的部分大于 4 球半径. $\kappa\to-\infty$ 表示 4 球完全被 3 球面包围, 当 $I\to-\dfrac{2}{3H^2}$ 时即成为 de Sitter 空间的欧氏作用量 (图 8-3).

在经典近似下, 必须令积分路径经过作用量 I 的极值点. 由此可得

$$\varPsi_0=N\exp[-I_-(a_0)]=N\exp\left\{\kappa a_0^3+\frac{1}{3H^2}[1-(1-H^2a_0^2)^{3/2}]\right\}. \tag{2.3.29}$$

当 $Ha_0\ll1$, 上式可写为

$$\begin{aligned}\varPsi_0&\approx\exp\left[\kappa a_0^3+\frac{1}{2}a_0^2-\frac{1}{3}H^{-2}\right],\\ N&=\exp\left(-\frac{1}{3}H^{-2}\right).\end{aligned} \tag{2.3.30}$$

在上式中, 我们只取了 $\kappa>0$ 时的 I_-, 这是由于积分路径应选在右半复 κ 平面的缘故.

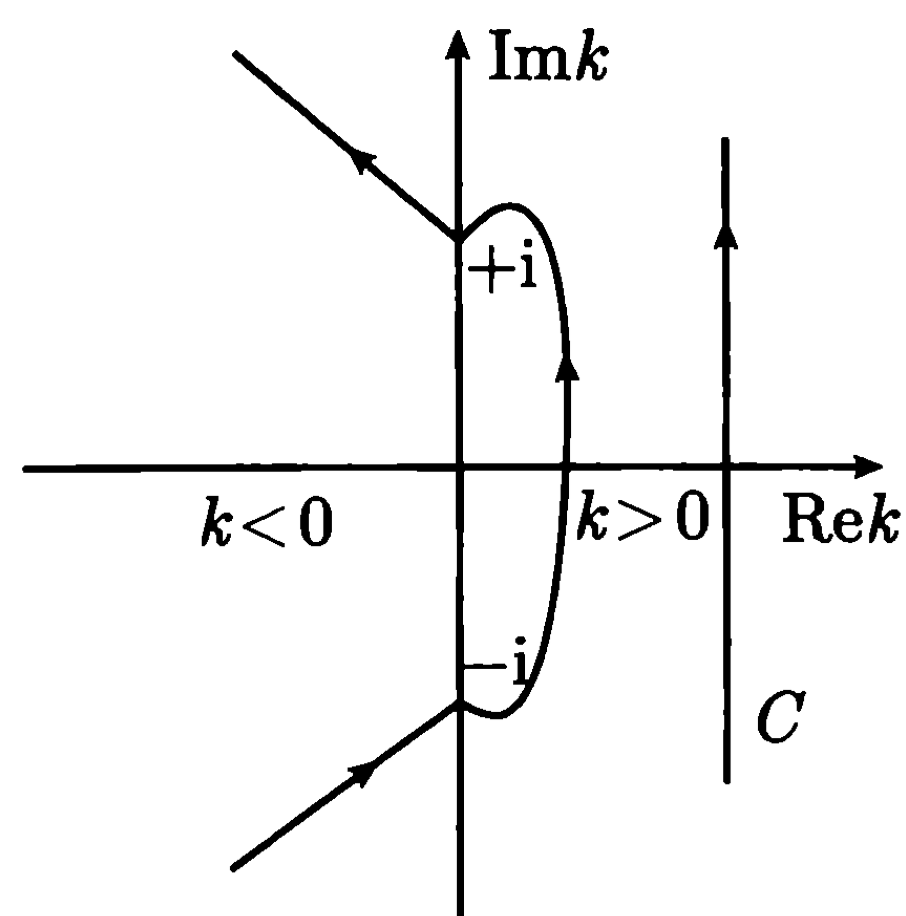


图 8-4

由 (2.3.29) 和 (2.3.30) 可以看出, 宇宙波函数随 a 增大而指数增大. 特别是在 (2.3.30) 中, 令 $a_0=0$ 时, ψ 是有意义的且不为零. 这表明宇宙将从欧氏号差的量子相 De Sitter 空间膨胀到处于洛伦兹号差的经典 de Sitter 空间中去. 在广义相对论宇宙学中的大爆炸奇点 ($a=0$) 在量子宇宙学中不复存在.

当 $Ha_0>1$, 即 3 球半径 a_0 大于 4 球半径 H^{-1}, 这相当于宇宙处于洛伦兹号差的经典 de Sitter 演

化阶段. 作用量 I 的极值出现在等值反号的虚 K 值 (图 8-4), 即

$$K = \pm\frac{\mathrm{i}}{3}H\left(1 - \frac{1}{H^2a_0^2}\right)^{1/2} \tag{2.3.31}$$

在经典极限下, 应令积分路径经过作用量的极值点, 由此可得

$$\Psi_0(a_0) = 2\cos\left[\frac{(H^2a_0^2 - 1)^{3/2}}{3H^2} - \frac{\pi}{4}\right]. \tag{2.3.32}$$

当 $Ha_0 \gg 1$, 上式可写为

$$\Psi_0(a_0) = \exp\left[\frac{\mathrm{i}}{3}Ha_0^3\right] + \exp\left[-\frac{\mathrm{i}}{3}Ha_0^3\right]. \tag{2.3.33}$$

这一结果和 (2.3.14) 相符合, 这表明欧氏路径积分表述的半经典近似所得到的解满足 W-D 方程所要求的渐近形式 (图 8-5).

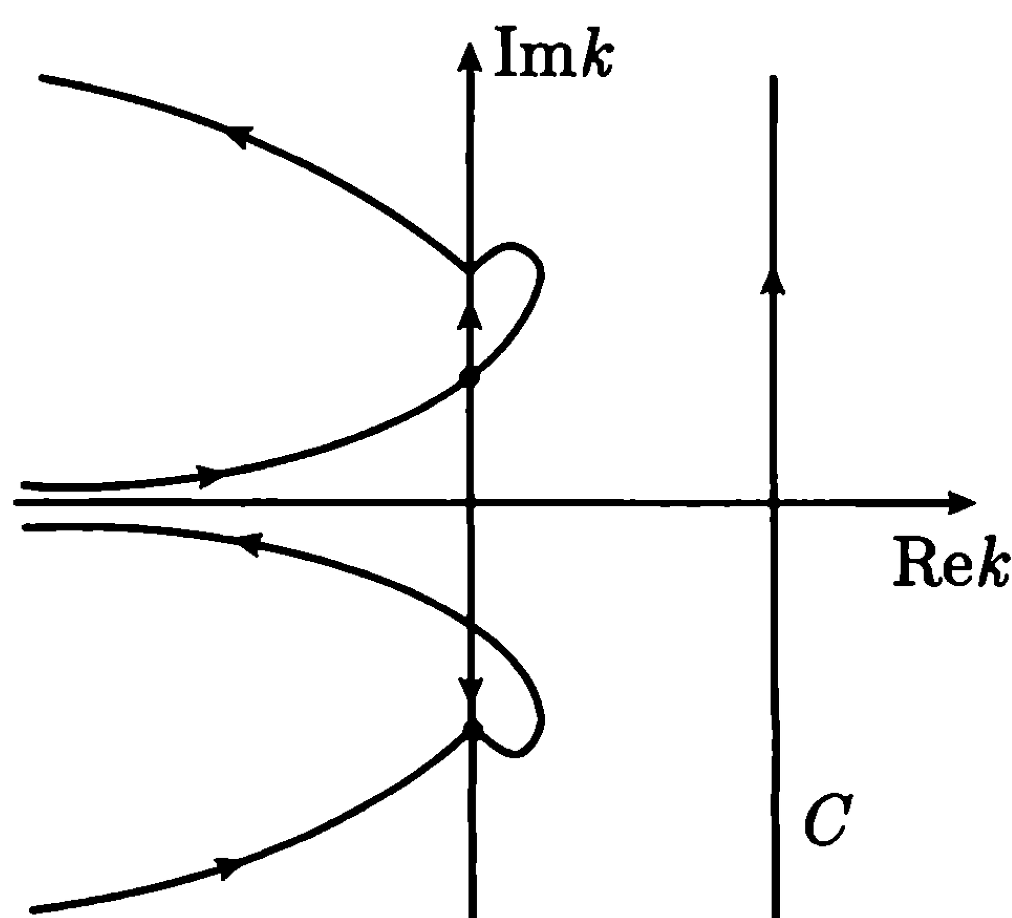


图 8-5

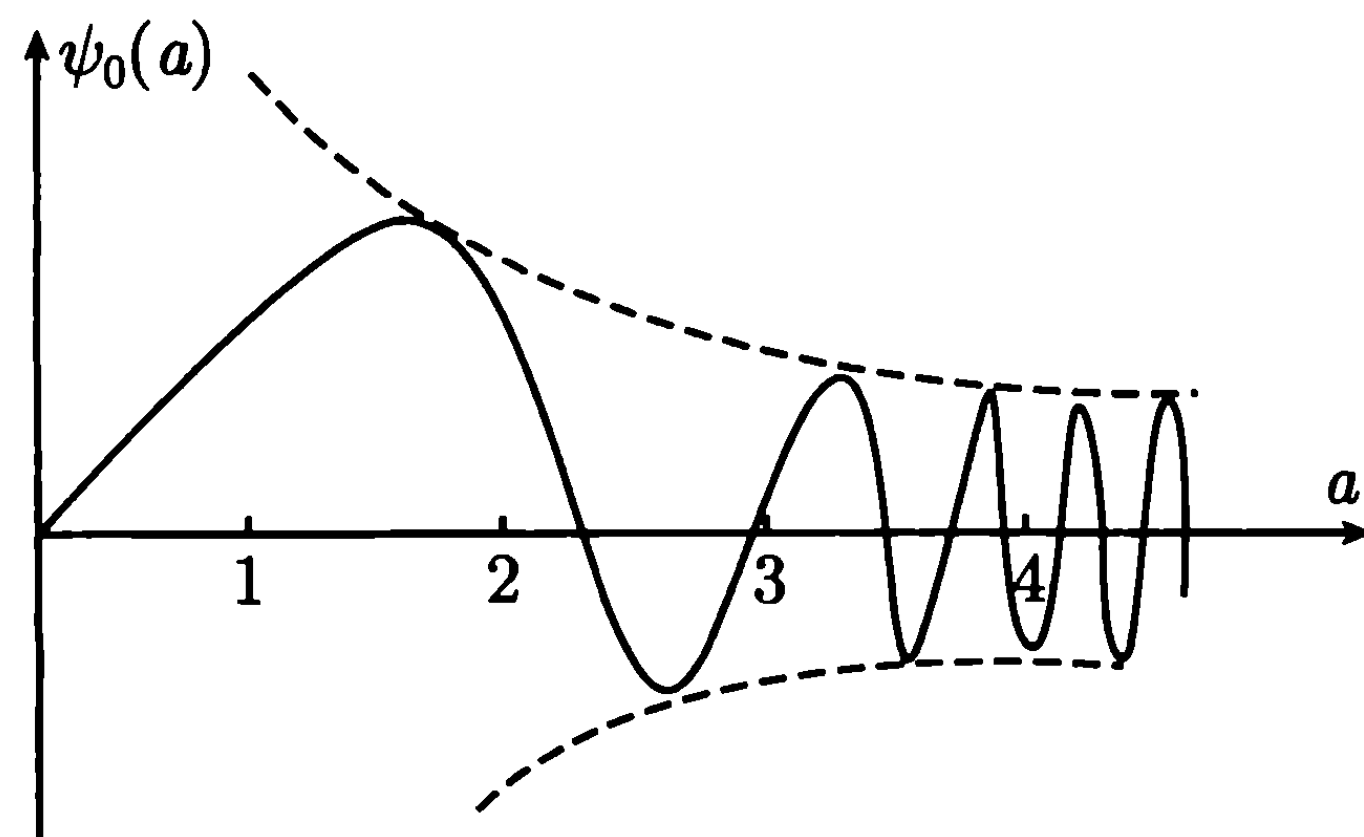


图 8-6

由 (2.3.32) 和 (2.3.33) 可知, 处于经典 de Sitter 相的宇宙波函数是一个振荡函数. 这表明

(1) 各种尺度因子 (de Sitter 宇宙) 都可能以相同的几率出现;

(2) de Sitter 宇宙可以无限地膨胀下去. 如果在 (2.3.11a) 中考虑到物质场能量–动量张量的重整化, 在基态情况下, (2.3.11a) 应写为

$$\frac{1}{2}\left[-\frac{\mathrm{d}^2C_n}{\mathrm{d}a^2} + (a^2 - \lambda a^4)C_n\right] = \left(\frac{1}{2} - \epsilon_0\right)C_n. \tag{2.3.34}$$

设 $p = 0, \epsilon = -\frac{1}{2}, \Psi_0(a = 0) = 0$, 则 (2.3.34) 的数值解如图 8-6 所示. 当 $Ha < 1$ 时, 振幅迅速衰减, 这相当于欧氏 de Sitter 相. 当 $Ha > 1$ 时, 振幅衰减很慢, 这相当于无限膨胀的洛伦兹 de Sitter 相. 由于量子欧氏相对于隧道效应, 因此 H-H 的量子宇宙学提供了一个宇宙从“无”经过量子隧道效应自发创生的图像.

第3章　宇宙结构的起源

如前所述, 用一紧致四维度规的路径积分来确定宇宙的量子态, 这可看作超空间宇宙波函数的边界条件, 而这个超空间包括三维超曲面上的所有三维度规和物质场. Halliwell 和 Hawking 把以前的超空间有限维近似推广到无限维超空间, 严格给出了两个均匀各向同性自由度的小超空间模型, 把哈密顿中其他的非均匀、各向异性自由度精确到二阶项. 明确地指出, 各种非均匀性和各向异性都从它们的基态出发. 对于每一模式都可以得到与时间有关的薛定谔方程. 这些模式一直处于基态, 直到他们的波长超出了暴胀期的视界线度. 基态涨落被随后的膨胀进一步扩大. 可以得到一密度扰动谱; 原则上, 这个谱可用来解释银河系和所有其他结构的起源. 如果导致暴胀的标量场的质量为 10^4GeV 或更少, 则这个涨落与微波背景辐射的观测相符合.

3.1　引　　言

微波背景辐射的观测表明, 宇宙在大尺度上是均匀、各向同性的. 但宇宙极早期却不可能是完全均匀和各向同性的, 因那样的星系和恒星是不可能形成的. 在标准大爆炸宇宙模型中, 用来产生宇宙结构的密度扰动不得不假定为初始条件. 在暴胀宇宙模型中, 引起宇宙暴胀的标量场的基态涨落可能导致密度扰动. 最简单的大统一暴胀模型预言的密度扰动幅太大. 其他具有不同势的标量场模型, 有一些原则上可以得到与观测一致的扰动幅. 引力波模式的基态涨落给出一个长波引力波谱, 与观测相符合 —— 由这一波谱得到的暴胀期哈勃常数不超过普朗克质量的 10^{-4} 倍.

但是这些结果对宇宙起源的解释不能令人满意, 因为暴胀模型并没有假定初始或边界条件. 特别是它不能保证存在一个典型的暴胀期, 在此期间标量场和引力波模型均处于基态. 如果没有宇宙的边界条件, 目前的任何状态都是可能的 —— 人们可以选择任一状态, 然后沿着时间逆推回去, 看它导致什么样的初始条件. H-H 量子宇宙学认为, 宇宙的边界条件就是宇宙没有边界. 即用没有边界的紧致四维度规的路径积分来确定宇宙的量子状态. 描述宇宙量子态的波函数 Ψ 是无限维空间 (超空间)W 上的函数, 这个超空间包括三维超曲面 S 上所有的三维度规和物质场构型 Φ_0. 因为波函数不明显地依赖于时间, 所以它满足零能薛定谔方程. 薛定谔方程可以分解为动量约束, 这意味着波函数在空间上的任何一点都是相同的. 波函数

由路径积分给出, 这一要求就变成了决定 Ψ 唯一解的 W-D 方程的一组边界条件.

在本章中, 将小超空间推广到引力、标量场具有更大自由度的情况, 严格给出两个均匀各向同性自由度的小超空间模型, 把哈密顿中其他非均匀各向异性的自由度精确到二阶项. 在 Ψ 剧烈震荡的 W 区域, 采用 WKB 近似地把波函数与经典解联系起来, 由此引出时间概念. 与前面的小超空间模型一样, 这组解中包括一个具有长暴胀期的解. 就经典解的时间参数而言, 引力波和密度扰动模式满足退耦与时间有关的薛定谔方程. 边界条件意味着这些模式都从基态出发. 它们仍留在暴胀相的视界内时, 由于膨胀可以是绝热的, 所以它们仍然处于基态. 但是当超过了暴胀相的视界时它们就"冻结"了, 直到再进入物质为主时期的视界. 随后, 他们产生引力波和密度扰动谱, 这与微波背景辐射一致. 如果标量场的质量是普朗克质量的 10^{-5} 倍, 还可以解释星系的起源. 因此, 原则上路径积分定义宇宙量子态的理论可以解释宇宙结构的起源; 最终解释不是来自任何初始条件, 而是来自海森伯测不准原理决定的基态量子涨落.

3.2　广义相对论的正则形式

考虑到四维流形分成两部分的三维超曲面 S. 在 S 的邻域里, 引入坐标 t, S 是 $t=0$ 和 $x^i(i=1,2,3)$ 的超曲面. 如前所述, 度规具有形式 (1.1.6)

$$\mathrm{d}s^2 = -(N^2 - N_iN^i)\mathrm{d}t^2 + 2N_i\mathrm{d}x^i\mathrm{d}t + h_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j. \tag{3.2.1}$$

作用量

$$I = \int (L_\mathrm{g} + L_\mathrm{m})\mathrm{d}^3x\mathrm{d}t. \tag{3.2.2}$$

式中

$$L_\mathrm{g} = \frac{m_\mathrm{P}^2}{16\pi}N(G^{ijkl}K_{ij}K_{kl} + h^{1/2}\ {}^3R). \tag{3.2.3}$$

$$K_{ij} = \frac{1}{2N}\left[-\frac{\partial h_{ij}}{\partial t} + 2N_{(i|j)}\right]; \tag{3.2.4}$$

$$G^{ijkl} = \frac{1}{2}h^{1/2}(h^{ik}h^{jl} + h^{il}h^{jk} - 2h^{ij}h^{kl}). \tag{3.2.5}$$

在有质量标量场中,

$$L_m = \frac{1}{2}Nh^{1/2}\left[N^{-2}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)^2 - 2\frac{N_i}{N^2}\frac{\partial \Phi}{\partial t}\frac{\partial \Phi}{\partial x^i} - \left(h^{ij} - \frac{N^iN^j}{N^2}\right)\frac{\partial \Phi}{\partial x^i}\frac{\partial \Phi}{\partial x^j} - m^2\Phi^2\right]. \tag{3.2.6}$$

在广义相对论的哈密顿表述中, 人们把 h_{ij} 和场 Φ 作为正则坐标, 正则共轭动量为

$$\pi^{ij} = \frac{\partial L_g}{\partial \dot{h}_{ij}} = -\frac{1}{16\pi} h^{1/2} m_{\rm p}^2 (K^{ij} - h^{ij} K), \tag{3.2.7}$$

$$\pi_\phi = \frac{\partial L_m}{\partial \dot{\Phi}} = N^{-1} h^{1/2} \left(\dot{\Phi} - N^i \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} \right). \tag{3.2.8}$$

哈密顿为

$$\begin{aligned} H &= \int (\pi^{ij} \dot{h}_{ij} + \pi_\phi \dot{\Phi} - L_g - L_m) \mathrm{d}^3 x \\ &= \int (N H_0 + N_i H^i) \mathrm{d}^3 x. \end{aligned} \tag{3.2.9}$$

式中

$$\begin{aligned} H_0 = {} & 16\pi m_{\rm p}^{-2} G_{ijkl} \pi^{ij} \pi^{kl} - \frac{m_{\rm p}^2}{16\pi} h^{1/2} \, {}^3R \\ & + \frac{1}{2} h^{1/2} \left(\frac{\pi_\phi^2}{h} + h^{ij} \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} \frac{\partial \Phi}{\partial x^j} + m^2 \Phi^2 \right), \end{aligned} \tag{3.2.10}$$

$$H^i = -2\pi^{ij}_{|j} + h^{ij} \frac{\partial \Phi}{\partial x^j} \pi_\phi \tag{3.2.11}$$

以及

$$G_{ijkl} = \frac{1}{2} h^{-\frac{1}{2}} (h_{ik} h_{jl} + h_{il} h_{jk} - h_{ij} h_{kl}). \tag{3.2.12}$$

量 N 和 N_i 作为拉格朗日乘子, 所以解满足

$$H^i = 0, \tag{3.2.13}$$

$$H_0 = 0. \tag{3.2.14}$$

运动方程为

$$\begin{aligned} \dot{h}_{ij} &= \frac{\partial H}{\partial \pi^{ij}}, \quad \dot{\pi}^{ij} = -\frac{\partial H}{\partial h_{ij}}, \\ \dot{\Phi}_{ij} &= \frac{\partial H}{\partial \pi_\phi}, \quad \dot{\pi}_\phi = -\frac{\partial H}{\partial \Phi}. \end{aligned} \tag{3.2.15}$$

3.3 量 子 化

如前所述, 宇宙的量子态由一个波函数 Ψ 描述, 它是 S 面上所有三维度规 h_{ij} 和物质场 Φ 的无限维流形 W 上的函数, W 的切矢量为 S 上的一对场 (γ_{ij}, μ), 其

中 γ_{ij} 可看作度规 h_{ij} 的无穷小改变量, μ 可看作 Φ 的无穷小改变量, 对于 S 上 $N>0$ 的每一选择, 有一个 W 上的自然度规 $\Gamma(N)$

$$\mathrm{d}s^2=\int N^{-1}\left(\frac{m_{\mathrm{p}}^2}{32\pi}G^{ijkl}\gamma_{ij}\gamma_{kl}+\frac{1}{2}h^{1/2}\mu^2\right)\mathrm{d}^3x. \tag{3.3.1}$$

波函数不明显依赖于时间 t, 因为 t 只不过是通过选择不同的 N 和 N_i 值可给以任何值的坐标. 这表示 Ψ 满足零能薛定谔方程

$$H\Psi=0, \tag{3.3.2}$$

算符 H 是经典哈密顿, 具有通常的代换关系

$$\pi^{ij}(x)\to\mathrm{i}\frac{\delta}{\delta h_{ij}(x)},\ \pi_{\phi}(x)\to-\mathrm{i}\frac{\delta}{\delta\Phi(x)}. \tag{3.3.3}$$

因为 N 和 N_i 是两个独立的拉格朗日乘子, 所以薛定谔方程可分为两个部分. 动量约束为

$$\begin{aligned}H\Psi&\equiv\int N_iH^i\mathrm{d}^3x\Psi\\&=\int h^{1/2}N_i\left[\left(\frac{\delta}{\delta h_{ij}(x)}\right)_{|j}-h^{ij}\frac{\partial\Phi}{\partial x^j}\frac{\delta}{\delta\Phi(x)}\right]\mathrm{d}^3x\Psi\\&=0.\end{aligned} \tag{3.3.4a}$$

这表明波函数 Ψ 对于三维度规和物质场构形是相同的. 薛定谔方程的另一部分为

$$H_1\Psi=0. \tag{3.3.4b}$$

式中 $H_1=\int NH_0\mathrm{d}^3x$. (3.3.4b) 即 W-D 方程. 我们假设 $H_1\Psi=0$ 具有形式

$$\left(-\frac{1}{2}\nabla^2+\xi R+V\right)\Psi=0. \tag{3.3.5}$$

式中 ∇^2 是度规 $\Gamma(N)$ 中的拉普拉斯算符, R 是这个度规的标曲率, 势 V 是

$$V=\int h^{1/2}N\left[-\frac{m_{\mathrm{p}}^2}{16\pi}3R+\varepsilon+U\right]\mathrm{d}^3x. \tag{3.3.6}$$

式中 $U=T^{00}-\frac{1}{2}\pi_{\phi}^2$, 常数 ε 可看作宇宙常数 Λ 的重整化. 我们假设重整化的 Λ 为零, 且 R 的系数 ξ 为零.

对于 S 上 N 和 N_i 的任一选择, 任何满足动量约束和 W-D 方程的波函数 Ψ 都描述一个可能的宇宙量子态. 其中一个特解是以路径积分表示的

$$\Psi=\int\mathrm{d}[g_{\mu\nu}]\mathrm{d}[\Phi]\exp[-\hat{I}(g_{\mu\nu},\Phi)]. \tag{3.3.7}$$

式中 $\hat{I}$ 为欧氏作用量 (设 N 为负虚数). 可以把 (3.3.7) 看作 W-D 方程的边界条件. 这意味着当 h_{ij} 为零时 Ψ 趋于一个常数 (可归一化为 1).

3.4 未受扰动的弗里德曼模型

考虑由弗里德曼模型构成的小超空间. 弗里德曼度规为

$$\mathrm{d}s^2 = \sigma^2(-N^2\mathrm{d}t^2 + a^2\mathrm{d}\Omega_3^2). \tag{3.4.1}$$

式中 $\mathrm{d}\Omega_3^3$ 是单位三维球度规. 为了方便, 引入一个规一化常数 $\sigma^2 = 2/3\pi m_\mathrm{p}^2$. 这个模型包括一个质量为 σ_m^{-1} 的标量场 $(\sqrt{2}\pi\sigma)^{-1}\phi$, 其质量在 t 为常数的超曲面上是常数. 我们很容易将其推广到势为 $V(\phi)$ 的标量场. 其中包括具有高阶导数量子修正的一些模型. 作用量为

$$I = -\frac{1}{2}\int \mathrm{d}tNa^3\left[\frac{1}{N^2a^2}\left(\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\right)^2 - \frac{1}{a^2} - \frac{1}{N^2}\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}\right)^2 + m^2\phi^2\right]. \tag{3.4.2}$$

经典哈密顿为

$$H = \frac{1}{2}N(-a^{-1}\pi_a^2 + a^{-3}\pi_\phi^2 - a + a^3m^2\phi^2). \tag{3.4.3}$$

式中

$$\pi_a = -\frac{a}{N}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}, \quad \pi_\phi = \frac{a^3}{N}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}. \tag{3.4.4}$$

经典哈密顿约束为 $H = 0$. 经典场方程为

$$N\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{N}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}\right) + \frac{3}{a}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} + N^2m^2\phi = 0. \tag{3.4.5}$$

$$N\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{N}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\right) = N^2am^2\phi^2 - 2a\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}\right)^2. \tag{3.4.6}$$

W-D 方程为

$$\frac{1}{2}N\mathrm{e}^{-3\alpha}\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} - \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + 2V\right)\Psi(\alpha,\phi) = 0, \tag{3.4.7}$$

式中

$$V = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{6\alpha}m^2\phi^2 - \mathrm{e}^{4\alpha}), \tag{3.4.8}$$

且 $\alpha = \ln a$. 我们把 (3.4.7) 作为具有坐标 (α,ϕ) 的平直空间中 Ψ 的双曲方程, α 作为时间坐标. 边界条件是当 $\alpha \to -\infty$ 时 $\Psi \to 1$. 积分 (3.4.7), 我们发现波函数在区域开始振荡 (这个已由数值计算给出). 可以由 WKB 近似来解释波函数的振荡部分

$$\Psi = \mathrm{Re}(C\mathrm{e}^{\mathrm{i}S}). \tag{3.4.9}$$

式中 C 是缓变振幅, S 是剧烈变化的相位. 选择 S, 使之满足经典哈密顿–雅可比方程

$$H(\pi_\alpha, \pi_\phi, \alpha, \phi) = 0. \tag{3.4.10}$$

式中

$$\pi_\alpha = \frac{\partial S}{\partial \alpha}, \quad \pi_\phi = \frac{\partial S}{\partial \phi}. \tag{3.4.11}$$

(3.4.10) 可改写为

$$\frac{1}{2} f^{ab} \frac{\partial^2 S}{\partial q^a \partial q^b} + \mathrm{e}^{-3\alpha} V = 0. \tag{3.4.12}$$

式中 f^{ab} 是度规 $\Gamma(1)$ 的逆

$$f^{ab} = \mathrm{e}^{-3\alpha} \mathrm{diag}(-1, 1). \tag{3.4.13}$$

为了使波函数 (3.4.9) 满足 W-D 方程, 只要有

$$\nabla^2 C + 2\mathrm{i} f^{ab} \frac{\partial C}{\partial q^a} \frac{\partial S}{\partial q^b} + \mathrm{i} c \nabla^2 S = 0, \tag{3.4.14}$$

式中 ∇^2 为度规 f_{ab} 的拉普拉斯算符. 我们可以忽略上式中的第一项, 沿着矢量场 $X^\alpha = \mathrm{d}q^\alpha/\mathrm{d}t = f^{ab}\partial S/\partial q^b$ 的矢量线 (与经典解对应) 积分上式, 从而确定振幅 C.

由 $V = 0, |\phi| > 1, \mathrm{d}\alpha/\mathrm{d}t = \mathrm{d}\phi/\mathrm{d}t = 0$ 开始, 使函数振荡部分的解按指数规律膨胀

$$\begin{aligned} S &= -\frac{1}{3} \mathrm{e}^{3\alpha} m |\phi| (1 - m^{-2} \mathrm{e}^{-2\alpha} \phi^{-2}) \\ &\approx -\frac{1}{3} \mathrm{e}^{3\alpha} m |\phi|, \end{aligned} \tag{3.4.15}$$

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = m|\phi|, \quad \frac{\mathrm{d}|\phi|}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{3} m. \tag{3.4.16}$$

经过量级为 $3m^{-1}(|\phi_1| - 1)$ 的时间之后, 场 ϕ 开始振荡, 频率为 m, 式中 ϕ_1 为 ϕ 的初值. 此后, 解变为物质为主的, 且 e^α 与 $t^{2/3}$ 成正比膨胀. 如果存在其他场, 有质量标量粒子将分解为光子, 且 e^α 和 $t^{1/2}$ 成正比膨胀. 最后此解会达到一个最大半径, 其值可能为 $\exp(9\phi_1^2/2)$ 或 $\exp(9\phi_1^2)$; 对于大多数膨胀, 这依赖于是辐射为主的还是物质为主的, 此后用类似的方式重新收缩.

3.5 扰动的弗里德曼模型

假设度规仍取 (3.2.1) 的形式, 只在右端乘以一个因子 σ^2, 三维度规具有形式

$$h_{ij} = a^2(\Omega_{ij} + \epsilon_{ij}). \tag{3.5.1}$$

式中 Ω_{ij} 为单位三维球度规, ϵ_{ij} 为度规的一个扰动, 可按谐函数展开:

$$\epsilon_{ij}=\sum_{nlm}\left[6^{1/2}a_{nlm}\frac{1}{3}\Omega_{ij}Q^n_{lm}+6^{1/2}b_{nlm}(P_{ij})^n_{lm}+2^{1/2}C^0_{nlm}(S^0_{ij})^n_{lm}+2^{1/2}c^e_{nlm}(S^e_{ij})^n_{lm}\right.$$
$$\left.+2\mathrm{d}^0_{nlm}(G^0_{ij})^n_{lm}+2\mathrm{d}^e_{nlm}(G^e_{ij})^n_{lm}\right]. \tag{3.5.2}$$

系数 $a_{nlm},\cdots,d^2_{nlm}$ 都是时间 t 的函数, 不是空间坐标 χ^i 的函数. $Q(\chi^i)$ 为三维球上的标量谐函数. $P_{ij}(x^i)$ 由式

$$P_{ij}=\frac{1}{n^2-1}Q_{ij}+\frac{1}{3}\Omega_{ij}Q \tag{3.5.3}$$

给出 (这里除 ij 以外的附标都隐去了), P_{ij} 是无迹的, $P^i_i=0$. S_{ij} 由式

$$S_{ij}=S_{i|j}+S_{j|i} \tag{3.5.4}$$

给出, 式中 S_i 是横矢量谐函数, $S^{|i}_i=0$. G_{ij} 是无迹横张量谐函数, $G^i_i=G^{|j}_{ij}=0$. 下一节我们详细讨论谐函数和它们的正交归一性.

时移、位移和标量场均可用谐函数展开

$$N=N_0\left[1+6^{-\frac{1}{2}}\sum_{n,l,m}g_{nlm}Q^n_{lm}\right], \tag{3.5.5}$$

$$N_i=\mathrm{e}^\alpha\sum_{n,l,m}\left[6^{-\frac{1}{2}}k_{nlm}(P_i)^n_{lm}+\sqrt{2}j_{nlm}(S_i)^n_{lm}\right], \tag{3.5.6}$$

$$\Phi=\sigma^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{2}\pi}\phi(t)+\sum_{n,l,m}f_{nlm}Q^n_{lm}\right]. \tag{3.5.7}$$

式中 $P_i=[1/(n^2-1)]Q_{|i}$. 为了简化, 下面 n,l,m,o,e 都用 n 表示. 这样, 我们可以把作用量用各 (全部) 阶的背景量 a,ϕ,N_0 的项展开, 而"扰动"则只到 2 阶项

$$I=I_0(a,\phi,N_0)+\sum_n I_n. \tag{3.5.8}$$

式中 I_0 是未受扰动模型 (3.4.2) 的作用量, I_n 是扰动的二次式.

我们可以用一般方式定义共轭动量

$$\pi_a=-N_0^{-1}\mathrm{e}^{3\alpha}\dot{\alpha}+2\text{ 阶项}, \tag{3.5.9}$$

$$\pi_\phi=N_0^{-1}\mathrm{e}^{3\alpha}\dot{\phi}+2\text{ 阶项}, \tag{3.5.10}$$

$$\pi_{a_n} = -N_0^{-1}\mathrm{e}^{3\alpha}\left[\dot{a}_n + \dot{\alpha}(a_n - g_n) + \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-\alpha}k_n\right], \tag{3.5.11}$$

$$\pi_{b_n} = N_0^{-1}\mathrm{e}^{3\alpha}\frac{n^2-4}{n^2-1}\left(\dot{b}_n + 4\dot{\alpha}b_n - \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-\alpha}k_n\right), \tag{3.5.12}$$

$$\pi_{c_n} = N_0^{-1}\mathrm{e}^{3\alpha}(n^2-4)(\dot{c}_n + 4\dot{\alpha}c_n - \mathrm{e}^{-\alpha}j_n), \tag{3.5.13}$$

$$\pi_{d_n} = N_0^{-1}\mathrm{e}^{3\alpha}(\dot{d}_n + 4\dot{\alpha}d_n), \tag{3.5.14}$$

$$\pi_{f_n} = N_0^{-1}\mathrm{e}^{3\alpha}[\dot{f}_n + \dot{\phi}(3a_n - g_n)]. \tag{3.5.15}$$

方程 (3.5.9) 和 (3.5.10) 中的 2 阶项在 3.7 节中给出. 哈密顿可由动量和其他量表示:

$$H = N_0\left[H_{|0} + \sum_n H^n_{|2} + \sum_n g_n H^n_{|1}\right] + \sum_n (k_n^S H^n_{-1} + j_n^v H^n_{-1}). \tag{3.5.16}$$

式中 H_1 和 H_- 的下标 0, 1, 2 表示扰动量的阶数, S 和 V 表示哈密顿位移的标量和矢量部分. $H_{|0}$ 是 $N=1$ 时未受扰动模型的哈密顿

$$H_{|0} = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3\alpha}(-\pi_\alpha^2 + \pi_\phi^2 + \mathrm{e}^{6\alpha}m^2\phi^2 - \mathrm{e}^{4\alpha}). \tag{3.5.17}$$

二阶哈密顿为

$$H_{|2} = \sum_n H^n_{|2} = \sum_n ({}^S H^n_{|2} + {}^v H^n_{|2} + {}^T H^n_{|2}).$$

式中

$$\begin{aligned}
{}^S H^n_{|2} =& \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3\alpha}\Bigg\{\left[\frac{1}{2}a_n^2 + \frac{10(n^2-4)}{n^2-1}b_n^2\right]\pi_\alpha^2 + \left[\frac{15}{a}a_n^2 + \frac{6(n^2-4)}{n^2-1}b_n^2\right]\pi_\phi^2 - \pi_{a_n}^2 \\
&+ \frac{n^2-1}{n^2-4}\pi_{b_n}^2 + \pi_{f_n}^2 + 2a_n\pi_{a_n}\pi_\alpha + 8b_n\pi_{b_n}\pi_\alpha - 6a_n\pi_{f_n}\pi_\phi \\
&- \mathrm{e}^{4\alpha}\left[\frac{1}{3}\left(n^2 - \frac{5}{2}\right)a_n^2 + \frac{(n^2-7)(n^2-4)}{3(n^2-1)}b_n^2 + \frac{2}{3}(n^2-4)a_nb_n - (n^2-1)f_n^2\right] \\
&+ \mathrm{e}^{6\alpha}m^2(f_n^2 + 6a_nf_n\phi) + \mathrm{e}^{6\alpha}m^2\phi^2\left[\frac{3}{2}a_n^2 - \frac{6(n^2-4)}{n^2-1}b_n^2\right]\Bigg\},
\end{aligned} \tag{3.5.18}$$

$$\begin{aligned}
{}^V H^n_{|2} =& \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3\alpha}\Bigg[(n^2-4)c_n^2(10\pi_\alpha^2 + 6\pi_\phi^2) + \frac{1}{n^2-4}\pi_{c_n}^2 \\
&+ 8c_n^2 + 8c_n\pi_{c_n}\pi_\alpha + (n^2-4)c_n^2(2\mathrm{e}^{4\alpha} - 6\mathrm{e}^{6\alpha}m^2\phi^2)\Bigg],
\end{aligned} \tag{3.5.19}$$

$${}^T H^n_{|2} = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3\alpha}\Big\{\mathrm{d}_n^2(10\pi_\alpha^2 + 6\pi_\phi^2) + \pi_{d_n}^2 + 8\mathrm{d}_n\pi_{\mathrm{d}_n}\pi_\alpha$$

$$+\,\mathrm{d}_n^2[(n^2+1)\mathrm{e}^{4\alpha}-6\mathrm{e}^{6\alpha}m^2\phi^2]\Big\}. \tag{3.5.20}$$

一阶哈密顿为

$$\begin{aligned}{}^S H^n_{-1}=&\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-3\alpha}\Big\{-a_n(\pi_\alpha^2+3\pi_\phi^2)+2(\pi_\phi\pi_{f_n}-\pi_\alpha\pi_{a_n})\\&+m^2\mathrm{e}^{6\alpha}(2f_n\phi+3a_n\phi^2)-\frac{2}{3}\mathrm{e}^{4\alpha}\Big[(n^2-4)b_n\\&+\left(n^2+\frac{1}{2}\right)a^n\Big]\Big\}.\end{aligned} \tag{3.5.21}$$

哈密顿的位移部分为

$${}^S H^n_{-1}=\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-3\alpha}\left\{-\pi_{a_n}+\pi_{b_n}+\left[a_n+\frac{4(n^2-4)}{(n^2-1)}b_n\right]\pi_d+3f_n\pi_\phi\right\}, \tag{3.5.22}$$

$${}^V H^n_{-1}=\mathrm{e}^{-\alpha}[\pi_{c_n}+4(n^2-4)c_n\pi_\alpha]. \tag{3.5.23}$$

经典场方程见 3.7 节.

拉格朗日乘子 N_0, g_n, k_n, j_n 是独立的, 所以零能薛定谔方程

$$H\Psi=0 \tag{3.5.24}$$

可分解为动量约束和 W-D 方程. 由于动量约束是线性的, 所以算符的阶数是很明确的. 于是得到

$${}^S H^n_{-1}\psi=-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-3\alpha}\left\{\frac{\partial}{\partial a_n}-\left[a_n+\frac{4(n^2-4)}{n^2-1}b_n\right]\frac{\partial}{\partial\alpha}-\frac{\partial}{\partial b_n}-3f_n\frac{\partial}{\partial\phi}\right\}\Psi=0, \tag{3.5.25}$$

$${}^V H^n_{-1}\Psi=\mathrm{e}^{-\alpha}\left[\frac{\partial}{\partial c_n}+4(n^2-4)c_n\frac{\partial}{\partial\alpha}\right]\Psi=0. \tag{3.5.26}$$

对于每一个 n, 一阶哈密顿 H^n_{-1} 给出一组有限维二阶微分方程. 为了所需要的近似, 我们可以增加一些 $\partial/\partial\alpha$ 的线性项, 它们的影响可以用 e^α 的幂乘以波函数来补偿, 不会影响不同观测的相对几率. 因此, 我们可以忽略这些不确定性和这样一些项

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3\alpha}\left\{a_n\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+3\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right)-2\left(\frac{\partial^2}{\partial f_n\partial\phi}-\frac{\partial^2}{\partial a_n\partial\alpha}\right)\right.\\&\left.+m^2\mathrm{e}^{6\alpha}(2\phi f_n+3a_n\phi^2)-\frac{2}{3}\mathrm{e}^{4\alpha}\left[(n^2-4)b_n+\left(n^2+\frac{1}{2}\right)a_n\right]\right\}\Psi=0.\end{aligned} \tag{3.5.27}$$

最后, 我们得到一个无限维二阶微分方程

$$[H_{|0}+\sum_n({}^S H^n_{|2}+{}^V H^n_{|2}+{}^T H^n_{|2})]\Psi=0. \tag{3.5.28}$$

式中 $H_{|0}$ 是未受扰动的弗里德曼小超空间模型的 W-D 方程中的算符

$$H_{|0} = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3\alpha}\left[\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} - \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + \mathrm{e}^{6\alpha}m^2\phi^2 - \mathrm{e}^{4\alpha}\right] \tag{3.5.29}$$

以及

$$\begin{aligned}
{}^{S}H^{n}_{|2} =& \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3\alpha}\left\{ - \left[-\frac{1}{2}a_n^2 + \frac{10(n^2-4)}{n^2-1}b_n^2\right]\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\right. \\
& - \left[\frac{15}{2}a_n^2 + \frac{6(n^2-4)}{n^2-1}b_n^2\right]\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial a_n^2} - \frac{n^2-1}{n^2-4}\frac{\partial^2}{\partial b_n^2} \\
& - \frac{\partial^2}{\partial f_n^2} - 2a_n\frac{\partial^2}{\partial a_n\partial\alpha} - 8b_n\frac{\partial^2}{\partial b_n\partial\alpha} + 6a_n\frac{\partial^2}{\partial f_n\partial\phi} \\
& - \mathrm{e}^{4\alpha}\left[\frac{1}{3}\left(n^2-\frac{5}{2}\right)a_n^2 + \frac{n^2-7}{3}\frac{n^2-4}{n^2-1}b_n^2\right. \\
& \left. + \frac{2}{3}(n^2-4)a_nb_n - (n^2-1)f_n^2\right] + \mathrm{e}^{6\alpha}m^2(f_n^2 + 6a_nf_n\phi) \\
& \left. + \mathrm{e}^{6\alpha}m^2\phi^2\left[\frac{3}{2}a_n^2 - \frac{6(n^2-4)}{n^2-1}b_n^2\right]\right\},
\end{aligned} \tag{3.5.30}$$

$$\begin{aligned}
{}^{V}H^{n}_{|2} =& \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3\alpha}\left[- (n^2-4)c_n^2\left(10\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + 6\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right) - \frac{1}{n^2-4}\frac{\partial^2}{\partial c_n^2}\right. \\
& \left. - 8c_n\frac{\partial^2}{\partial c_n\partial\alpha} + (n^2-4)c_n^2(2\mathrm{e}^{4\alpha} - 6\mathrm{e}^{6\alpha}m^2\phi^2)\right],
\end{aligned} \tag{3.5.31}$$

$$\begin{aligned}
{}^{T}H^{n}_{|2} =& \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3\alpha}\left\{ - d_n^2\left(10\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + 6\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right) - \frac{\partial^2}{\partial d_n^2} - 8d_n\frac{\partial^2}{\partial d_n\partial\alpha}\right. \\
& \left. + d_n^2\left[(n^2+1)\mathrm{e}^{4\alpha} - 6\mathrm{e}^{6\alpha}m^2\phi^2\right]\right\}.
\end{aligned} \tag{3.5.32}$$

(3.5.28) 称为主方程. 它不是双曲线型的, 因为在每个 ${}^{S}H^{n}_{|2}$ 都有正的二阶导数 $\dfrac{\partial^2}{\partial\alpha^2}$, 在 $H_{|0}$ 中也有正的二阶导数 $\dfrac{\partial^2}{\partial\alpha^2}$. 但是可以用动量约束 (3.5.25) 代换对 a_n 的偏导数, 然后解关于 $a_n = 0$ 的方程. 同样, 用 (3.5.26) 代换对 c_n 的偏导数, 然后解关于 $c_n = 0$ 的方程. 这样, 便可得到一个关于 f_n 的双曲方程. 如果知道了 $a_n = 0 = c_n$ 的波函数, 便可利用动量约束计算 a_n, c_n 其他值的波函数.

3.6　三维球面上的谐函数

本节我们详细讨论三维球面 S^3 上的标量、矢量和张量哈密顿的一系列性质. S^3 上的度规为 Ω_{ij}, 所以线元为

$$\mathrm{d}l^2 = \Omega_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j = \mathrm{d}\chi^2 + \sin^2\chi(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2). \tag{3.6.1}$$

附标中用一小竖表示对于度规 Ω_{ij} 的协变导数. 附标 i,j,k 的升降均用度规 Ω_{ij}.

1. 标量谐函数

标量球谐函数 $Q_{lm}^n(\chi,\theta,\phi)$ 是 S^3 上拉普拉斯算符的本征函数, 于是满足本征方程

$$Q_{|k}^{(n)|k} = -(n^2-1)Q^{(n)}, \quad n=1,2,3,\cdots \tag{3.6.2}$$

此方程的最一般的解是

$$Q^{(n)}(\chi,\theta,\phi) = \sum_{l=0}^{n-1}\sum_{m=-l}^{l} A_{lm}^n Q_{lm}^n(\chi,\theta,\phi) \tag{3.6.3}$$

的一个线性组合, 式中 A_{lm}^n 是一组任意常数, Q_{lm}^n 的显式为

$$Q_{lm}^n(\chi,\theta,\phi) = \Pi_l^n(\chi)Y_{lm}(\theta,\phi), \tag{3.6.4}$$

其中 $Y_{lm}(\theta,\phi)$ 是二维球面 S^2 上通常的球谐函数, $\Pi_l^n(\chi)$ 是福克 (Φок) 的谐和函数, 球谐函数 Q_{lm}^n 对于 S^3 上任意标量场的展开, 构成一完全正交集.

2. 矢量谐函数

横矢量谐函数是 S^3 上拉普拉斯算符的矢量本征函数, 于是它们满足本征方程

$$S_{i|k}^{(n)|k} = -(n^2-2)S_i^{(n)}, \quad n=2,3,4,\cdots \tag{3.6.5}$$

和横条件

$$S_i^{(n)|i} = 0. \tag{3.6.6}$$

(3.6.5) 和 (3.6.6) 的最一般的解是

$$S_i^{(n)}(\chi,\theta,\phi) = \sum_{l=1}^{n-1}\sum_{m=-1}^{l} B_{lm}^n (S_i)_{lm}^n(\chi,\theta,\phi) \tag{3.6.7}$$

的线性组合, 式中 B_{lm}^n 是一组任意常数. $(S_i)_{lm}^n$ 的显式在文献 [19] 中给出, 那里还指出, 可按奇的或偶的将其分类. 这样, 我们有两个线性独立的横矢量谐函数 S_i^0 和 S_i^e.

利用标量谐函数 Q_{lm}^n 可以构成第三个矢量谐函数 $(P_i)_{lm}^n$

$$P_i = \frac{1}{n^2-1}Q_{|i}, \quad n=2,3,4,\cdots \tag{3.6.8}$$

可以看出, 矢量谐函数 P_i 满足

$$\begin{aligned} P_{i|k}^{|k} &= -(n^2-3)P_i, \\ P_i^{|i} &= -Q. \end{aligned} \tag{3.6.9}$$

这三个矢量谐函数 S_i^0, S_i^e 和 P_i 对于 S^3 上任意矢量场的展开构成一完全正交系.

3. 张量谱函数

无迹的横张量谱函数 $(G_{ij})^n_{lm}(\chi,\theta,\phi)$ 是 S^3 上拉普拉斯算符的张量本征函数, 于是满足本征方程

$$G^{(n)|k}_{ij|k} = -(n^2-3)G^{(n)}_{ij}, \quad n=3,4,5,\cdots \tag{3.6.10}$$

和横的无迹的条件

$$G^{(n)|i}_{ij} = 0, \quad G^{(n)i}_{i} = 0 \tag{3.6.11}$$

(3.6.10) 和 (3.6.11) 的最一般的解是

$$G^{(n)}_{ij}(\chi,\theta,\phi) = \sum_{l=2}^{n-1}\sum_{m=-l}^{l} c^n_{lm}(G_{ij})^n_{lm}(\chi,\theta,\phi). \tag{3.6.12}$$

式中 G^n_{lm} 为一组任意常数. 和矢量的情况类似, 他们也可以分为奇的或偶的.

利用矢量谱函数 $(S^0_i)^n_{lm}$ 和 $(S^e_i)^n_{lm}$, 可构成无迹张量谱函数 $(S^0_{ij})^n_{lm}$ 和 $(S^e_{ij})^n_{lm}$, 奇的和偶的均为 (隐去附标 l,m,n)

$$S_{ij} = S_{i|j} + S_{j|i}. \tag{3.6.13}$$

由于 S_i 是无迹的, 故 $S^i_i = 0$. 另外, S_{ij} 满足

$$S^{|j}_{ij} = -(n^2-4)S_i, \tag{3.6.14}$$

$$S^{|ij}_{ij} = 0, \tag{3.6.15}$$

$$S^{|k}_{ij|k} = -(n^2-6)S_{ij}. \tag{3.6.16}$$

利用标量谱函数 Q^n_{lm}, 可以构成两个张量 $(Q_{ij})^n_{lm}$ 和 $(P_{ij})^n_{lm}$(隐去附标 n,l,m)

$$Q_{ij} = \frac{1}{3}\Omega_{ij}Q, \quad n=1,2,3, \tag{3.6.17}$$

$$P_{ij} = \frac{1}{n^2-1}Q_{|ij} + \frac{1}{3}\Omega_{ij}Q, \quad n=2,3,4. \tag{3.6.18}$$

P_{ij} 是无迹的, $P^i_i = 0$. 另外, 它满足

$$P^{|j}_{ij} = -\frac{2}{3}(n^2-4)P_i, \tag{3.6.19}$$

$$P^{|k}_{ij|k} = -(n^2-7)P_{ij}, \tag{3.6.20}$$

$$P^{|ij}_{ij} = \frac{2}{3}(n^2-4)Q. \tag{3.6.21}$$

以上六个张量谱函数 $Q_{ij}, P_{ij}, S^0_{ij}, S^e_{ij}, G^0_{ij}$ 和 G^e_{ij} 对于以上任意对称二阶张量场的展开构成一完全正交系.

4. 正交归一性

标量、矢量和张量谐函数的归一性是由正交关系式决定的. 用 $\mathrm{d}\mu$ 表示 S^3 上的标量体元, 即

$$\mathrm{d}\mu=\mathrm{d}^3x(\det \Omega_{ij})^{1/2}=\sin\chi\sin\theta\mathrm{d}\chi\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi. \tag{3.6.22}$$

Q^n_{lm} 是归一化的, 即

$$\int \mathrm{d}\mu Q^n_{lm}Q^{n'}_{l'm'}=\delta^{nn'}\delta_{ll'}\delta_{mm'}. \tag{3.6.23}$$

这表明

$$\int \mathrm{d}\mu(P_i)^n_{lm}(P^i)^{n'}_{l'm'}=\frac{1}{n^2-1}\delta^{nn'}\delta_{ll'}\delta_{mm'}, \tag{3.6.24}$$

$$\int \mathrm{d}\mu(P_{ij})^n_{lm}(P^{ij})^{n'}_{l'm'}=\frac{2}{3}\frac{n^2-4}{n^2-1}\delta^{nn'}\delta_{ll'}\delta_{mm'}. \tag{3.6.25}$$

奇的和偶的 $(S_i)^n_{lm}$ 都是归一化的, 即

$$\int \mathrm{d}\mu(S_i)^n_{lm}(S^i)^{n'}_{l'm'}=\delta^{nn'}\delta_{ll'}\delta_{mm'}. \tag{3.6.26}$$

这表明

$$\int \mathrm{d}\mu(S_{ij})^n_{lm}(S^{ij})^{n'}_{l'm'}=2(n^2-4)\delta^{nn'}\delta_{ll'}\delta_{mm'}. \tag{3.6.27}$$

最后, 奇的和偶的 $(G_{ij})^n_{lm}$ 都是归一化的, 即

$$\int \mathrm{d}\mu(G_{ij})^n_{lm}(G^{ij})^{n'}_{l'm'}=\delta^{nn'}\delta_{ll'}\delta_{mm'}. \tag{3.6.28}$$

3.7 作用量和场方程

作用量 (3.5.8) 即

$$I=I_0(\alpha,\phi,N_0)+\sum_n I_n. \tag{3.7.1}$$

式中 I_0 为未受扰动模型的作用量 (3.4.2):

$$I_0=-\frac{1}{2}\int \mathrm{d}tN_0\mathrm{e}^{3\alpha}\left[\frac{\dot{\alpha}^2}{N_0^2}-\mathrm{e}^{-2\alpha}-\frac{\dot{\phi}^2}{N_0}+m^2\phi^2\right], \tag{3.7.2}$$

I_n 是扰动中的二次式, 可写为

$$I_n=\int \mathrm{d}t(L^n_{\mathrm{g}}+L^n_{\mathrm{m}}). \tag{3.7.3}$$

式中

$$
\begin{aligned}
L_{\mathrm{g}}^{n} =& \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\alpha}N_0\left\{\frac{1}{3}\left(n^2-\frac{5}{2}\right)a_n^2+\frac{n^2-7}{3}\frac{n^2-4}{n^2-1}b_n^2\right. \\
&-2(n^2-4)c_n^2-(n^2+1)d_n^2+\frac{2}{3}(n^2-4)a_nb_n \\
&\left.+g_n\left[\frac{2}{3}(n^2-4)b_n+\frac{2}{3}\left(n^2+\frac{1}{2}\right)a_n\right]+\frac{1}{N_0}\left[-\frac{1}{3}\frac{1}{n^2-1}k_n^2+(n^2-4)j_n^2\right]\right\} \\
&+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{e}^{3\alpha}}{N_0}\left\{-\dot{a}_n^2+\frac{n^2-4}{n^2-1}\dot{b}_n^2+(n^2-4)\dot{c}_n^2+\dot{d}_n^2\right. \\
&+\dot{\alpha}\left[-2a_n\dot{a}_n+8\frac{n^2-4}{n^2-1}b_n\dot{b}_n+8(n^2-4)c_n\dot{c}_n+8d_n\dot{d}_n\right] \\
&+\dot{\alpha}^2\left[-\frac{3}{2}a_n^2+6\frac{n^2-4}{n^2-1}b_n^2+6(n^2-4)c_n^2+6d_n^2\right] \\
&+g_n\left[2\dot{\alpha}\dot{a}_n+\dot{\alpha}^2(3a_n-g_n)\right] \\
&\left.+\mathrm{e}^{-\alpha}\left[k_n\left(-\frac{2}{3}\dot{a}_n-\frac{2}{3}\frac{n^2-4}{n^2-1}\dot{b}_n+\frac{2}{3}\dot{\alpha}g_n\right)-2(n^2-4)\dot{c}_n j_n\right]\right\},
\end{aligned}
\tag{3.7.4}
$$

$$
\begin{aligned}
L_m^n =& \frac{1}{2}N_0\mathrm{e}^{3\alpha}\left\{\frac{1}{N_0^2}(\dot{f}_n^2+6a_n\dot{f}_n\dot{\phi})-m^2(f_n^2+6a_nf_n\phi)\right. \\
&-\mathrm{e}^{-2\alpha}(n^2-1)f_n^2+\frac{3}{2}\left(\frac{\dot{\phi}^2}{N_0^2}-m^2\phi^2\right)\left[a_n^2-\frac{4(n^2-4)}{n^2-1}b_n^2\right. \\
&\left.-4(n^2-4)c_n^2-4d_n^2\right]+\frac{\dot{\phi}^2}{N_0^2}g_n^2-g_n\left(2m^2f_n\phi\right. \\
&\left.\left.+3m^2a_n\phi^2+2\frac{\dot{f}_n\dot{\phi}}{N_0^2}+3\frac{a_n\dot{\phi}^2}{N_0^2}\right)-2\frac{\mathrm{e}^{-\alpha}}{N_0^2}k_nf_n\dot{\phi}\right\}.
\end{aligned}
\tag{3.7.5}
$$

π_α 和 π_ϕ 的表达式为

$$
\begin{aligned}
\pi_\alpha =& \frac{\mathrm{e}^{3\alpha}}{N_0}\left\{-\dot{\alpha}+\sum_n\left[-a_n\dot{a}_n+\frac{4(n^2-4)}{n^2-1}b_n\dot{b}_n\right.\right. \\
&\left.+4(n^2-4)c_n\dot{c}_n+4d_n\dot{d}_n\right]+\dot{\alpha}\sum_n\left[-\frac{3}{2}a_n^2\right. \\
&\left.+\frac{6(n^2-4)}{n^2-1}b_n^2+6(n^2-4)c_n^2+6d_n^2\right] \\
&\left.+\sum_n g_n\left[\dot{a}_n+\dot{\alpha}(3a_n-g_n)+\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-\alpha}k_n\right]\right\},
\end{aligned}
\tag{3.7.6}
$$

$$
\pi_\phi = \frac{\mathrm{e}^{3\alpha}}{N_0}\left\{\dot{\phi}+\sum_n\left[3a_n\dot{f}_n+\dot{\phi}\left(\frac{3}{2}a_n^2-4\frac{n^2-4}{n^2-1}b_n^2\right.\right.\right.
$$

$$-4(n^2-4)c_n^2-4d_n^2\Big)\Big)\Big]+\sum_n\left[\dot{\phi}g_n^2-g_n(\dot{f}_n+3a_n\dot{\phi})-\mathrm{e}^{-\alpha}k_nf_n\right]\Big\}. \tag{3.7.7}$$

由作用量原理, 将作用量 (3.7.1) 分别对每一个场作变分, 便得到经典场方程, 分别对 α 和 ϕ 取变分, 得到两个场方程

$$N_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{N_0}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}\right]+3\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}+N_0^2m^2\phi=2\text{ 阶项}, \tag{3.7.8}$$

$$N_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\dot{\alpha}}{N_0}\right]+3\dot{\phi}^2-N_0^2\mathrm{e}^{-2\alpha}-\frac{3}{2}(-\dot{\alpha}+\dot{\phi}-N_0^2\mathrm{e}^{-2\alpha}+N^2m^2\phi^2)=2\text{ 阶项}, \tag{3.7.9}$$

分别对扰动 a_n, b_n, c_n, d_n 和 f_n 取变分, 得到五个场方程

$$\begin{aligned}&N_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathrm{e}^{3\alpha}\frac{\dot{a}_n}{N_0}\right]+\frac{1}{3}(n^2-4)N_0^2\mathrm{e}^{\alpha}(a_n+b_n)+3\mathrm{e}^{3\alpha}(\dot{\phi}\dot{f}_n-N_0^2m^2\phi f_n)\\&=N_0^2\left[3\mathrm{e}^{3\alpha}m^2\phi^2-\frac{1}{3}(n^2+2)\mathrm{e}^{\alpha}\right]g_n+\mathrm{e}^{3\alpha}\dot{\alpha}\dot{g}_n-\frac{1}{3}N_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathrm{e}^{2\alpha}\frac{k_n}{N_0}\right],\end{aligned} \tag{3.7.10}$$

$$\begin{aligned}&N_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathrm{e}^{3\alpha}\frac{\dot{b}_n}{N_0}\right]-\frac{1}{3}(n^2-1)N_0^2\mathrm{e}^{\alpha}(a_n+b_n)\\&+\frac{1}{3}(n^2-1)N_0^2\mathrm{e}^{\alpha}g_n=\frac{1}{3}N_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathrm{e}^{2\alpha}\frac{k_n}{N_0}\right],\end{aligned} \tag{3.7.11}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathrm{e}^{3\alpha}\frac{\dot{c}_n}{N_0}\right]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathrm{e}^{2\alpha}\frac{j_n}{N_0}\right], \tag{3.7.12}$$

$$N_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathrm{e}^{3\alpha}\frac{\dot{\mathrm{d}}_n}{N_0}\right]+(n^2-1)N_0^2\mathrm{e}^{\alpha}\mathrm{d}_n=0, \tag{3.7.13}$$

$$\begin{aligned}&N_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathrm{e}^{3\alpha}\frac{\dot{f}_n}{N_0}\right]+3\mathrm{e}^{3\alpha}\dot{\phi}\dot{a}_n+N_0^2[m^2\mathrm{e}^{3\alpha}+(n^2-1)\mathrm{e}^{\alpha}]f_n\\&=\mathrm{e}^{3\alpha}(-2N_0^2m^2\phi g_n+\dot{\phi}\dot{g}_n-\mathrm{e}^{-\alpha}\phi k_n).\end{aligned} \tag{3.7.14}$$

在推导方程 (3.7.10)~(3.7.14) 过程中, 利用了场方程 (3.7.8)~(3.7.9), 并略去了扰动中的三阶项.

分别对拉格朗日乘子 k_n, j_n, g_n 和 N_0 取变分, 得到一组约束. 对 k_n 和 j_n 取变分, 得到动量约束

$$\dot{a}_n+\frac{n^2-4}{n^2-1}\dot{b}_n+3f_n\dot{\phi}=\dot{\alpha}g_n-\frac{\mathrm{e}^{-\alpha}}{n^2-1}k_n \tag{3.7.15}$$

$$\dot{c}_n=\mathrm{e}^{-\alpha}j_n. \tag{3.7.16}$$

对 g_n 取变分, 得到线性哈密顿约束

$$
\begin{aligned}
&3a_n(-\dot{\alpha}^2+\dot{\phi}^2)+2(\dot{\phi}\dot{f}_n-\dot{\alpha}\dot{a}_n)+N_0^2m^2(2f_n\phi+3a_n\phi^2)\\
&-\frac{2}{3}N_0^2\mathrm{e}^{-2\alpha}\left[(n^2-4)b_n+\left(n^2+\frac{1}{2}\right)a_n\right]=\frac{2}{3}\dot{\alpha}\mathrm{e}^{-\alpha}k_n+2g_n(-\dot{\alpha}^2+\dot{\phi}^2).
\end{aligned}
\tag{3.7.17}
$$

最后, 对 N_0 取变分, 得到哈密顿约束, 我们把它写为

$$
\frac{1}{2}\mathrm{e}^{3\alpha}\left[-\frac{\dot{\alpha}^2}{N_0^2}+\frac{\dot{\phi}^2}{N_0^2}-\mathrm{e}^{-2\alpha}+m^2\phi^2\right]=2\text{ 阶项}. \tag{3.7.18}
$$

3.8 波 函 数

由于扰动模式之间不存在耦合, 所以波函数可表示为形如

$$
\Psi=\mathrm{Re}\left[\Psi_0(\alpha,\phi)\prod_n\Psi^{(n)}(\alpha,\phi,a_n,b_n,c_n,d_n,f_n)\right]=\mathrm{Re}(c\mathrm{e}^{\mathrm{i}s}) \tag{3.8.1}
$$

的项的和, 式中 S 是 α 和 ϕ 的剧变函数, C 是所有变量的缓变函数. 把 (3.8.1) 代入主方程 (3.5.28), 同时除以 Ψ 得到

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\nabla_2^2\Psi_0}{2\Psi_0}-\sum_n\frac{\nabla_2^2\Psi^{(n)}}{2\Psi^{(n)}}-\sum_{n,m}\frac{(\nabla_2\Psi^{(n)})\cdot(\nabla_2\Psi^{(m)})}{2\Psi^{(n)}\Psi^{(m)}}\\
&-\frac{\nabla_2\Psi_0}{\Psi_0}\cdot\left[\sum_n\frac{\nabla_2\Psi^{(n)}}{\Psi^{(n)}}\right]+\sum_n\frac{H^n_{|2}\Psi}{\Psi}+\mathrm{e}^{-3\alpha}V(\alpha,\phi)=0.
\end{aligned}
\tag{3.8.2}
$$

式中 ∇_2^2 为小超空间度规 $f_{ab}=\mathrm{e}^{3\alpha}\mathrm{diag}(-1,1)$ 的拉普拉斯算符, 点积也相对于这一度规.

一个单位的扰动模式在 (3.8.2) 的第三、第四项中不给出有意义的贡献. 因此, 这些项可代之以

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\nabla_2\Psi}{\Psi}\cdot\sum_n\frac{\nabla_2\Psi^{(n)}}{\Psi^{(n)}}+\frac{1}{2}\left[\sum_n\frac{\nabla_2\Psi^{(n)}}{\Psi^{(n)}}\right]^2\\
&\approx-\mathrm{i}(\nabla_2S)\cdot\sum_n\frac{\nabla_2\Psi^{(n)}}{\Psi^{(n)}}+\frac{1}{2}\left[\sum_n\frac{\nabla_2\Psi^{(n)}}{\Psi^{(n)}}\right]^2.
\end{aligned}
\tag{3.8.3}
$$

为使 ansatz(3.8.1) 有效, 必须使 (3.8.2) 中与 a_n,b_n,c_n,d_n,f_n 有关的项均为零. 这表明

$$
\frac{\nabla_2\Psi}{\Psi}\cdot\nabla_2\Psi^{(n)}+\frac{1}{2}\nabla_2^2\Psi^{(n)}=\frac{H^n_{|2}\Psi}{\Psi}\Psi^{(n)}. \tag{3.8.4}
$$

$$
\left(-\frac{1}{2}\nabla_2^2+\mathrm{e}^{-3\alpha}V+\frac{1}{2}J\cdot J\right)\Psi_0=0. \tag{3.8.5}
$$

式中 $J=\sum_n \frac{\nabla_2 \varPsi^{(n)}}{\varPsi^{(n)}}$.

在相 S 剧烈变化的区域, (3.8.4) 的第二项与第一项相比可以略去. 还可以用 $\partial S/\partial\alpha, \partial S/\partial\phi$ 分别代替 $H^n_{|2}$ 中的 π_α, π_ϕ. 矢量 $x^a = f^{ab}\partial S/\partial q^b$ 可看作 $\frac{\partial}{\partial t}$, 其中 WKB 近似 $\varPsi$ 对应于经典弗里德曼度规的时间参量. 这样, 沿着矢量场 X^a 的矢量线, 对于每一个模式得到一个与时间有关的薛定谔方程

$$\mathrm{i}\frac{\partial \varPsi^{(n)}}{\partial t} = H^n_{|2}\varPsi^{(n)}. \tag{3.8.6}$$

方程 (3.8.5) 可看作二维小超空间模型的 W-D 方程, 其中有一个由扰动引起的附加项 $\frac{1}{2}J\cdot J$. 为了使 J 有限, 需减去与宇宙常数 $\varLambda$ 的重整化相对应的 $H^n_{|2}$ 基态能量 (也可以利用普朗克质量 n_p 的重整化).

可以把 $\varPsi^{(n)}$ 写为

$$\varPsi^{(n)} =^\mathrm{S} \varPsi^{(n)}(\alpha,\phi,a_n,b_n,f_n)^\mathrm{V}\varPsi^{(n)}(\alpha,\phi,c_n)^\mathrm{T}\varPsi^n(\alpha,\phi,d_n). \tag{3.8.7}$$

式中 ${}^\mathrm{S}\varPsi^{(n)}, {}^\mathrm{V}\varPsi^{(n)}$ 和 ${}^\mathrm{T}\varPsi^{(n)}$ 分别满足 ${}^\mathrm{S}H^n_{|2}, {}^\mathrm{V}H^n_{|2}$ 和 ${}^\mathrm{T}H^n_{|2}$ 的薛定谔方程.

3.9 边界条件

我们希望能找到与

$$\varPsi(h_{ij},\varPhi) = \int \mathrm{d}[g_{\mu\nu}]\mathrm{d}[\varPhi]\exp(-\hat{I}) \tag{3.9.1}$$

对应的主方程的解. 式中积分沿所有紧致四维度规和以三维超曲面 S 为边界的物质场. 如果令参数 α 为绝对值足够大的负数, 而保持其他参数不变, 则欧氏作用量 $\hat{I}$ 将按 $\mathrm{e}^{2\alpha}$ 规律趋于零. 因此, 我们期望当 α 趋于负无穷时, $\varPsi$ 趋于零.

可以从路径积分 (3.9.1) 估计扰动 $\varPsi^{(n)}$ 的标量、矢量和张量部分 ${}^\mathrm{S}\varPsi^{(n)}, {}^\mathrm{V}\varPsi^{(n)}$ 和 ${}^\mathrm{T}\varPsi^{(n)}$ 的形式. 取四维度规 $g_{\mu\nu}$ 具有背景形式

$$\mathrm{d}s^2 = \sigma^2(-N^2\mathrm{d}t^2 + \mathrm{e}^{2\alpha(t)}\mathrm{d}\varOmega_3^2), \tag{3.9.2}$$

标量场 $\varPhi$ 为 $\phi(t)$, 再加上一个由含 t 的变量 $(a_n,b_n,f_n), c_n, d_n$ 描述的扰动. 为了使四维背景度规是紧致的, 当 $\alpha\to-\infty$ 时度规须是欧氏的, 即当 $\alpha\to-\infty$ 时 N 必须为纯负虚数, 此时取作 $t=0$. 在度规为洛伦兹的区域, N 将是正实数. 为了使欧式空间到洛伦兹空间的变换是光滑的, 取 N 为 $-\mathrm{i}e_{i\mu}$ 的形式, $t=0$ 时 $\mu=0$. 为了使 $t=0$ 时四维度规和标量场是正常的, 就必须使 $t=0$ 时 a_n,b_n,c_n,d_n 和 f_n 均为零.

张量扰动 d_n 有欧氏作用量

$${}^\mathrm{T}\hat{I}_n = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}t d_n^\mathrm{T}\mathrm{D}d_n + \text{边界项}. \tag{3.9.3}$$

式中

$$
{}^{\mathrm{T}}\mathrm{D} = \left[-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{e}^{3\alpha}\mathrm{d}}{\mathrm{i}N_0\mathrm{d}t}\right) + \mathrm{i}N_0\mathrm{e}^{\alpha}(n^2-1)\right] + 4\mathrm{i}N_0\mathrm{e}^{3\alpha}\left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3\alpha} - \frac{3}{2}m^2\phi^2 - \frac{3\dot{\phi}^2}{2(\mathrm{i}N_0)^2} - \frac{3\dot{\alpha}^2}{2(\mathrm{i}N_0)^2} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{i}N_0\mathrm{d}t}\left(\frac{\dot{\alpha}}{\mathrm{i}N_0}\right)\right]. \tag{3.9.4}
$$

如果背景度规满足背景场方程, 则上式最后一项为零. 当 d_n 满足方程

$$
{}^{\mathrm{T}}\mathrm{D}d_n = 0 \tag{3.9.5}
$$

时, 作用量就只剩下边界项

$$
{}^{\mathrm{T}}\hat{I}_n^{\mathrm{cl}} = \frac{1}{2\mathrm{i}N_0}\mathrm{e}^{3\alpha}(d_n\dot{d}_n + 4\dot{\alpha}d_n^2). \tag{3.9.6}
$$

按 d_n 的路径积分为

$$
\int \mathrm{d}[d_n]\exp(-{}^{\mathrm{T}}\hat{I}_n) = (\det{}^{\mathrm{T}}\mathrm{D})^{-1/2}\exp(-{}^{\mathrm{T}}\hat{I}_n^{\mathrm{cl}}). \tag{3.9.7}
$$

沿不同的背景度规积分 (3.9.7), 便得到波函数 ${}^{\mathrm{T}}\Psi^{(n)}$. 我们期望主要贡献来自于经典背景场方程的解相近的背景度规. 对这些度规可采用一绝热近似, 令 α 为时间 t 的缓变函数. 这样, (3.9.5) 的满足边界条件 $t=0$ 时 $d_n=0$ 的解可写为

$$
d_n = A(\mathrm{e}^{\nu\tau} - \mathrm{e}^{-\nu\tau}). \tag{3.9.8}
$$

式中 $\nu = \mathrm{e}^{-\alpha}(n^2-1)^{1/2}, \tau = \int \mathrm{i}N_0\mathrm{d}t$.

这种近似对于满足条件

$$
\left|\frac{\dot{\alpha}}{N_0}\right| n\mathrm{e}^{-\alpha} \tag{3.9.9}
$$

的背景场是成立的. 一个正常的欧氏度规, 在 $t=0$ 附近有

$$
|\dot{\alpha}/N_0| = \mathrm{e}^{-\alpha}.
$$

如果度规是背景场方程的一个欧氏解, 则有 $|\dot{\alpha}/N_0| < \mathrm{e}^{-\alpha}$. 这个绝热近似当 n 足够大时成立, 在相应区域中背景场方程的解是洛伦兹的, 可采用 WKB 近似. 这样, 波函数 ${}^{\mathrm{T}}\Psi^{(n)}$ 可写为

$$
{}^{\mathrm{T}}\Psi^{(n)} = B\exp\left\{-\left[\frac{1}{2}n\mathrm{e}^{2\alpha}\coth(\nu\tau) + \frac{2}{\mathrm{i}N_0}\dot{\alpha}\mathrm{e}^{3\alpha}\right]d_n^2\right\}. \tag{3.9.10}
$$

在欧氏区域, τ 是正实数. 当 n 很大时有 $\coth(\nu\tau)\approx 1$. 在采用 WKB 近似的洛伦兹区域, τ 是复的, 但仍有正的实部; 当 n 很大时 $\coth(\nu\tau)$ 仍将近似为 1. 因此有

$$
{}^{\mathrm{T}}\Psi^{(n)} = B\exp\left[-2\mathrm{i}\frac{\partial S}{\partial\alpha}d_n^2 - \frac{1}{2}n\mathrm{e}^{2\alpha}d_n^2\right]. \tag{3.9.11}
$$

归一化常数 B 可取为 1. 于是除了一个相因子之外, 引力波模式在 WKB 区域处于基态.

现在考虑波函数的矢量部分 ${}^{\mathrm{V}}\Psi^{(n)}$. 这是一个纯规范, 因为 c_n 可由 j_n 参量化的规范变化给予任何值. 这个规范变换的可能性可由约束

$$\mathrm{e}^{-\alpha}\left[\frac{\partial}{\partial c_n}+4(n^2-4)c_n\frac{\partial}{\partial\alpha}\right]\Psi=0 \tag{3.9.12}$$

看出. 积分上式得到

$$\Psi(\alpha,\{c_n\})=\Psi[\alpha-2\sum_n(n^2-4)c_n^2,0], \tag{3.9.13}$$

这里隐去了对其他变量的依赖性. 也可以用 $\mathrm{i}(\partial S/\partial\alpha)\Psi$ 代替 $\partial\Psi/\partial\alpha$. 这样便可解出 ${}^{\mathrm{V}}\Psi^{(n)}$

$${}^{\mathrm{V}}\Psi^{(n)}=\exp\left[2\mathrm{i}(n^2-4)c_n^2\frac{\partial S}{\partial\alpha}\right]. \tag{3.9.14}$$

标量扰动包括张量扰动和矢量扰动行为的组合. 前节给出了作用量的标量部分, 它取决于经典场方程 (3.8.10), (3.8.11) 和 (3.8.14) 的解. 这三个方程有一个 3 参数解族, 满足边界条件 $t=0$ 时 $a_n=b_n=f_n=0$. 还有两个约束方程 (3.8.15) 和 (3.8.17), 对应于两个被 k_n 和 g_n 参量化的规范自由度. 对于方程 (3.8.10), (3.8.11), (3.8.14), (3.8.15) 和 (3.8.17) 的解, 欧氏作用量为

$$\begin{aligned}{}^{\mathrm{S}}\hat{I}^{cl}=&\frac{1}{2iN_0}\mathrm{e}^{3\alpha}\bigg\{-a_n\dot{a}_n+\frac{n^2-4}{n^2-1}b_n\dot{b}_n+f_n\dot{f}_n\\&+\dot{\alpha}\left[-a_n^2+\frac{4(n^2-4)}{n^2-1}b_n^2\right]+3\dot{\phi}a_nf_n+g_n(\dot{\alpha}a_n-\dot{\phi}f_n)\\&-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-\alpha}k_n\left[a_n+\frac{n^2-4}{n^2-1}b_n\right]\bigg\}.\end{aligned} \tag{3.9.15}$$

这里利用了背景场方程.

令 $g_n=k_n=0$ 的规范是最简单的. 但这样我们找不到一个 4 维紧致度规满足上面三个场方程和两个约束方程. 令 $a_n=b_n=0$, 解约束方程 (3.8.15) 和 (3.8.17), 得到

$$g_n=3\frac{(n^2-1)\dot{\alpha}\dot{\phi}f_n+\dot{\phi}\dot{f}_n+N_0^2m^2\phi f_n}{(n^2-4)\dot{\alpha}^2+3\dot{\phi}^2}, \tag{3.9.16}$$

$$k_n=3(n^2-1)\mathrm{e}^{\alpha}\frac{\dot{\alpha}\dot{\phi}\dot{f}_n+N_0^2m^2\phi f_n\dot{\alpha}-3f_n\dot{\phi}(-\dot{\alpha}^2+\dot{\phi}^2)}{(n^2-4)\dot{\alpha}^2+3\dot{\phi}^2}. \tag{3.9.17}$$

把它们代入 (3.8.14), 得到 f_n 的一个二阶方程

$$N_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathrm{e}^{3\alpha}\frac{\dot{f}_n}{N_0}\right]+N_0^2[m^2\mathrm{e}^{3\alpha}+(n^2-1)\mathrm{e}^{\alpha}]f_n$$

$$=\mathrm{e}^{3\alpha}(-2N_0^2m^2\phi g_n+\dot{\phi}\dot{g}_n-\mathrm{e}^{-\alpha}\dot{\phi}k_n). \tag{3.9.18}$$

当 n 很大, 可再次利用绝热近似来估算 $|\phi|>1$ 时 (3.9.18) 的解:

$$f_n=A\sin h(\nu\tau). \tag{3.9.19}$$

式中 $\nu^2=\mathrm{e}^{-2\alpha}(n^2-1)$. 因此, 对于这些模式有

$$^{\mathrm{S}}\Psi^{(n)}(\alpha,\phi,0,0,f_n)\approx\exp\left[-\frac{1}{2}n\mathrm{e}^{2\alpha}f_n^2-\frac{1}{2}\mathrm{i}\frac{\partial S}{\partial\phi}g_nf_n\right]. \tag{3.9.20}$$

这是基态形式 (只差一个小的相因子). 当 a_n 和 b_n 不为零时, $^{\mathrm{S}}\Psi^{(n)}$ 的值可由积分约束方程 (3.5.25) 和 (3.5.27) 得到.

张量和标量模式从它们的基态开始, 但要除去 n 很小的情况. 矢量模式是纯规范的, 因此可以忽略. 所以总的扰动能量为

$$E=\sum_n\frac{H_{|2}^{(n)}\Psi^{(n)}}{\Psi^{(n)}}.$$

当不考虑基态能量时, 这一总扰动能量是很小的. 又因为 $E=\mathrm{i}(\nabla_2S)\cdot J$. 式中 $J=\sum\limits_n\nabla_2\Psi^{(n)}$, 所以 J 也很小. 这表明波函数 Ψ_0 满足未受扰动的小超空间模型的 W-D 方程. 相因子 S 近似为 $-\mathrm{i}\ln\Psi_0$. 然而均匀标量场模式 ϕ 将不再从它们的基态开始. 这有两个原因: 第一, $t=0$ 时的规则性要求 $a_n=b_n=c_n=d_n=f_n=0$, 但不要求 $\phi=0$; 第二, ϕ 的经典方程具有频率为常数 m 的阻尼振荡形式. 这表明绝热近似在很小的 t 内是不成立的, 经典场方程的解 ϕ 近似为常数. 这些解的作用量很小, 大的 $|\phi|$ 值也不衰减. 因此, 从大的 $|\phi|$ 值开始的 WKB 具有很大的几率. 他们对应于那些有一个长的暴胀期而后又回到物质为主膨胀型的经典解. 在含有小静质量的其他场的模型中, 物质可在有质量标量场的振荡中分解为具有热谱的光子. 然后, 此模型像辐射为主的宇宙那样膨胀.

3.10 扰动的增长

张量模式满足薛定谔方程

$$\frac{\partial^{\mathrm{T}}\Psi^{(n)}}{\partial t}={}^{\mathrm{T}}H_{|2}^{n}{}^{\mathrm{T}}\Psi^{(n)}$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3\alpha}\left\{+d_n^2\left[10\left(\frac{\partial S}{\partial\alpha}\right)^2+6\left(\frac{\partial S}{\partial\phi}\right)^2\right]\right. \tag{3.10.1}$$

$$\left.-\frac{\partial^2}{\partial d_n^2}-8d_n\mathrm{i}\frac{\partial S}{\partial\alpha}\frac{\partial}{\partial d_n}+d_n^2\left[(n^2+1)\mathrm{e}^{4\alpha}-6\mathrm{e}^{6\alpha}m^2\phi^2\right]\right\}. \tag{3.10.2}$$

我们可将 ${}^{\mathrm{T}}\Psi^{(n)}$ 写为

$$ {}^{\mathrm{T}}\Psi^{(n)} = \exp(-2\alpha)\exp\left[-2\mathrm{i}\frac{\partial S}{\partial\alpha}d_n^2\right]^{\mathrm{T}}\Psi_0^{(n)}. \tag{3.10.3} $$

利用 W-D 方程的 WKB 近似, 得到

$$ \mathrm{i}\frac{\partial^{\mathrm{T}}\Psi_0^{(n)}}{\partial t} = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3\alpha}\left[-\frac{\partial^2}{\partial d_n^2} + d_n^2(n^2-1)\mathrm{e}^{4\alpha}\right]^{\mathrm{T}}\Psi_0^{(n)}. \tag{3.10.4} $$

这样, 上式具有频率为 $\nu = (n^2-1)^{1/2}\mathrm{e}^{-\alpha}$ 的振子的薛定谔方程形式. 初始波函数 ${}^{\mathrm{T}}\Psi_0^{(n)}$ 处于基态, 而且频率 ν 比 $\dot{\alpha}$ 要大. 在这种情况下, 可利用绝热近似来说明 ${}^{\mathrm{T}}\Psi^{(n)}$ 保持在基本状态

$$ {}^{\mathrm{T}}\Psi_0^{(n)} \approx \exp\left(-\frac{1}{2}n\mathrm{e}^{2\alpha}d_n^2\right). \tag{3.10.5} $$

当 $\nu\approx\dot{\alpha}$ 时, 绝热近似失效. 此时引力波长在暴胀期等于视界尺度, 波函数也将冻结

$$ {}^{\mathrm{T}}\Psi_0^{(n)} \approx \exp\left(-\frac{1}{2}n\mathrm{e}^{-2\alpha_*}d_n^2\right). \tag{3.10.6} $$

式中 α_* 是模式超出视界范围时的 α 值. 波函数 ${}^{\mathrm{T}}\Psi^{(n)}$ 将保持 (3.10.6) 的形式, 直到模式再进入物质为主或辐射为主时期的视界, 此时 α 取大的值 α_e. 于是可以对 (3.10.4) 再次用绝热近似, 但 ${}^{\mathrm{T}}\Psi_0^{(n)}$ 不再处于基态, 它将处于多个高激发态的叠加. 这是引力波模式中基态涨落的放大现象.

标量模式的行为和上面讨论的很相似, 但由于规范自由度的原因, 它们的描述是相当复杂的. 前面我们曾用路径积分的方法估算了 $a_n = b_n = 0$ 时的波函数 ${}^{\mathrm{S}}\Psi^{(n)}$. 在绝热近似适用时, 所找到的基态形式是有效的; 但当绝热近似不再适用时, 即当波长超出暴胀期视界范围时, 这种有效性也就不复存在了. 为了讨论随后波函数的行为, 采用一阶哈密顿约束 (3.5.27) 来估算当 $a_n\neq 0, b_n = f_n = 0$ 时的 ${}^{\mathrm{S}}\Psi^{(n)}$ 的值是比较方便的. 我们得到

$$ {}^{\mathrm{S}}\Psi^{(n)}(\alpha,\phi,a_n,0,0) = B\exp[\mathrm{i}ca_n^2]^{\mathrm{S}}\Psi_0^{(n)}(\alpha,\phi,a_n). \tag{3.10.7} $$

归一化因子 B 和相因子 c 依赖于 α 和 ϕ, 但不依赖于 a_n

$$ c = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial\alpha}\right)^{-1}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial\alpha}\right)^2 - \frac{1}{3}(n^2-4)\mathrm{e}^{4\alpha}\right]. \tag{3.10.8} $$

当模式的波长等于暴胀期的视界线度时, 波函数 ${}^{\mathrm{S}}\Psi^{(n)}$ 具有形式

$$ {}^{\mathrm{S}}\Psi_0^{(n)} = \exp\left(-\frac{1}{2}ny_*^{-2}\mathrm{e}^{2\alpha*}a_n^2\right). \tag{3.10.9} $$

式中 y_* 代表模式超出视界范围时 $y = (\partial S/\partial\alpha)(\partial S/\partial\phi)^{-1}$ 的值, $y_* = 3\phi_*$. 更一般地, 在势为 $V(\phi)$ 的标量场的情况下, $y = 6V(\partial V/\partial\phi)^{-1}$.

把 $b_n = f_n = 0$ 代入标量哈密顿 ${}^{\mathrm{S}}H_{|2}^{(n)}$, 且分别用动量约束 (3.5.25) 和一阶哈密顿约束 (3.5.27) 代换 $\dfrac{\partial}{\partial b_n}$ 和 $\dfrac{\partial}{\partial f_n}$, 可以得到 ${}^{\mathrm{S}}\Psi_0^{(n)}$ 的薛定谔方程

$$\mathrm{i}\frac{\partial^{\mathrm{S}}\Psi_0^{(n)}}{\partial t} = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3\alpha}\left\{-y^2\frac{\partial^2}{\partial a_n^2} + \mathrm{e}^{4\alpha}(n^2-4)\cdot\left[\frac{1}{y^2} - \frac{1}{3}\mathrm{e}^{4\alpha}\left(\frac{\partial S}{\partial\alpha}\right)^{-2}\right]a_n^2\right\}^{\mathrm{S}}\Psi_0^{(n)}. \tag{3.10.10}$$

式中忽略了 $\dfrac{1}{n^2}$ 阶项. 与 $\dfrac{1}{y^2}$ 比较, 项 $\mathrm{e}^{4\alpha}(\partial S/\partial\alpha)^{-2}$ 是很小的, 但在背景解的最大半径附近例外. ${}^{\mathrm{S}}\Psi_0^{(n)}$ 的薛定谔方程与 ${}^{\mathrm{T}}\Psi_0^{(n)}$ 的方程 [即 (3.10.4)] 很相似, 只是动力项乘以一个因子 y^2, 势项除以 y^2. 因此, 我们希望对视界范围内的波长, ${}^{\mathrm{S}}\Psi_0^{(n)}$ 有基态形式 $\exp\left(-\dfrac{1}{2}y^{-2}\mathrm{e}^{2\alpha}a_n^2\right)$, 像 (3.10.9) 那样. 另一方面, 当波长超出视界范围时, 薛定谔方程 (3.10.10) 表明 ${}^{\mathrm{T}}\Psi_0^{(n)}$ 将以 (3.10.9) 的形式冻结, 一直到模式再进入物质为主时期的视界范围. 即使宇宙的状态方程到达波长超出视界线度的辐射为主时期, ${}^{\mathrm{S}}\Psi_0^{(n)}$ 仍然将保持为 (3.10.9) 的形式. 标量模式的基态涨落放大, 其方式与张量模式的相似. 在重返视界范围时, 标量模式的均方根涨落 (在规范 $b_n = f_n = 0$ 的条件下) 要比同样波长的张量模式的均方根涨落大一个因子 y_*.

3.11 实 验 检 验

在矢量场 X^i 的矢量线上一给定点, 即在作为经典场方程解的背景度规中给定的 α 和 ϕ, 由 ${}^{\mathrm{T}}\Psi_0^{(n)}$ 和 ${}^{\mathrm{S}}\Psi_0^{(n)}$ 可以计算观测到不同的 d_n 和 a_n 值的相对几率. 实际上, 对 ϕ 的依赖性是无关紧要的, 可以忽略. 于是可以计算观测微波背景各向异性的不同量的几率, 并把这些预言与观测上限进行比较.

张量和标量扰动模式在 α 值很大时处于高激发态. 这表明我们可以把它们的发展作为一个整体演化来处理, 演化取决于 d_n 和 a_n 初始时的经典运动方程. $\dot{d}_n$ 和 $\dot{a}_n$ 的初始分布分别正比于 $\left|{}^{\mathrm{T}}\Psi_0^{(n)}\pi_{d_n}\,{}^{\mathrm{T}}\Psi_0^{(n)}\right|$ 和 $\left|{}^{\mathrm{S}}\Psi_0^{(n)}\pi_{a_n}\,{}^{\mathrm{S}}\Psi_0^{(n)}\right|$. 当模式重返视界内时, 分布集中在 $\dot{d}_n = \dot{a}_n = 0$ 处.

$b_n = f_n = 0$ 的超曲面为暴胀期金边解的常能量密度面. 根据局部能量守恒, 在暴胀期后它们仍保持为长能量密度面, 此时能量由均匀背景标量场 ϕ 的相关振荡决定. 如果标量粒子分解为光子, 并把宇宙加热, 则 $b_n = f_n = 0$ 的面是等温面. 这样, 微波背景最稀疏的面将是温度为 T_s 的超曲面. 可以认为, 微波辐射是从这个面

传播到地球的. 因此, 观测到的温度将是

$$T_0 = \frac{T_s}{1+z}. \tag{3.11.1}$$

式中 z 是上述超曲面的红移, 不同方向上的 z 不同将引起观测到的温度不同, $(1+z)$ 的表达式为

$$1 + z = l^\mu n_\mu. \tag{3.11.2}$$

式中 n_μ 是 $g_n = k_n = j_n = 0$ 和 $b_n = f_n = 0$ 时常数 t 面上的单位法矢量, l^μ 是零短程线的切矢量. 沿着观察者的过去光锥, 可以计算 $l^\mu n_\mu$ 的演化:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}[l^\mu n_\mu] = n_{\mu;\nu} l^\mu l^\nu. \tag{3.11.3}$$

λ 为零短程线上的仿射参量, $n_{\mu;\nu}$ 的非零分量为

$$n_{i;j} = \mathrm{e}^{2\alpha}\left[\dot{\alpha}\Omega_{ij} + \sum_n (\dot{\alpha}_n + \dot{\alpha}a_n)\frac{1}{3}\Omega_{ij}Q + \sum_n (\dot{b}_n + \dot{\alpha}b_n)P_{ij} + \sum_n (\dot{d}_n + \dot{\alpha}d_n)G_{ij}\right]. \tag{3.11.4}$$

我们采用的规范中, 在视界上尺度上, (3.11.4) 中主要各向异性项是含有 $\dot{\alpha}a_n$ 和 $\dot{\alpha}d_n$ 的那些项. 他们给出具有形式

$$\langle(\Delta T/T)^2\rangle \approx \langle a_n^2\rangle \quad \text{或} \approx \langle d_n^2\rangle \tag{3.11.5}$$

温度各向异性, 在视界尺度上, 对各向异性有贡献的模式数目具有 n^3 的量级. 我们得到

$$\langle a_n^2\rangle = y_*^2 n^{-1}\mathrm{e}^{-2\alpha*}, \tag{3.11.6}$$

$$\langle d_n^2\rangle = n^{-1}\mathrm{e}^{-2\alpha}, \tag{3.11.7}$$

对各向异性的主要贡献来自标量模式, 由此得到

$$\langle(\Delta T/T)^2\rangle \approx y_*^2 n^2 \mathrm{e}^{-2\alpha_*}. \tag{3.11.8}$$

于是 $n\mathrm{e}^{-\alpha_*} \approx \dot{\alpha}_*$, 是现在视界尺度的哈勃常数值. $\langle(\Delta T/T)^2\rangle$ 的观测上限为 10^{-8}, 这要求哈勃常数小于 $5\times10^{-5}m_{\mathrm{p}}$, 从而限制标场的质量小于 10^{14}GeV. 这就是说, 如果标量场的质量为 10^{14}GeV 或更小, 则我们讨论的扰动 (由初始基态增长起来的扰动) 便与微波背景辐射的观测结果相符.

前面我们计算了常时间、常密度超曲面的标量扰动. 在那样的规范里, 没有密度变化. 但是我们可以对 $a_n = b_n = 0$ 的规范作一个变换, 当波长进入视界范围时, 密度涨落为

$$\langle(\Delta\rho/\rho)^2\rangle \approx y^2 \frac{\dot{\rho}_{\mathrm{e}}^2}{\dot{\alpha}_{\mathrm{e}}^2\rho_e^2}\dot{\alpha}_*^2. \tag{3.11.9}$$

由于 y 和 $\dot{\alpha}_*$ 仅以对数形式依赖于扰动的波长, 于是上式给出一个大范围的密度涨落谱. 这些密度涨落可以按经典的场方程演化, 直到能够解释银河系和我们观测到的其他宇宙结构的形成.

第九篇　Brans-Dicke 理论和膜宇宙

本篇第 1 章讨论 Brans-Dicke 的标量–张量引力理论, 它在弦宇宙理论中有重要意义. 除了标量–张量力引理论以外, 还有多种非爱因斯坦引力理论, 也都经受了迄今为止所有的观测实验的检验. 限于篇幅, 不能详细叙述, 有兴趣的读者可参阅《黑洞物理学》第四篇 (王永久, 2000). 本篇第 2 章讨论高维时空和膜宇宙模型, 以解决著名的宇宙常数问题.

第1章 Brans-Dicke 理论

1.1 物理基础

在广义相对论出现以前, 物理学家对于空间性质的认识有两种根本不同的观点. 第一种观点可以从牛顿的绝对空间追溯到 19 世纪的以太理论. 第二种观点认为空间的几何和惯性的性质依赖于它所包含的物质. 如果没有任何形式的物质存在, 谈空间的性质是毫无意义的. 按第二种观点, 物体唯一有意义的运动是相对于宇宙中其他物质的运动. 这一观点可追溯到马赫 (Mach) 原理. 按照马赫原理, 在一个加速实验室 (局部空间) 中观察到的惯性力效应可以解释为远处相对于实验室加速运动的物质所产生的引力效应. 在广义相对论中这一表述并不完整. 广义相对论认为物质的分布影响空–时几何性质, 但是几何性质并不由物质的贡献唯一确定.

设想一个向太阳自由下落的实验物体, 选择一个相对于物体没有加速度的坐标系. 在这一坐标系中, 可认为太阳的引力被另一个"引力"所平衡. 当所有万有引力都加倍时, 与之平衡的"引力"也会加倍, 平衡不会破坏. 因此, 宇宙中质量分布可以确定加速度, 但是和引力相互作用的强度无关. 设太阳质量为 m_{s}, 其距离为 r, 按牛顿引力理论, 实验物体的加速度为

$$a = \frac{Gm_{\mathrm{s}}}{r^2}. \tag{1.1.1a}$$

另一方面, 从量纲分析, 考虑到质量的贡献, 加速度应具有形式

$$a \sim \frac{m_{\mathrm{s}}Rc^2}{Mr^2}. \tag{1.1.1b}$$

式中, M 是可见宇宙的确定质量, R 是可见宇宙的边界半径. 比较加速度的两个表达式, 得到

$$\frac{GM}{Rc^2} \sim 1 \tag{1.1.2}$$

这一关系式只具有数量级的意义, 但是它表明有两种选择: 第一种是比值 $\dfrac{M}{R}$ 由理论给出, 而质量分布由广义相对论场方程的某个边界条件给出; 第二种是局部观察的引力常数 G 是随位置变化的, 它的值决定于观察点附近的质量分布. 第一种选择部分地简化了对质量分布的限制.

Brans-Dicke 的理论分为两部分, 第一部分是建立符合场论要求的场方程, 第二部分是合适的边界条件和初始条件的表述; 使理论符合马赫原理, 即使空间几何前后一致地依赖于物质分布.

1.2　度规场方程

所要建立的理论不完全是引力的几何理论, 引力效应一部分是几何的, 一部分是由黎曼流形中的标量场所描述的. 从 Eötvös 实验证实了的等效原理出发, 中性试验粒子的运动和广义相对论中的一样, 是一条四维空–时中的短程线. 构造理论时考虑到, 假设引力常数 (或主动引力质量) 随位置变化, 在自由下落的实验室中观察到的物理规律 (不含引力) 应该不受宇宙其余部分的影响.

如果引力“常数”是随位置变化的, 则应是某一标量场的函数. 我们考虑寻找这一标量场. 首先想到的是标量曲率 $R \equiv g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$. 但是 R 中含有度规张量的梯度, 随着与质量源的距离 r 的增大, 它比 r^{-1} 减小得还快. 这样的标量主要由附近质量分布决定, 与远处物质无关.

广义相对论中的标量场不符合要求, 必须引入新的标量场. 从变分原理出发, 首先要构造拉格朗日密度, 它含有新的标量场 ϕ, ϕ 的形式可以由马赫原理作出判断. 局部空间以外的物质将对这局部空间内的惯性力作出贡献. 如果理论是线性的, 则 (1.1.2) 表明上述贡献应该是引力常数的倒数, 因此应该取

$$\phi \sim \frac{1}{G}. \tag{1.2.1}$$

变分原理表示为

$$\delta \int \left[\phi R + \frac{6\pi}{c^4}L - \omega\phi_{,\mu}\phi^{;\mu}\frac{1}{\phi}\right]\sqrt{-g}\mathrm{d}^4x = 0. \tag{1.2.2}$$

被积式中的前两项相当于将广义相对论的拉格朗日密度除以 G, 再用 ϕ^{-1} 代换 G. ϕ 的量纲为 $\mathrm{M}\cdot\mathrm{L}^{-3}\cdot\mathrm{T}^2$. 第三项是通常的标量场拉格朗日密度, 引入分母 ϕ 是为了使 ω 没有量纲.

容易发现, 方程 (1.2.1) 中含有的物质场拉格朗日密度与广义相对论中的相同. 因此, 在给定的外部度规场 $g_{\mu\nu}$ 中, 物质的运动方程和广义相对论中的相同. 这两个理论不同之处在于确定 $g_{\mu\nu}$ 的引力场方程, 而不是给定度规的物质运动方程. 这样, 与广义相对论一样, 物质的能量–动量张量应满足

$$T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0, \tag{1.2.3}$$

$$T^{\mu\nu} = 2(-g)^{-1/2}\frac{\partial}{\partial g_{\mu\nu}}[(-g)^{1/2}L], \tag{1.2.4}$$

此处已假定 L 不明显依赖于 $g_{\mu\nu}$ 的导数.

在 (1.2.2) 中对 ϕ 和 $\phi_{,\mu}$ 变分, 得到 ϕ 的波方程

$$2_\omega\phi^{-1}\Box\phi - \frac{\omega}{\phi^2}\phi^{;\mu}\phi_{,\mu} + R = 0. \tag{1.2.5}$$

式中

$$\Box\phi \equiv \phi^{;\mu}_{;\mu} = (-g)^{-1/2}[(-g)^{1/2}\phi^{,\mu}]_{,\mu}. \tag{1.2.6}$$

显然, 拉格朗日密度中的 ϕR 和 ϕ 项是产生 ϕ 波的源.

在 (1.2.2) 中对 $g_{\mu\nu}$ 及其一阶导数变分, 得到引力场方程

$$\lambda R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi}{c^4\phi}T_{\mu\nu} + \frac{\omega}{\phi^2}(\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\phi_{,\lambda}\phi^{,\lambda}) + \frac{1}{\phi}(\phi_{,\mu\nu} - g_{\mu\nu}\Box\phi). \tag{1.2.7}$$

上式右端第一项是通常广义相对论的场源项, 但是代替引力常数 G 的是可变引力耦合参量 ϕ^{-1}. 第二项是标量场的能量–动量张量, 也由 ϕ^{-1} 与引力耦合. 第三项来自 (1.2.2)R 中度规张量的二阶导数. 当右端只有第一项时, 与爱因斯坦引力场方程的不同仅在于可变引力常数 $\left(G = \dfrac{1}{\phi}\right)$.

缩并 (1.2.7), 得到

$$-R = \frac{8\pi}{c^4}\frac{T}{\phi} - \frac{\omega}{\phi^2}\phi_{,\lambda},\phi^{,\lambda} - \frac{3}{\phi}\Box\phi, \tag{1.2.8}$$

代入 (1.2.5), 得到波方程的另一表达式

$$\Box\phi = \frac{8\pi}{(3+2\omega)c^4}T. \tag{1.2.9}$$

场方程还可以用另一方法导出. 考虑到标量场 ϕ 决定于宇宙物质分布, 所以 ϕ 所满足的最简单的协变场方程应具有形式

$$\Box\phi = \mu T. \tag{1.2.10}$$

式中 T 为物质场能量–动量张量, μ 为一耦合常数. 注意到 (1.1.2), 爱因斯坦引力场方程应修改为

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = \frac{8\pi}{\phi c^4}(T^{\mu\nu} + T^{\mu\nu}_{\phi}). \tag{1.2.11}$$

两端乘以 ϕ 再取协变散度, 注意到 $\left(R^{\mu\nu} - \dfrac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right)_{;\mu} = 0$, 得到

$$\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right)\phi_{;\nu} = \frac{8\pi}{c^4}T^{\mu\nu}_{\phi;\nu}. \tag{1.2.12}$$

考虑到 $T^{\mu\nu}_{\phi}$ 应含有 ϕ、它的一阶导数和二阶导数, 其一般对称形式可写为

$$T^{\mu\nu}_{\phi} = A\phi^{;\mu}\phi^{;\nu} + Bg^{\mu\nu}\phi^{;\rho}\phi_{;\rho} + C\phi^{;\mu\nu} + Dg^{\mu\nu}\Box\phi. \tag{1.2.13}$$

式中 A, B, C 和 D 只含 ϕ. 取散度, 得到

$$T^{\mu\nu}_{\phi;\nu} = (A_{,\phi} + B_{,\phi})\phi^{;\mu}\phi^{;\nu}\phi_{;\nu} + (A + D_{;\phi})\phi^{;\mu}\Box\phi$$

$$+(A+2B+C_{,\phi})\phi^{;\mu\nu}\phi_{,\nu}+D(\Box\phi)^{;\mu}+C\Box\phi^{;\mu}. \tag{1.2.14}$$

将 (1.2.12) 缩并, 并注意 (1.2.10), 得到

$$R=-\frac{8\pi}{\phi}\left\{\frac{1}{\mu}\Box\phi+(A+4B)\phi^{;\mu}\phi_{;\mu}+(C+4D\Box\phi)\right\}. \tag{1.2.15}$$

采用 $R^{\lambda}_{\sigma\nu\tau}$ 的定义 (附录 7) 得

$$-\phi_{;\lambda}R^{\lambda\mu}=\phi^{;\lambda\mu}_{;\lambda}-\phi^{;\mu\lambda}_{;\lambda}=(\Box\phi)^{;\mu}-\Box(\phi^{;\mu}). \tag{1.2.16}$$

由 (1.2.15) 和 (1.2.16) 可得

$$\begin{aligned}&\left(R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right)\phi_{;\nu}\\ =&\Box(\phi^{;\mu})-(\Box\phi)^{;\mu}+\frac{4\pi}{\phi}\phi^{;\mu}\left\{\left(\frac{1}{\mu}+C+4D\right)\Box\phi+(A+4B)\phi^{;\nu}\phi_{;\nu}\right\}.\end{aligned} \tag{1.2.17}$$

将 (1.2.17) 和 (1.2.14) 代入 (1.2.12), 比较同类项系数, 得到

$$\begin{aligned}&c^4=8\pi D,\\&c^4=-8\pi C,\\&\frac{4\pi c^4}{\phi}\left(\frac{1}{\mu}+C+4D\right)=-8\pi(A+D_{,\phi}),\\&-\frac{4\pi c^4}{\phi}(A+4B)=8\pi(A_{,\phi}+B_{,\phi}),\\&0=A+2B+C_{,\phi}.\end{aligned} \tag{1.2.18}$$

此方程组有唯一解

$$\begin{aligned}&A=\frac{c^4\omega}{8\pi\phi},\quad B=-\frac{c^4\omega}{16\pi\phi},\\&D=\frac{c^4}{8\pi},\quad C=-\frac{c^4}{8\pi},\quad \mu=\frac{8\pi}{(3+2\omega)c^4}.\end{aligned} \tag{1.2.19}$$

式中 ω 是一个无量纲常数.

将上式代入 (1.2.10) 和 (1.2.11) 便得到场方程 (1.2.9) 和 (1.2.7).

当 $\omega\ll 1$ 时, 由 (1.2.9) 可知

$$\Box\phi=o\left(\frac{1}{\omega}\right),$$

从而有

$$\phi=\bar{\phi}+o\left(\frac{1}{\omega}\right)=\frac{1}{G}+o\left(\frac{1}{\omega}\right). \tag{1.2.20}$$

式子 $\bar{\phi}$ 为 ϕ 的平均值, 由 (1.1.2) 知道它应为 G^{-1}. 将上式代入场方程 (1.2.7), 得到

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} - o\left(\frac{1}{\omega}\right). \tag{1.2.21}$$

于是在 $\omega \to \infty$ 的极限情况下, 此理论退化为爱因斯坦引力理论.

对于流体, 能量–动量张量可表示为

$$T_{\mu\nu} = (\varepsilon + p)u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu}, \tag{1.2.22}$$

缩并后得

$$T = \varepsilon - 3p. \tag{1.2.23}$$

式中 ε 为随动系中物质的能量密度, p 是流体中的压强. 由场方程 (1.2.9) 可知, 要局部质量对 ϕ 的贡献是正的, 即附近物质对局部空间惯性力的贡献是正的, 其充分且必要条件是 ω 为正的.

1.3 平直时空极限

和广义相对论中的情况类似, 将度规写为

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \tag{1.3.1}$$

式中 $\eta_{\mu\nu}$ 是闵可夫斯基度规, $h_{\mu\nu}$ 只计算到一级近似. 以同样方式令

$$\phi = \phi_0 + \xi. \tag{1.3.2}$$

式中 $\phi_0 = \text{const.}$, 与质量密度同数量级. 首先推导方程 (1.2.9) 的弱场解. 可以用 $\eta_{\mu\nu}$ 代替 $g_{\mu\nu}$

$$\begin{aligned}\Box\phi = \Box\xi &\equiv (-g)^{-1/2}\left[(-g)^{1/2}g^{\mu\nu}\xi_{,\mu}\right]_{,\nu} \\ &= \nabla^2\xi - \frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = \frac{8\pi T}{(3+2\omega)c^4}.\end{aligned} \tag{1.3.3}$$

此方程有推迟解

$$\xi = -\frac{2}{(3+2\omega)c^4}\int\frac{T^*}{r}\mathrm{d}^3x. \tag{1.3.4}$$

式中 T^* 表示 T 在推迟时间的值.

为了获得场方程 (1.2.7) 的弱场解, 和在广义相对论中的情况类似, 引入坐标条件使方程简化, 令

$$\begin{aligned}\gamma_{\mu\nu} &\equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h, \\ \sigma_\mu &\equiv \gamma_{\mu\nu,\rho}\eta^{\nu\rho}.\end{aligned} \tag{1.3.5}$$

方程 (1.2.7) 可写成 $h_{\mu\nu}$ 和 ξ 的一阶形式

$$-\frac{1}{2}\left(\Box\gamma_{\mu\nu}-\sigma_{\mu,\nu}-\sigma_{\nu,\mu}+\eta_{\mu\nu}\sigma_{\lambda,\rho}\eta^{\lambda\rho}\right)$$
$$=\left(\xi_{,\mu,\nu}-\eta_{\mu\nu}\Box\xi\right)\phi_0^{-1}+\frac{8\pi}{c^4}\phi_0^{-1}T_{\mu\nu}. \tag{1.3.6}$$

引入 4 个坐标条件

$$\sigma_\mu=\xi_{,\mu}\phi_0^{-1}, \tag{1.3.7}$$

并令

$$\alpha_{\mu\nu}\equiv\gamma_{\mu\nu}-\eta_{\mu\nu}\xi\phi_0^{-1}. \tag{1.3.8}$$

这时方程 (1.3.6) 成为

$$\Box\alpha_{\mu\nu}=-\frac{16\pi}{c^4}\phi_0^{-1}T_{\mu\nu}. \tag{1.3.9}$$

其推迟解为

$$\alpha_{\mu\nu}=\frac{4}{c^4}\phi_0^{-1}\int\frac{T^*_{\mu\nu}}{r}\mathrm{d}^3x. \tag{1.3.10}$$

由 (1.3.5) 和 (1.3.8) 有

$$h_{\mu\nu}=\alpha_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\alpha-\eta_{\mu\nu}\xi\phi_0^{-1}. \tag{1.3.11}$$

于是得到

$$h_{\mu\nu}=\frac{4}{c^4}\phi_0^{-1}\int\frac{T^*}{r}\mathrm{d}^3x-\frac{4}{c^4}\phi_0^{-1}\left(\frac{1+\omega}{3+2\omega}\right)\eta_{\mu\nu}\int\frac{T^*}{r}\mathrm{d}^3x. \tag{1.3.12}$$

对于稳定的点质量 M, 上述各式成为

$$\phi=\phi_0+\xi=\phi_0+\frac{2M}{(3+2\omega)c^2r}, \tag{1.3.13}$$

$$g_{00}=\eta_{00}+h_{00}=1-\frac{2M\phi_0^{-1}}{rc^2}\left(1+\frac{1}{3+2\omega}\right), \tag{1.3.14}$$

$$g_{ii}=-1-\frac{2M\phi_0^{-1}}{rc^2}\left(1-\frac{1}{3+2\omega}\right), \tag{1.3.15}$$

$$g_{\mu\nu}=0,\quad \mu\neq\nu. \tag{1.3.16}$$

对于讨论引力频移效应和光线偏转效应, 上述弱场解已足够精确. 但是要讨论轨道效应就要求关于 g_{00} 的二阶近似解.

引力频移由 g_{00} 确定, 其中的因子 $\left(1+\frac{1}{3+2\omega}\right)\phi_0^{-1}$ 可放入引力常数的定义中

$$G_0\equiv\phi_0^{-1}\left(1+\frac{1}{3+2\omega}\right), \tag{1.3.17}$$

于是和广义相对论中的讨论完全相同. 光线偏转的计算与广义相对论中的稍有不同, 它由 g_{ii}/g_{00} 确定, 容易得到

$$\delta\theta = \frac{3+2\omega}{4+2\omega}\frac{4MG_0}{Rc^2},$$

式中 R 是光线到引力源 M 的最短距离.

1.4 球对称时空

球对称线元写为

$$ds^2 = e^{2\alpha}dt^2 - e^{2\beta}[dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)]. \tag{1.4.1}$$

式中 α 和 β 只含 r. 对于 $\omega > \frac{3}{2}$, 一般真空解为

$$\begin{aligned}
e^{2\alpha_0} &= e^{2\alpha_0}\left(\frac{1-B/r}{1+B/r}\right)^{2/\lambda},\\
e^{2\beta} &= e^{2\beta_0}\left(1+\frac{B}{r}\right)^4\left(\frac{1-B/r}{1+B/r}\right)^{2[(\lambda-C-1)/\lambda]},\\
\phi &= \phi_0\left(\frac{1-B/r}{1+B/r}\right)^{c/\lambda}.
\end{aligned} \tag{1.4.2}$$

式中

$$\lambda = \left[(C+1)^2 - C\left(1-\frac{1}{2}\omega C\right)\right]^{1/2}, \tag{1.4.3}$$

$\alpha_0, \beta_0, \phi_0$, B 和 C 都是任意常数.

为了使 (1.4.2) 在弱场近似下与前面得到的 (1.3.13)~(1.3.16) 一致, 必须这样选择常数的值:

$$\begin{aligned}
&\alpha_0 = \beta_0 = 0, \quad C \approx -\frac{1}{2+\omega},\\
&B \approx \frac{M\phi_0^{-1}}{2c^2}\left(\frac{2\omega+4}{2\omega+3}\right)^{1/2}.
\end{aligned} \tag{1.4.4}$$

ϕ_0 和 λ 分别由 (1.3.17) 和 (1.4.3) 给出.

根据马赫原理, 仅当物质之间的距离足够大, 场方程的解才能有渐近闵可夫斯基的特征, 这一点由简单的分析便可看出. 另外, 仅当太阳产生的引力场到处都足够小 (包括太阳内部), 场方程的解才适用于弱场. 按照这些假设, 场方程的解 (1.4.1)~(1.4.4) 对于太阳是有效的.

用本节给出的解计算近日点的进动, 取 $e^{2\alpha}$ 精确到 $\left(\frac{M}{c^2 r\phi_0}\right)$ 的二阶项, $e^{2\beta}$ 精

确到一阶项, 结果是

$$\left(\frac{4+3\omega}{6+3\omega}\right)\times(\text{GR值}). \tag{1.4.5}$$

与实验值比较, 可给出对 ω 值的限制

$$\omega\geqslant 6. \tag{1.4.6}$$

1.5　关于物理思想的讨论

马赫原理是 Brans-Dicke 建立标量引力理论的出发点. 有了场方程, 还需建立初始条件和边界条件, 使理论符合马赫原理.

设想在宇宙中有一足够大的静态球壳. 对于这一球壳内部, 式 (1.1.2) 应成立. 此式等价于

$$\phi\sim\frac{M}{Rc^2}. \tag{1.5.1}$$

式中 R 为球壳半径. 先考虑在 $r>R$ 区域的解. 边界条件 $r\to\infty$, $\phi\to 0$ 不适用. 我们可以在 (1.4.2) 的每个式子中, 乘上一个复因子, 再移入括号内, 使括号内变号. 设此解适用于 $r<B$ 的区域, 原来的解 (1.4.2) 适用于 $r>B$ 的区域. 修改后的解为

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{2\alpha}&=\mathrm{e}^{2\alpha_0}\left(\frac{B/r-1}{B/r+1}\right)^{2/\lambda},\\
\mathrm{e}^{2\beta}&=\mathrm{e}^{2\beta_0}\left(\frac{B}{r}+1\right)^{4}\left(\frac{B/r-1}{B/r+1}\right)^{2(\lambda-C-1)/\lambda},\\
\phi&=\phi_0\left(\frac{B/r-1}{B/r+1}\right)^{C/\lambda}.
\end{aligned} \tag{1.5.2}$$

容易发现, 如果

$$(\lambda-C-1)/\lambda>0, \tag{1.5.3}$$

此解导致空间在 $r=B$ 处闭合. 只要 $C>0$, 在闭合空间半径的端点 $\phi\to 0$. 我们只对 $r>R$ 和 $\lambda>0$ 感兴趣. 条件 (1.4.6) 和 (1.4.3) 要求

$$C>\frac{2}{\omega}. \tag{1.5.4}$$

可以证明, 这个边界条件是符合马赫原理的. 引入格林函数 η, 满足

$$\begin{aligned}
\Box\eta&=(-g)^{-1/2}[(-g)^{1/2}g^{\mu\nu}\eta,\nu]_{,\mu}\\
&=(-g)^{-1/2}\delta^4(x-x_0).
\end{aligned} \tag{1.5.5}$$

由 (1.5.5) 和 (1.2.6) 可构成一等式

$$[(-g)^{1/2}g^{\mu\nu}(\eta\phi_{,\mu} - \phi\eta_{,\mu})_{,\nu} = (-g)^{1/2}\left[\frac{8\pi}{(3+2\omega)c^4}\right]T\eta - \phi\delta^4(x-x_0). \tag{1.5.6}$$

假设 η 是方程 (1.5.5) 的“超前波”解, 即在 t_0 之前的任何时间都有 $\eta=0$.(1.5.3) 给出的边界条件表明, 光线从半径为 B 的球面向里传至半径为 R 的球面 (从而到任意内部点 x_0) 需要经过有限的坐标时间.

沿闭合空间内部 ($r<B$), 在时间 $t_2>t_0$ 和类空曲面 S_1 之间积分 (1.5.6). 适当选择面 S, 使 (1.5.6) 左端在用高斯定理化为面积分时等于零. 方程 (1.5.6) 右端的积分为

$$\phi(x_0) = \frac{8\pi}{(3+2\omega)c^4}\int \eta T\sqrt{-g}\mathrm{d}^4x, \tag{1.5.7}$$

或

$$\phi(x_0) \sim \frac{M}{Rc^2}. \tag{1.5.8}$$

上面的方程表明, $\phi(x_0)$ 由遍及质量的积分确定, 每个质量元对 x_0 点的 ϕ 贡献一个传播到 x_0 的子波. 这正是马赫原理所给出的解释.

1.6 宇 宙 模 型

本节按空间各向同性和均匀性的假设, 采用随动坐标系和相应的 R-W 度规, 讨论标量引力理论所导出的宇宙模型. 讨论随动坐标系中的运动学, 可以完全不考虑动力学. 在球坐标系中 R-W 线元具有形式

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - R^2(t)\left[\frac{\mathrm{d}r^2}{1-kr^2} + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2)\right]. \tag{1.6.1}$$

对于闭合空间 $k=+1, \mathrm{r}<1$; 对于开放空间 $k=-1$; 平直空间 $k=0$. 与宇宙膨胀速率和引力红移有关的哈勃 (Hubble) 年龄是

$$\frac{1}{H} = \frac{R(t)}{\dot{R}(t)}.$$

令

$$r = \sin\chi, \quad k=+1, \tag{1.6.2}$$

或

$$r = \mathrm{sh}\chi, \quad k=-1, \tag{1.6.3}$$

线元 (1.6.1) 简化为

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - R^2(t)[\mathrm{d}\chi^2 + \sin^2\chi(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2)], \quad k=+1. \tag{1.6.4}$$

将 (1.6.4) 代入场方程 (1.2.7), 其 (00) 分量可写为

$$R_0^0 - \frac{1}{2}R = -\frac{3}{R^2(t)}[R^2(t)+1] = \frac{8\pi}{c^4}\frac{1}{\phi}T_0^0 - \frac{\omega}{2\phi^2}\dot{\phi} + 3\frac{\dot{R}(t)\dot{\phi}}{R(t)\phi}. \tag{1.6.5}$$

假设不计宇宙中的压强, 则 $-T=-T_0^0=\rho c^2$, 式中 ρ 为质量密度. 此时能量密度和宇宙体积的乘积是常数, 因此有

$$\rho R^3(t) = \rho_0 R_0^3(t) = \text{const.} \tag{1.6.6}$$

将上述结果代入 (1.6.5), 得到

$$\left(\frac{\dot{R}(t)}{R(t)} + \frac{\dot{\phi}}{2\dot{\phi}}\right)^2 + \frac{\lambda}{R^2(t)} = \frac{1}{4}\left(1+\frac{2}{3}\omega\right)\left(\frac{\dot{\phi}}{\phi}\right)^2 + \frac{8\pi}{3\phi}\rho_0\left(\frac{\dot{R}(t)}{R(t)}\right)^3. \tag{1.6.7}$$

式中 ρ_0 和 R_0 对应于任意取定的 t_0 时刻的值. 类似地, (1.2.9) 成为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\phi R^3(t)) = \frac{8\pi}{3+2\omega}\rho_0 R_0^3(t). \tag{1.6.8}$$

积分, 得到

$$\dot{\phi}R^3(t) = \frac{8\pi}{3+2\omega}\rho_0 R_0^3(t)(t-t_\mathrm{c}). \tag{1.6.9}$$

式中积分常数 t_c 可由马赫原理予以估计.

像上一节中讨论的那样, 把 $\phi(t)$ 表示为遍及所有物质的“超前波”积分, 可将马赫原理引入这一问题中. (1.5.6) 和 (1.5.7) 式要求对宇宙物质的历史作某种假设. 我们假设宇宙从高密度状态开始膨胀. 在膨胀开始时 ($t=0$) 的一个初始状态 $R(t)=0$, 物质已经存在. 尽管在开始这一高密度状态下压强会很大, 随着膨胀而迅速减小, 对于具体的宇宙模型来说, 忽略压强效应不会有多大影响. 实际上, 对初始高压相的积分表明, 这种忽略是允许的.

假设惯性力和 ϕ 在 t_0 的值唯一决定于从 $t=0$ 到 $t=t_0$ 物质分布的积分. 选择 $t=0$ 时 $R(t)$, ϕ 和 ρ_0 的值等边界 (和初始) 条件, 使得对方程 (1.5.6) 遍及三维空间 (从 $t=0$ 到 $t_1>t_0$) 积分时, 左边的面积分等于零. 为使 $t=0$ 时面积分有意义, 在表面上 $R(t)$ 应是无穷小正数, 否则度规将是奇异的. 若表面上 $t_\mathrm{c}=0$, $\phi=0$, 则面积分为零 (因为 ϕ 和 $R^2(t)\phi_{,0}$ 在积分中为零). 因此, 近似的初始条件是 $t_\mathrm{c}=0$ 时 $R(t)=\phi=0$. 应注意到另一个面积分为零 (沿此面有 $t=t_1$), 因为 η 及其梯度在此面上为零 (超前波).

令 (1.6.9) 中 $t_\mathrm{c}=0$, 结合 (1.6.7), 得到

$$\left(\frac{\dot{R}(t)}{R(t)} + \frac{1}{2}\frac{\dot{\phi}}{\phi}\right)^2 + \lambda R^{-2}(t) = \frac{1}{4}\left(1+\frac{2}{3}\omega\right)\left(\frac{\dot{\phi}}{\phi}\right)^2 + \left(1+\frac{2}{3}\omega\right)\left(\frac{\dot{\phi}}{\phi}\right)\frac{1}{t}, \tag{1.6.10}$$

$$\dot{\phi}R^3(t) = \frac{8\pi}{3+2\omega}\rho_0 R_0^3(t)t. \tag{1.6.11}$$

可见对于足够小的时间, (1.6.10) 中 $R^{-2}(t)$ 项是可以忽略的, 此时解与平直空间的情况比较只差一无穷小量. 所以得到的具有初始条件

$$\phi = R(t) = 0, \quad t = 0 \tag{1.6.12}$$

的方程可以严格积分.

满足早期膨胀条件 $R(t) \gg t)$ 的解是

$$\phi = \phi_0\left(\frac{t}{t_0}\right)^r,$$

$$R(t) = R_0(t)\left(\frac{t}{t_0}\right)^q. \tag{1.6.13}$$

式中

$$r \equiv \frac{2}{4+3\omega}, \tag{1.6.14}$$

$$q \equiv \frac{2+2\omega}{4+3\omega}, \tag{1.6.15}$$

$$\phi_0 = 8\pi\frac{4+3\omega}{2(3+2\omega)}\rho_0 t_0^2. \tag{1.6.16}$$

对于平直空间的情况, 这个解对于所有 $t > 0$ 是严格的.

注意 (1.6.16) 与 (1.1.2) 是相容的. 因为 (1.1.2) 中 M 与 $\rho_0 c^3 t_0^2$ 有相同的量级, R 近似等于 ct_0. 因此, 初始条件与马赫原理是相容的.

上面的计算是对平直空间进行的, 不适用于非平直空间. 在非平直空间的情况下, 方程 (1.6.10) 和 (1.6.11) 的解只能用数值积分得到.

对于 $\omega \geqslant 6$ 和平直空间解, 与广义相对论的情况 (de Sitter) 比较, $R(t)$ 稍有不同. 在广义相对论中 $R(t) \sim t^{2/3}$, 这里为 $R(t) \sim t^{(2+2\omega)/(4+3\omega)}$. 因此, 仅从空间几何的基础就应该能够区分这两种引力理论.

若 $\omega \gg 1$, 对于平直空间算得的哈勃年龄 $\dfrac{\dot{R}(t)}{R(t)}$ 对质量密度的要求与广义相对论的相同. 对于 $\omega = 6$ 的情况, 两种理论相差 2%.

第 2 章　高维时空和膜宇宙

2.1　宇宙常数和膜宇宙概述

含有宇宙项的真空爱因斯坦场方程可写为

$$G_{\mu\nu} = -\Lambda g_{\mu\nu} \ , \tag{2.1.1}$$

此式右端的物理含义是真空具有能量密度

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G}. \tag{2.1.2}$$

真空为什么会具有能量密度? 这一问题应该由量子场论来回答: 它就是微观世界中的零点能. 在量子场论中, 组成物质的基本粒子就是相应量子场 (量子系统) 的激发态. 当所有量子场都处于基态时, 便对应于任何粒子都不存在的真空. 按照量子场论, 一种量子场处于基态时, 它的能量并不为零. 这一非零的基态能量称作零点能. 自然, 广义相对论中的真空能量 (2.1.2) 就应该是量子场论中的零点能.

设量子场论适用的能量上限为 M, 则计算表明, 量子场的零点能量密度的量级为 (取 $h = 1$)

$$\rho \sim M^4 \ . \tag{2.1.3}$$

由 (2.1.3) 和 (2.1.2) 可得

$$\Lambda \sim \rho G \sim \frac{M^4}{M_{\mathrm{P}}^2}, \tag{2.1.4}$$

式中 M_{P} 为普朗克能量. 由第二篇 2.6 节可知

$$\Lambda = \pm R^{-2} \ , \quad k = \pm 1. \tag{2.1.5}$$

于是我们可以由量子场论中的零点能估算出宇宙半径 R:

$$R \sim \Lambda^{-1/2} \sim M_{\mathrm{P}}/M^2 \ , \tag{2.1.6}$$

此式表明, 量子场论适用的能标越低, 则计算得到的宇宙常数越小, 宇宙半径越大. 另一方面, 高能物理实验未能观测到超对称粒子. 这一实验事实表明, 超对称破缺能标只能在 TeV 量级上. 如果调低这一能标, 则与高能物理的实验观测结果相矛盾. 根据这一能标的量级, 由 (2.1.4) 算得的宇宙常数 Λ 比观测值大 60 个数量级, 进而由 (2.1.5) 算得的宇宙半径 R 在毫米量级, 与宇宙观测结果不符! 若调高超对称破缺的能标, 则所得宇宙常数更大, 宇宙半径更小!

从超对称破缺的能标到宇宙常数 Λ 的计算依据的是量子场论和高能物理实验结果, 是可靠的. 从宇宙常数 Λ 到宇宙半径 R 的计算依据的是广义相对论, 也是可靠的. 这就是物理学中著名的宇宙常数问题. 随着对额外维度和膜宇宙的研究, 人们找到了解决问题的线索. 在膜宇宙理论中, 空间是高维的, 而我们的观测宇宙是四维的, 只是这高维时空中的一个超曲面 (一张膜). 如果宇宙常数 Λ 的贡献大部分出现在观测宇宙以外的 (额外) 维度中, 则在观测宇宙中的有效宇宙常数便可以很小, 宇宙半径也就可以很大了, 于是上述矛盾不复存在.

额外维的概念是在 20 世纪由 Nodström 提出的, 随后 Kaluza 和 Klein 也提出了同样的观点. 多年来, 人们一直探讨将 4 种相互作用统一起来的理论. 基于超对称的理论, 尤其是超弦理论, 都用高维时空描述. 通过 Kaluza-Klein 约化, 可以重新得到 4 维物理 (Brax and van de Bruck, 2003).

弦理论和 M 理论提出了另一种紧致化额外维度的方法. 按照这两种理论, 标准模型中的粒子 (即观测宇宙中的物质) 被限制在高维时空的一个超曲面 (膜) 上, 只有引力和类似伸缩子的奇异物质能在所有维度中传播, 于是我们的宇宙便成了膜宇宙. 在膜宇宙中, 对额外维尺度的限制很弱, 因为标准模型中的粒子只在 3 维空间中传播. 牛顿引力理论对额外维的出现很敏感, 引力只在大于十分之一毫米的尺度才能被探测到. 由于现代高能物理实验从未探测到额外维度的存在, 所以通常认为额外维度被限制在一个很小的空间尺度上, 致使现有的高能物理实验不能达到其相应的能标.

根据弦理论, 膜宇宙源于 Horava 和 Witten 提出的模型. $E_8 \times E_8$ 弦理论在低能条件下的强耦合由 11 维超引力描述, 它的第 11 维是在具有 Z_2 对称性的迹形 (orbifold) 上紧致化的. 时空的两个边界都是 10 维面, 且规范理论 (具有 E_8 规范群) 被限制在面上. 后来 Witten 认为 11 维时空中有 6 维可以连续紧致化. 因此, 具有 4 维边界膜的时空成为 5 维时空.

Antoniadis 提出膜宇宙模型之后, Arkani-Hamed、Dimopoulos 和 Dvali(ADD) 给出了另一个重要的结论. Antoniadis 认为通过将标准模型中的粒子限制在膜上可以使额外维比预计的大. 他们考虑 (4+d) 维的平直几何, 其中 d 维是紧致的, 半径为 R. 4 维普朗克质量、$(4+d)$ 维普朗克质量和引力尺度之间满足以下关系:

$$M_{\mathrm{P}l}^2 = M_{\mathrm{fund}}^{2+d} R^d \,. \tag{2.1.7}$$

这种引力只在小于 R 的尺度上与牛顿引力理论有区别. 由于引力只在 mm 左右的尺度上被探测到, 因此 R 可以大到几分之一毫米. ADD 假设高维几何是平直的. Randall 和 Sundrum(1999) 的工作取得了较大的进展, 他们考虑的不是平直几何, 而是弯曲空间的几何. 在他们的模型中, 高维时空是 AdS 时空, 其宇宙常数为负, 这是时空弯曲引起的. 从嵌在高维时空中的一个具有正张力的膜上可以得到牛顿引

力定律. 这种模型对牛顿引力定律产生了一个很小的修正, 可能的尺度也受到约束, 它们必须小于 1mm.

他们还提出一种双膜模型, 在这个模型中出现了等级 (hierarchy) 问题, 即 10^{19} GeV 的普朗克尺度和 100GeV 的弱电尺度之间有巨大差异. 等级问题是由于 AdS 背景的高度弯曲. 在这种情景下, 标准模型中的粒子被限制在具有负张力的膜 $y=r_{\rm c}$ 上, 而具有正张力的膜处在 $y=0$ 处. 巨大的等级是由于两膜间的距离产生的. 在负张力膜上测得的普朗克质量 $M_{\rm Pl}$ 由下式给出:

$$M_{\rm Pl}^2 \approx {\rm e}^{2kr_{\rm c}} M_5^3/k\ , \quad k=\sqrt{-\Lambda_5 k_5^2/6}\ . \tag{2.1.8}$$

其中 M_5 是 5 维普朗克质量, Λ_5 是五维时空宇宙常数 (为负), 可以看出, 如果 M_5 离弱电尺度 $M_{\rm W}\approx$ TeV 不远，当 $kr_{\rm c}\approx 50$ 时才能在膜上有大的普朗克质量. 因此, 当额外维的半径 $r_{\rm c}$ 取合理的值时, 便能得到弱电尺度和普朗克尺度之间的一个大等级.

膜宇宙模型的另一个问题是宇宙常数问题. 人们希望通过额外维来解释宇宙常数的变小甚至消失. 微调 (fine-tunning) 理论认为膜上的能量密度并不会导致宇宙的大曲率, 反之, 它将使额外维高度弯曲, 最后仍保留一个宇宙常数为零的平直 Minkovski 膜. 然而, 简单地用高维时空标量场来认识这种机制不能解决宇宙常数问题, 因为高维时空会出现裸奇点. 这个奇点可以被第二个膜掩盖, 而第二个膜的张力已经微调到和原来的膜一致. 下面我们将讨论这一问题.

我们还将讨论膜宇宙理论的另一个重要结论, 即在高能条件下对弗里德曼方程的修正. 我们将看到, 对于 Randall-Sundrum 模型, 弗里德曼方程的形式为

$$H^2=\frac{k_5^4}{36}\rho^2+\frac{8\pi G_N}{3}\rho+\Lambda\ , \tag{2.1.9}$$

它将膜的膨胀速率 H、(膜) 物质密度 ρ 和 (有效) 宇宙学常数联系起来. 通过选择合适的膜张力和 5 维宇宙常数可以使有效宇宙常数为 0.

在高能条件下

$$\rho \gg \frac{96\pi G_N}{k_5^4}\ , \tag{2.1.10}$$

式中 k_5^2 是 5 维引力常数, 哈勃速率为

$$H\propto\rho\ . \tag{2.1.11}$$

而一般的宇宙模型中, $H\propto\sqrt{\rho}$, 但在低能条件下

$$\rho \ll \frac{96\pi G_N}{k_5^4}\ , \tag{2.1.12}$$

仍然可以得到 $H\propto\sqrt{\rho}$.

当然, 哈勃速率的修正只在核合成前有意义, 它对早期宇宙现象, 如暴胀, 可能有极大的影响.

2.2 Randall-Sundrum 膜宇宙模型

对于普朗克尺度和弱电尺度之间的大等级问题, Randall 和 Sundrum 认为是由于在高度弯曲的 5 维时空几何中存在两个膜的原因, 这时标准模型中的粒子被限制在具有负张力的膜上, 而这个膜是具有负宇宙常数的反 de Sitter(AdS) 时空, 这就是著名的 Randall-Sundrum I (RS I) 模型. 受弦理论中平行宇宙理论的启发, ADD 提出了一个 6 维的膜宇宙模型. 该模型假定引力可在整个高维时空存在, 而标准模型粒子 (即物质) 则被局限于一张 3+1 维子流形 (即膜) 上. 如果该假设成立, 则显然无法通过粒子物理的实验来检验额外维度的存在. 当用引力实验来检验时, 该模型允许额外维度的尺度大到毫米的量级. 而目前最为精确的引力实验也并不排除毫米尺度的额外维度存在的可能性.

之后, Randall 和 Sundrum 提出了一个全新的膜宇宙模型. 本节首先对 RS I 模型作一简单的介绍, 然后重点讨论 RS II 模型. RS I 模型构造在一个五维的 AdS 时空之上. 该模型仍假定标准模型的粒子 (即观测宇宙中的物质) 被禁闭在 AdS 时空中的一张膜上. 而额外维度 (即第 5 维) 具有 Z_2 对称性. 在该模型中, 除了禁闭物质的一张膜之外, 还存在着另一张膜. 这两张膜分别处于额外维度的两个 orbifold fixed 点上. 该模型非常关键的一点是假定时空度规是不可约的, 即 5 维度规的 4 维分量是依赖于额外维度的, 是额外维度坐标的函数. 将额外维度的坐标记为 $\phi(-\pi \leqslant \phi \leqslant \pi)$. 两张膜分别处于 $\phi = 0, \pi$ 处. 而膜上的度规就是相应的 5 维度规的 4 维分量

$$g^1_{\mu\nu}(x^\mu) = G_{\mu\nu}(x_\mu, \phi = \pi) , \tag{2.2.1a}$$

$$g^2_{\mu\nu}(x^\mu) = G_{\mu\nu}(x_\mu, \phi = 0) . \tag{2.2.1b}$$

其中 $G_{MN}(M, N = \mu, \phi)$ 是 5 维度规. x^μ 为通常的四维坐标, RS I 模型的作用量为

$$S = S_{\text{gravity}} + S_1 + S_2 , \tag{2.2.2a}$$

$$S_{\text{gravity}} = \int \mathrm{d}^4x \int_{-\pi}^{+\pi} \mathrm{d}\phi \sqrt{-G}\{-\Lambda + 2M^3 R\} , \tag{2.2.2b}$$

$$S_1 = \int \mathrm{d}^4x \sqrt{-g_1}\{L_1 - V_1\} , \tag{2.2.2c}$$

$$S_2 = \int \mathrm{d}^4x \sqrt{-g_2}\{L_2 - V_2\} , \tag{2.2.2d}$$

式中 S_{gravity} 为引力作用量, S_1, S_2 分别为两张膜上的作用量. Λ 是 5 维宇宙常数. M 为 5 维 Planck 质量. V_1, V_2 两个常数分别为两张膜上的真空能量. L_1, L_2 分别为两张膜上的拉格朗日函数. 由此作用量出发, Randall 和 Sundrum 导出了 5 维 Einstein 方程

$$\sqrt{-G}(R_{MN}-\frac{1}{2}G_{MN}R)=-\frac{1}{4M^3}[\Lambda\sqrt{-G}G_{MN}+V_1\sqrt{-g_1}g^1_{\mu\nu}\delta^\mu_M\delta^\nu_N\delta(\phi-\pi)$$
$$+V_2\sqrt{-g_2}g^2_{\mu\nu}\delta^\mu_M\delta^\nu_N\delta(\phi)] \ . \tag{2.2.3}$$

在假定解具有沿 x^μ 方向的 Poincare 不变性的情况下, Randall 和 Sundrum 求得了如下形式的解:

$$\mathrm{d}s^2=\mathrm{e}^{-2kr_c|\phi|}\eta_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu+r_c^2\mathrm{d}\phi^2 \ , \tag{2.2.4}$$

式中 r_c 为紧致半径, k(一个和 Planck 尺度同阶的量) 满足

$$V_1=-V_2=24M^3k \ , \tag{2.2.5}$$

$$\Lambda=-24M^3k^2 \ . \tag{2.2.6}$$

如果只分析爱因斯坦场方程的正张力膜解, 而将负张力膜放到无穷远处, 此即 RSII 模型. 当 AdS 的曲率尺度小于 1mm, 则限制在正张力膜上的观测者将重新得到牛顿定律.

下面我们详细讨论这种 Randall-Sundrum II (RSII) 模型. 根据这种模型, 引力场存在连续的 Kaluza-Klein 模, 而如果额外维是周期性的, 将出现分立谱. 这使膜上两个静止质量之间的力得到修正. 膜上两个质点之间的势能为

$$V(r)=\frac{G_N m_1 m_2}{r}\left(1+\frac{l^2}{r^2}+o(r^{-3})\right) \ . \tag{2.2.7}$$

式中 l 与 5 维时空宇宙常数 Λ_5 之间的关系由 $l^2=-6/(k_5^2\Lambda_5)$ 给出, 由此可以量度 5 维时空的曲率. 由于在大于 1mm 的尺度上引力实验与牛顿引力理论很好地相符, 所以 l 必须小于 1mm.

RSII 模型的静态解可以通过爱因斯坦–希尔伯特作用量和膜作用量构成的总作用量获得, 这两种作用量分别为

$$S_{\text{EH}}=-\int \mathrm{d}x^5\sqrt{-g^{(5)}}\left(\frac{R}{2k_5^2}+\Lambda_5\right) \ , \tag{2.2.8}$$

$$S_{\text{brane}}=\int \mathrm{d}x^4\sqrt{-g^{(4)}}(-\sigma) \ . \tag{2.2.9}$$

Λ_5(5 维时空宇宙常数) 和 σ(膜张力) 都是常数. k_5 是 5 维引力耦合常数, 膜的位置处在 $y=0$ 处并且假设它具有 Z_2 对称性, 即 y 和 $-y$ 没有区别. 设时空线元为

$$\mathrm{d}s^2=\mathrm{e}^{-2K(y)}\eta_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu+\mathrm{d}y^2 \ . \tag{2.2.10}$$

由前式给出的作用量可以得到爱因斯坦场方程, 它给出两个独立的方程

$$6K'^2 = -k_5^2 \Lambda_5 \ ,$$
$$3K'' = k_5^2 \sigma \delta(y) \ .$$

第一个方程很容易解出, 得到

$$K = K(y) = \sqrt{-\frac{k_5^2}{6}\Lambda_5} y \equiv ky \ , \tag{2.2.11}$$

它告诉我们 Λ_5 必须是负的. 将第二个方程从 $-\epsilon$ 到 $+\epsilon$ 积分, 取极限 $\epsilon \to 0$, 并利用 Z_2 对称性, 我们得到

$$6K'|_0 = k_5^2 \sigma \ . \tag{2.2.12}$$

结合方程 (2.2.11) 可以得到

$$\Lambda_5 = -\frac{k_5^2}{6}\sigma^2 \ . \tag{2.2.13}$$

因此, 为了得到静态解, 膜张力和 5 维时空宇宙常数之间必须有微调. 下面我们比较详细地讨论 RSII 模型的宇宙学.

有两种方法可以得到宇宙学方程, 下面将分别描述. 第一种非常简单而且只用到了 5 维时空方程, 第二种方法利用了 4 维量和 5 维量之间的几何关系. 我们先讨论较简单的一种.

1. 由 5 维爱因斯坦场方程得到的弗里德曼方程

下面我们设 $k_5 \equiv 1$, 描述五维时空的度规为

$$\mathrm{d}s^2 = a^2 b^2 (\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}y^2) - a^2 \delta_{ij} \mathrm{d}x^i \mathrm{d}x^j \ . \tag{2.2.14}$$

这种度规符合 $y = 0$ 处膜上时空的均匀各向同性性质. a 和 b 只是 t 和 y 的函数, 另外, 我们假定了平直空间部分, 可以直接引入空间曲率. 由 5 维时空的爱因斯坦场方程得到:

$$a^2 b^2 G_0^0 \equiv 3\left(2\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} - \frac{a''}{a} + \frac{a'b'}{ab} + kb^2\right) = a^2 b^2 [\rho_B + \rho\bar{\delta}(y - y_b)], \tag{2.2.15}$$

$$a^2 b^2 G_5^5 \equiv 3\left(\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} - 2\frac{a'^2}{a^2} - \frac{a'b'}{ab} + kb^2\right) = -a^2 b^2 T_5^5, \tag{2.2.16}$$

$$a^2 b^2 G_5^0 \equiv 3\left(-\frac{\dot{a}'}{a} + 2\frac{\dot{a}a'}{a^2} + \frac{\dot{a}b'}{ab} + \frac{a'\dot{b}}{ab}\right) = -a^2 b^2 T_5^0, \tag{2.2.17}$$

$$\begin{aligned} a^2 b^2 G_j^i \equiv & \left(3\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{b}}{b} - \frac{\dot{b}^2}{b^2} - 3\frac{a''}{a} - \frac{b''}{b} + \frac{b'^2}{b^2} + kb^2\right)\delta_j^i \\ = & -a^2 b^2 [p_B + p\bar{\delta}(y - y_b)]\delta_j^i. \end{aligned} \tag{2.2.18}$$

式中 5 维时空的能动张量 T^a_b 具有一般形式. 对于 RSII 模型, 我们取 $\rho_B = -p_B = \Lambda_5$ 和 $T^0_5 = 0$. 后面我们将利用这些方程得到 5 维时空含标量场时的弗里德曼方程. 方程中的点表示对时间 t 求导, 撇号表示对 y 求导. 将方程的 00 分量对 y 从 $-\epsilon$ 到 ϵ 积分, 并利用 $a(y) = a(-y), b(y) = b(-y)$, $a'(y) = -a(-y)$ 和 $b'(y) = -b(-y)$(即 Z_2 对称性), 当 $\epsilon \to 0$ 时得到

$$\left.\frac{a'}{a}\right|_{y=0} = \frac{1}{6}ab\rho\,. \tag{2.2.19}$$

同样, 积分 ij 分量, 并利用最后一个方程, 得到

$$\left.\frac{b'}{b}\right|_{y=0} = -\frac{1}{2}ab(\rho + p)\,. \tag{2.2.20}$$

这两个方程称为连接条件. 当 $y = 0$ 时, 爱因斯坦场方程的 05 分量给出

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0\,. \tag{2.2.21}$$

式中我们利用了连接条件 (2.2.19) 和 (2.2.20). 此式表明膜上物质守恒.

同样地, 55 分量给出

$$\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} + kb^2 = -\frac{a^2b^2}{3}\left[\frac{1}{12}\rho(\rho + 3p) + q_B\right]\,. \tag{2.2.22}$$

代入宇宙时 $\mathrm{d}\tau = ab\mathrm{d}t$, 将 a 写成 $a = \exp(\alpha(t))$ 并利用能量守恒, 得到

$$\frac{\mathrm{d}(H^2\mathrm{e}^{4\alpha})}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{2}{3}\Lambda_5\mathrm{e}^{4\alpha} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left(\mathrm{e}^{4\alpha}\frac{\rho^2}{36}\right)\,. \tag{2.2.23}$$

式中 $aH = \mathrm{d}a/\mathrm{d}\tau$. 上式积分得到

$$H^2 = \frac{\rho^2}{36} + \frac{\Lambda_5}{6} + \frac{\mu}{a^4}\,. \tag{2.2.24}$$

最后一步我们将总的能量密度和压强分成物质部分和膜张力部分, 即 $\rho = \rho_{\mathrm{M}} + \sigma$ 和 $p = p_{\mathrm{M}} - \sigma$, 然后我们得到弗里德曼方程

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_{\mathrm{m}}\left(1 + \frac{\rho_{\mathrm{m}}}{2\sigma}\right) + \frac{\Lambda_4}{3} + \frac{\mu}{a^4}\,, \tag{2.2.25}$$

式中

$$\frac{8\pi G}{3} = \frac{\sigma}{18}\,, \tag{2.2.26}$$

$$\frac{\Lambda_4}{3} = \frac{\sigma^2}{36} + \frac{\Lambda_5}{6}\,. \tag{2.2.27}$$

对比最后一个方程和静态 Randall-Sundrum 解中的微调 (2.2.13) 可知 $\Lambda_4 = 0$. 如果膜张力和 5 维宇宙常数有一小的失调, 就会生成一个有效 4 维宇宙常数. 另一个重

要的问题是 4 维牛顿常数与膜张力间接相关. μ 是积分常数, 方程中含 μ 的项称为暗辐射项. μ 可以通过 5 维时空方程求出 (后面将讨论). Birkhoff 定理的广义表述告诉我们, 如果 5 维时空是 AdS, 这个常数 μ 为 0, 如果 5 维时空是 AdS-Schwarzschild 时空, μ 不为 0, 且这时的 μ 值可以用来量度 5 维时空黑洞的质量. 下面我们假设 $\mu=0$, $\Lambda_4=0$.

对比一般的 4 维弗里德曼方程形式, 这里的弗里德曼方程多了正比于 ρ^2 的项, 这说明如果物质能量密度远大于膜张力, 即 $\rho_{\rm m}\gg\sigma$, 则膨胀速率正比于 $\rho_{\rm m}$, 而不是 $\sqrt{\rho_{\rm m}}$, 膨胀速率变大了. 只有膨胀速率远大于物质能量密度时, 才回到一般的结论, 即 $H\propto\sqrt{\rho_{\rm m}}$. 这是膜宇宙理论最重要的一个不同之处. 这种改变是普遍的, 而不只限制于 Randall-Sundrum 膜宇宙模型. 从弗里德曼方程和能量守恒方程得到 Raychandhuri 方程

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\tau}=-4\pi G(\rho_{\rm m}+p_{\rm m})\left(1+\frac{\rho_M}{\sigma}\right)\ . \tag{2.2.28}$$

后面我们将利用这些方程讨论由膜上标量场导致的暴胀问题. 注意到核合成时, 必须忽略弗里德曼方程中的膜世界修正, 否则, 膨胀速率将发生改变, 从而导致轻元素丰度的改变, 使得 $\sigma\geqslant(1\mathrm{MeV})^4$. 该理论相对牛顿定律的偏差导致了更强的约束: $k_5^{-3}>10^5\mathrm{TeV}$ 和 $\sigma\geqslant(100\mathrm{GeV})^4$. 类似地, 对于暗辐射也存在宇宙学约束. 计算表明, 暗辐射能量密度最多也只能是光子能量密度的 10%.

2. 导出爱因斯坦场方程的另一种方法

得到膜上的爱因斯坦场方程还有一种更好的方法. 考虑单位法矢嵌在 5 维时空中一个任意的 (3+1) 维超曲面 M 上, 它的诱导度规和外部曲率定义为

$$h^a_b=\delta^a_b-n^an_b\ , \tag{2.2.29}$$

$$K_{ab}=h^c_ah^d_b\nabla_cn^d\ . \tag{2.2.30}$$

为了得到爱因斯坦场方程, 我们需要三个方程, 其中两个将由 h_{ab} 构成的 4 维量和由 g_{ab} 构成的 5 维量联系起来. 第一个方程是高斯方程

$$R^{(4)}_{abcd}=h^j_ah^k_bh^l_ch^m_dR_{jklm}-2K_{a[c}K_{d]b}\ . \tag{2.2.31}$$

这个等式将 4 维曲率张量 $R^{(4)}_{abcd}$ 和 5 维曲率张量以及 K_{ab} 联系起来. 接下来是 Cadazzi 方程, 它将 K_{ab}, n_a 和 5 维 Ricci 张量联系起来

$$\nabla^{(4)}_bK^b_a-\nabla^{(4)}_aK=n^ch^b_aR_{bc}\ . \tag{2.2.32}$$

我们可以将 5 维曲率张量分解成 Weyl 张量 C_{abcd} 和 Ricci 张量

$$R_{abcd}=\frac{2}{3}(g_{a[c}R_{d]b}-g_{b[c}R_{d]a})-\frac{1}{6}Rg_{a[g_{b]d}}+C_{abcd}\ . \tag{2.2.33}$$

将最后一个方程用高斯方程代替, 并构建一个 4 维爱因斯坦张量, 我们得到

$$G_{ab}^{(4)} = \frac{2}{3}[G_{cd}h_a^c h_b^d + (G_{cd}n^c n^d - \frac{1}{4}G)h_{ab}] + KK_{ab} - K_a^c K_{bc} \\ -\frac{1}{2}(K^2 - K^{cd}K_{cd})h_{ab} - E_{ab} \ , \tag{2.2.34}$$

式中

$$E_{ab} = C_{abcd}n^c n^d \ . \tag{2.2.35}$$

必须强调, 这个方程对任意超曲面都成立, 如果考虑能动张量为 T_{ab} 的超曲面, K_{ab} 和 T_{ab} 之间存在以下的关系:

$$[K_{ab}] = -k_5^2 \left(T_{ab} - \frac{1}{3}h_{ab}T\right) \ , \tag{2.2.36}$$

式中 T 是 T_{ab} 的迹, $[\cdots]$ 表示跃迁

$$[f](y) = \lim_{\epsilon \to 0}(f(y+\epsilon) - f(y-\epsilon)) \ . \tag{2.2.37}$$

这些方程称为连接条件, 他们等效于宇宙学背景中的连接条件 (2.2.19) 和 (2.2.20), 将 T_{ab} 分离, $T_{ab} = \tau_{ab} - \sigma h_{ab}$. 并在 (2.2.34) 中代入连接条件, 得到膜上的爱因斯坦场方程

$$G_{ab}^{(4)} = 8\pi G\tau_{ab} - \Lambda_4 h_{ab} + k_5^4 \pi_{ab} - E_{ab} \ . \tag{2.2.38}$$

张量 π_{ab} 定义的为

$$\pi_{ab} = \frac{1}{12}\tau\tau_{ab} - \frac{1}{4}\tau_{ac}\tau_b^c + \frac{1}{8}h_{ab}\tau_{cd}\tau^{cd} - \frac{1}{24}\tau^2 h_{ab} \ . \tag{2.2.39}$$

而

$$8\pi G = \frac{k_5^4 \sigma}{6} \ , \tag{2.2.40}$$

$$\Lambda_4 = \frac{k_5^2}{2}\left(\Lambda_5 + \frac{k_5^2}{6}\sigma^2\right) \ . \tag{2.2.41}$$

在 Randall-Sundrum 模型中, 由于膜张力和 5 维时空宇宙常数之间的微调, 我们有 $\Lambda_4 = 0$, 又因为 AdS 时空的 Weyl 张量为 0, 所以 $E_{ab} = 0$. 利用能量守恒和 Bianchi 恒等式, 在膜上有

$$k_5^4 \nabla^a \pi_{ab} = \nabla^a E_{ab} \ . \tag{2.2.42}$$

这种方法的优点是既没假设宇宙均匀各向同性也没假设 5 维时空是 AdS 时空, 当 5 维时空是 AdS 时空且膜是 Friedmann-Robertson Walker 时空时, 上面的方程退化到之前的弗里德曼方程和 Raychaudhuri 方程.

3. 膜上的慢滚动暴胀

在高能条件下, ρ^2 项起主要作用, 这时弗里德曼方程有很大的修改, 膜上的早期宇宙学将与标准 4 维宇宙学不同. 这似乎自然地使人们寻找早期宇宙现象 (例如暴涨) 的膜效应. 标量场的能量密度和压强为

$$\rho_\phi = \frac{1}{2}\phi_{,\mu}\phi^{,\mu} + V(\phi) , \tag{2.2.43}$$

$$p_\phi = \frac{1}{2}\phi_{,\mu}\phi^{,\mu} - V(\phi) . \tag{2.2.44}$$

式中 $V(\phi)$ 是标量场的势能. 标量场的演化由 (修正的)Friedmann 方程, Klein-Gordon 方程和 Raychaudhuri 方程描述.

假设场是慢滚动的, 场的演化由下面的方程描述 (从现在起, 方程中的点号表示对宇宙时求导)

$$3H\dot{\phi} \approx -\frac{\partial V}{\partial \phi} , \tag{2.2.45}$$

$$H^2 \approx \frac{8\pi G}{3}V(\phi)\left(1+\frac{V(\phi)}{2\sigma}\right) . \tag{2.2.46}$$

由这些方程不难发现, 慢滚动参数为

$$\epsilon \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2} = \frac{1}{16\pi G}\left(\frac{V'}{V}\right)^2\left[\frac{4\sigma(\sigma+V)}{(2\sigma+V)^2}\right] , \tag{2.2.47}$$

$$\eta \equiv -\frac{\dot{V}''}{3H^2} = \frac{1}{16\pi G}\left(\frac{V''}{V}\right)\left[\frac{2\sigma}{2\sigma+V}\right] . \tag{2.2.48}$$

上式方括号内的表达式是对广义相对论的修正. 这表明对于给定势和初始条件的标量场, 慢滚动参数比广义相对论预言的减小了. 换言之, 膜宇宙效应减缓了慢滚动暴胀. 当 $\sigma \ll V$ 时, 慢滚动参数被严重削弱. 这表明采用更陡的势可以推进慢滚动暴胀. 下面我们讨论宇宙微扰的含义.

根据爱因斯坦场方程 (2.2.38), 度规的微扰不仅源于物质微扰还源于隐含在 E_{ab} 微扰中的 5 维时空几何微扰, 可以将其看成外部微扰源. 这在广义相对论中是没有的. 从方程 (2.2.42) 可以看出, 如果将 E_{ab} 看作另一种流体 (称为 Weyl 流体) 的能动张量, 那么它的演化将与膜上的物质能量密度有关. 忽略 Weyl 流体压强的各向异性, 它在低能条件下和超视界尺度上像辐射一样衰减, 即 $\delta E_{ab} \propto a^{-4}$. 然而, 5 维时空引力场使得膜上的压强各向异性, 从而导致不能只通过膜上的投影方程获得膜的时间演化, 必须解出所有满足连接条件的 5 维方程.

人们至今还无法理解宇宙不同区域 E_{ab} 的完整演化过程. 下面我们讨论对于 De Sitter 膜已得出的部分结论. 研究表明, E_{ab} 并不改变标量微扰谱. 但人们还不清

楚从宇宙微波背景辐射各向异性的事实来看, 辐射为主时期和物质为主时期的瞬时宇宙演化是否留下了 5 维时空引力场的痕迹. 考虑到这个问题, 对于标量微扰我们将忽略由投影 Weyl 张量描述的引力反作用. 考虑标量微扰后, 膜上的时空线元为

$$\mathrm{d}s^2 = -(1+2A)\mathrm{d}t^2 + 2\partial_i B \mathrm{d}t\mathrm{d}x^i + [(1-2\psi)\delta_{ij} + D_{ij}E]\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j \ , \tag{2.2.49}$$

式中 A, B, E 和 ψ 是 t 和 x^i 的函数. 讨论标量微扰的一个很重要的方法是利用规范不变量

$$\zeta = \psi + H\frac{\delta\rho}{\dot{\rho}} \ . \tag{2.2.50}$$

在广义相对论中, ζ 的演化方程可以由能量守恒方程得到. 在大尺度上有

$$\dot{\zeta} = -\frac{H}{\rho+p}\delta p_{\mathrm{nad}} \ , \tag{2.2.51}$$

其中 $\delta p_{\mathrm{nad}} = \delta p_{\mathrm{tot}} - c_{\mathrm{s}}^2\delta\rho$ 是非绝热压强微扰. 能量守恒方程对于 Randall-Sundrum 模型也成立. 因此 (2.2.51) 对我们考虑的膜宇宙模型仍成立. 单一标量场 δp_{nad} 引起的暴胀会消失, 所以暴胀时期 ζ 在超视界尺度上是常数. 它的幅是平直超曲面上标量场涨落的函数

$$\zeta = \frac{H\delta\phi}{\dot{\phi}} \ . \tag{2.2.52}$$

由于膜宇宙模型中 Klein-Gordon 方程没有改变. (慢滚动) 标量场中的量子涨落满足 $\langle(\delta\phi)^2\rangle(H/2\pi)^2$。标量微扰幅为 $A_{\mathrm{S}}^2 = 4\langle\zeta^2\rangle/25$. 利用慢滚动方程和 (2.2.52) 可以得到 (Maartens et al, 2000)

$$A_S^2 \approx \left(\frac{512\pi}{75M_{\mathrm{Pl}}^6}\right)\frac{V^3}{V'^2}\left(\frac{2\sigma+V}{2\sigma}\right)^3\Bigg|_{k=aH} . \tag{2.2.53}$$

方括号内的仍是修正项. 可以看出, 对于给定的势, 标量微扰幅比广义相对论预言的增大了.

很多研究者认为, 微扰在暴涨时期并不重要, 至少标量微扰是这样的. 但是对于张量微扰, 这一结论不一定正确. 因为引力波可以在 5 维时空中传播. 对于张量微扰, 可以得到单一变量的波动方程, 该方程可以分解成 4 维部分和 5 维部分, 波动方程的解的形式为 $h_{ij} = A(y)h(x^\mu)e_{ij}$, 其中 e_{ij} 是 (常) 极化张量. 张量微扰的零模幅为

$$A_T^2 = \frac{4}{25\pi M_{\mathrm{Pl}}^4}H^2F^2(H/\mu)|_{k=aH} \ , \tag{2.2.54}$$

式中

$$F(x) = \left[\sqrt{1+x^2} - x^2\sinh^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{-1/2} \ , \tag{2.2.55}$$

我们定义了

$$\frac{H}{\mu} = \left(\frac{3}{4\pi\sigma}\right)^{1/2} HM_{\mathrm{Pl}} \,. \tag{2.2.56}$$

可以看出生成了 $m > 3H/2$ 的模, 但它在暴胀时期是衰减的. 因此, 可能只有无质量膜能够维持到暴涨结束的时候.

由 (2.2.54) 和 (2.2.53) 可以看出, 标量微扰和张量微扰的幅在高能时都加强了, 但标量微扰加强得更多, 因此, 如果暴胀发生在高能量时期, 张量微扰的相关贡献就被削弱了.

最后, 我们还要指出, 在预言双场膜暴胀的问题上, 广义相对论和本书讨论的膜宇宙模型存在区别. 两者的相关性分为绝热双场暴胀和等曲率双场暴胀. 在 Randall-Sundrum 模型中, 这种暴胀发生在高能时期, 这种关系变弱了. 这意味着, 如果暴胀发生在能量远大于膜张力时, 那么等曲率微扰和绝热微扰是不相关的.

宇宙微扰的最大问题在于, 只有在背景宇宙中才可能计算投影 Weyl 张量. 分析膜宇宙微扰时, 必须考虑含 E_{0i} 项可能不为 0. 这意味着密度方程与 $\delta = \delta\rho/\rho$ 不同, 而是由下式给出:

$$\ddot{\delta} + (2 - 3\omega_m)\dot{H}\dot{\delta} - 6\omega_m(H^2 + \dot{H})\delta = (1 + \omega_m)\delta R_{00} - \omega_m \frac{k^2}{a^2}\delta \,, \tag{2.2.57}$$

式中 $w_m = p/\rho$, k 是波数. 当 δR_{00} 包含 δE_{00} 时, 这个方程无法解出.

以上讨论的 R-S 模型是最简单的膜宇宙模型. 我们没有讨论修正后的弗里德曼方程导出的其他重要结论, 如原初黑洞的演化.

2.3 含有五维时空标量场的模型

我们将前面得出的结论推广到含标量场的 5 维时空. 为了讨论膜动力学, 我们可以研究投影爱因斯坦场方程和 Klein-Gordon 方程.

1. BPS 背景

我们讨论一个特例, 5 维时空的拉氏量为

$$S = \frac{1}{2k_5^2}\int \mathrm{d}^5x \sqrt{-g_5\left[R - \frac{3}{4}((\partial\phi)^2 + V(\phi))\right]} \,, \tag{2.3.1}$$

式中 $V(\phi)$ 是 5 维时空的势, 边界作用取决于膜势 $U_{\mathrm{B}}(\phi)$

$$S_{\mathrm{B}} = -\frac{3}{2k_5^2}\int \mathrm{d}^4x \sqrt{-g_4 U_{\mathrm{B}}(\phi_0)} \,, \tag{2.3.2}$$

$U_{\rm B}(\phi)$ 在膜上计算. BPS 背景是一种特殊情形, 5 维时空势能和膜势能之间存在特殊的关系. 研究 $N=2$ 且具有矢量多重谱的超引力时, 会出现这种关系, 5 维时空势为

$$V=\left(\frac{\partial W}{\partial \phi}\right)^2-W^2\ , \tag{2.3.3}$$

其中 $W(\phi)$ 是超势, 膜势由超势给出

$$U_{\rm B}=W\ . \tag{2.3.4}$$

最后两个关系式还用于生成 5 维时空解而不必用到超对称性. 取 $W=\text{const.}$, 便回到 R-S 情形. 加上超引力的约束, 超势变为指数形式

$$W=4k{\rm e}^{\alpha\phi}\ . \tag{2.3.5}$$

$\alpha=-1/\sqrt{12}, 1/\sqrt{3}$. 5 维时空运动方程包括爱因斯坦场方程和 Klein-Gordon 方程. 在 BPS 中, 设度规为

$$\mathrm{d}s^2=a(y)^2\eta_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu+\mathrm{d}y^2\ . \tag{2.3.6}$$

这些二阶微分方程可以化为一阶微分方程组

$$\frac{a'}{a}=-\frac{W}{4}\ ,\quad \phi'=\frac{\partial W}{\partial\phi}\ . \tag{2.3.7}$$

当 W 为常数时, 又回到 R-S 模型.

由边界条件可以得到 BPS 系统的一个有趣的性质. Israel 连接条件退化为

$$\left.\frac{a'}{a}\right|_{\rm B}=-\left.\frac{W}{4}\right|_{\rm B}\ , \tag{2.3.8}$$

对于标量场有

$$\phi'|_{\rm B}=\left.\frac{\partial W}{\partial\phi}\right|_{\rm B}\ , \tag{2.3.9}$$

这是 BPS 最重要的性质：边界条件和 5 维时空方程一致. 换言之, 一旦解出 5 维时空方程就可以将 BPS 膜放在背景的任意处, 边界条件对此没有任何限制.

下面我们以指数形式的超势为例, 标度因子解为

$$a=(1-4k\alpha^2x_5)^{1/4\alpha^2}\ , \tag{2.3.10}$$

标量场为

$$\phi=-\frac{1}{\alpha}\ln(1-4k\alpha^2x_5)\ . \tag{2.3.11}$$

当 $\alpha\to 0$ 时, 5 维时空标量场消失, 表达式又回到 R-S 情形. 这里出现了一个新的特征, 即 5 维时空存在奇点

$$\alpha(x_5)|_{x_*} = 0 \,. \tag{2.3.12}$$

为了便于分析奇点的性质, 我们采用共形坐标系

$$\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x_5}{a(x_5)} \,. \tag{2.3.13}$$

在这个坐标系中光沿直线 $u = \pm t$ 传播. 若 $\alpha^2 < 1/4$, 奇点在 $u_* = \infty$ 处, 这个奇点是类光的, 它将吸收入射的引力波. 换言之, 波包的传播不只是在奇点附近才有定义. 综上所述, 含 5 维时空标量场的膜宇宙模型的一个重要缺陷就是存在裸奇点.

2. de Sitter 膜和反 de Sitter 膜

与 BPS 情况

$$U_{\mathrm{B}} = TW \,, \tag{2.3.14}$$

相比较, 通过张力的微调失谐对 BPS 稍有修正, 这相当于增加或减少张力. 上式中 T 是实数. 注意到修正只影响边界条件, 5 维几何和标量场仍是 BPS 运动方程的解. 此时, 膜不再是静态的. 在失谐情况下, 得到一个升高了的膜或旋转了的膜. 接下来我们推广这个结论, 然后再详细解释. 定义 $u(x^\mu)$ 为共形坐标系中膜的位置, 我们得到

$$(\partial u)^2 = \frac{1 - T^2}{T^2} \,. \tag{2.3.15}$$

膜速度矢量和一般的形式一样. 对于 $T > 1$, 膜速度是类时的, 且膜做匀速运动. 对于 $T < 1$, 膜速度矢量是类空的, 且膜是旋转的. 回到静态膜情形, 我们看到 5 维时空几何和标量场依赖于 x^μ. 下面我们会发现膜在静态 5 维时空中运动, 或者说非静态 5 维时空的边界处是静态膜.

通过研究 $T > 1$ 的膜几何, 我们对前面的讨论作一个小结. 可以通过弗里德曼方程得到诱导 5 维时空因子

$$H^2 = \frac{T^2 - 1}{16} W^2 \,. \tag{2.3.16}$$

其中 W 在膜上计算, 可以发现宇宙解只在 $T > 1$ 时有效. 在 R-S 模型中, 由 $W = 4k$ 得到

$$H^2 = (T^2 - 1)k^2 \,. \tag{2.3.17}$$

当 $T > 1$ 时, 膜几何是由正的宇宙常数驱动的, 它只驱动 de Sitter 膜. 当 $T < 1$ 时, 宇宙常数是负的, 它驱动反 de Sitter 膜.

3. 5 维时空标量场和投影方法

首先我们沿用与坐标系无关的方法, 这样可以得到膜上的物质守恒方程, Klein-

Gordon 方程和弗里德曼方程. 然后我们关注更加几何化的形式, 投影 Weyl 张量有重要作用. 下面我们取 $k_5 \equiv 1$.

考虑一个静态膜, 将它放在 $x_5 = 0$ 处, 并设 $b(0,t) = 1$, 这是为了保证膜和 5 维时空的膨胀速率一致

$$4H = \partial_r\sqrt{-g}|_0\ , \quad 3H_{\mathrm{B}} = \partial_r\sqrt{-g_4}|_0\ . \tag{2.3.18}$$

我们定义宇宙时为 $\mathrm{d}\tau = ab|_0\mathrm{d}t$. 另外, 考虑到将出现在膜上的物质, 我们有

$$\tau_\nu^{\mu\mathrm{matter}} = (-\rho_m, p_m, p_m, p_m)\ . \tag{2.3.19}$$

5 维时空的能动张量为

$$T_{ab} = \frac{3}{4}(\partial_a\phi\partial_b\phi) - \frac{3}{8}g_{ab}((\partial\phi)^2 + V)\ . \tag{2.3.20}$$

膜上总的物质密度和压强为

$$\rho = \rho_{\mathrm{m}} + \frac{3}{2}U_{\mathrm{B}}, \quad p = p_{\mathrm{m}} - \frac{3}{2}U_{\mathrm{B}}\ . \tag{2.3.21}$$

膜上物质的出现没有改变标量场的边界条件.

由爱因斯坦场方程的 05 分量得到物质守恒方程

$$\dot\rho_{\mathrm{m}} = -3H(\rho_{\mathrm{m}} + p_{\mathrm{m}})\ . \tag{2.3.22}$$

由爱因斯坦场方程的 55 分量, 我们得到

$$H^2 = \frac{\rho^2}{36} - \frac{2}{3}Q - \frac{1}{9}E + \frac{\mu}{a^4}\ . \tag{2.3.23}$$

式中以 k_5^2 为单位. 最后一项代表暗辐射项, 原因与 R-S 模型中的一样. Q 和 E 满足下面的微分方程

$$\dot Q + 4HQ = HT_5^5\ , \quad \dot E + 4HE = -\rho T_5^0\ .$$

积分这些方程得到

$$H^2 = \frac{\rho^2}{36} + \frac{U_{\mathrm{B}}\rho_{\mathrm{m}}}{12} - \frac{1}{16a^4}\int \mathrm{d}\tau\frac{\mathrm{d}a^4}{\mathrm{d}\tau}(\dot\phi^2 - 2U) - \frac{1}{12a^4}\int \mathrm{d}\tau a^4\rho_{\mathrm{m}}\frac{\mathrm{d}U_{\mathrm{B}}}{\mathrm{d}\tau}\ . \tag{2.3.24}$$

为得到暗辐射项，我们用到了

$$U = \frac{1}{2}\left[U_{\mathrm{B}}^2 - \left(\frac{\partial U_{\mathrm{B}}}{\partial\phi}\right)^2 + V\right]\ . \tag{2.3.25}$$

这是含 5 维时空标量场时膜上的弗里德曼方程. 注意到这里出现了由膜和标量场动力学历史引起的延缓效应. 下面我们会发现, 这些延缓效应源于投影 Weyl 张量, 是由膜和 5 维时空之间交换能量所导致的. 注意到牛顿常数依赖于膜上 5 维时空标量场的值 ($\phi_0 = \phi(t, y = 0)$)

$$\frac{8\pi G_N(\phi_0)}{3} = \frac{k_5^2 U_{\mathrm{B}}(\phi_0)}{12} \,. \tag{2.3.26}$$

在宇宙尺度上, 标量场随时间的变化导致牛顿常数随时间变化, 这使得实验上有很大约束, 也严格限制了标量场对时间的依赖.

为了对弗里德曼方程的物理含义有一个直观的认识, 我们假设标量场在标度因子的变化尺度上演化得很慢, 忽略牛顿常数的演化, 此时弗里德曼方程简化为

$$H^2 = \frac{8\pi G_N(\phi)}{3}\rho_{\mathrm{m}} + \frac{U}{8} - \frac{\dot{\phi}^2}{16} \,. \tag{2.3.27}$$

这里有几点需要说明. 首先, 我们忽略了 ρ^2 项的贡献, 因为我们考虑低于膜张力的能量尺度. 标量场动力学的主要影响是使得弗里德曼方程包含了势能 U 和动能 $\dot{\phi}^2$. 虽然势能为正, 但动能是负的. 动能的负号是由于我们在爱因斯坦标架中研究时牛顿常数不变. 换成膜标架时, 有效 4 维理论中也会出现类似的负号.

含时标量场由 Klein-Gordon 方程确定, 其动力学形式为

$$\ddot{\phi} + 4H\dot{\phi} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \omega_{\mathrm{m}}\right)\rho_{\mathrm{m}}\frac{\partial U_{\mathrm{B}}}{\partial \phi} = -\frac{\partial U}{\partial \phi} + \Delta\Phi_2 \,. \tag{2.3.28}$$

式中 $p_{\mathrm{m}} = \rho_{\mathrm{m}}\omega_{\mathrm{m}}$,

$$\Delta\Phi_2 = \phi''|_0 - \frac{\partial U_{\mathrm{B}}}{\partial \phi}\frac{\partial^2 U_{\mathrm{B}}}{\partial \phi^2}\bigg|_0 \,. \tag{2.3.29}$$

它不能为 0, 下面讨论宇宙解时假设这一项为负.

标量场的演化由两个影响驱动. 首先标量场通过 U 的梯度与能动张量的迹耦合, 其次, 场由势 U 的梯度驱动, 这个梯度可以不为 0.

回到非平庸的弗里德曼方程, 利用 Gauss-Codazzi 方程可以得到膜上的爱因斯坦场方程

$$\bar{G}_{ab} = -\frac{3}{8}Uh_{ab} + \frac{U_{\mathrm{B}}}{4}\tau_{ab} + \pi_{ab} + \frac{1}{2}\partial_a\phi\partial_b\phi - \frac{5}{16}(\partial\phi)^2 h_{ab} - E_{ab} \,. \tag{2.3.30}$$

现在可以在均匀各向同性宇宙情形下确定投影 Weyl 张量了. 实际上, 只有 E_{00} 分量是独立的. 利用毕安奇恒等式 $\bar{\mathrm{D}}^a\bar{G}_{ab} = 0$, $\bar{\mathrm{D}}^a$ 为膜协变导数, 可以得到

$$\dot{E}_{00} + 4HE_{00} = \partial_\tau\left(\frac{3}{16}\phi^2 + \frac{3}{8}U\right) + \frac{3}{2}H\dot{\phi}^2 + \frac{\dot{U}_B}{4}\rho_{\mathrm{m}} \,, \tag{2.3.31}$$

进而得到

$$E_{00} = \frac{1}{a^4}\int \mathrm{d}\tau a^4 \left[\partial_\tau\left(\frac{3}{16}\phi^2 + \frac{3}{8}U\right) + \frac{3}{2}H\dot{\phi}^2 + \frac{\dot{U}_{\mathrm{B}}}{4}\rho_{\mathrm{m}}\right] \,, \tag{2.3.32}$$

利用

$$\bar{G}_{00} = 3H^2 \ , \tag{2.3.33}$$

可以得到弗里德曼方程. 不难看出, 延缓效应是由于投影 Wely 张量引起的.

4. 微调和宇宙加速膨胀

膜动力学不是封闭的, 它是一个开放系统并不断与 5 维时空交换能量, 主要体现在暗辐射项和亏损参量上. 由于我们只讨论膜上的物理量, 采用投影方法时不需要详细了解膜动力学. 下面我们假设不存在暗辐射项, 并忽略亏损参量. 另外, 我们讨论 5 维时空标量场在不驱动暴胀的情况下对后期宇宙 (即核合成后) 的影响.

我们利用微调来解决宇宙常数问题. 对应于 $\alpha = 1$ 的 BPS 超势，对于任意的膜张力值都有 $U = 0$，由此可以解释膜宇宙学常数的消失. 物理上我们把膜宇宙常数的消失解释为膜张力使 5 维时空弯曲, 从而形成一个完整的平直膜. 然而这种 5 维时空几何描述会导致 5 维时空奇点, 这个奇点必须由第二个膜掩盖, 这时第二个膜经过微调后与第一个膜的张力一致. 这再次表明, 微调是公认的解决宇宙常数问题的方法.

我们将微调推广到 $\alpha \neq 1$ 的情况, 即 $U_{\mathrm{B}} = TW$, $T > 1$ 且 W 是指数形式的超势, 得到膜上的诱导度规属于 FRW 型, 标度因子为

$$a(t) = a_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{1}{3} + \frac{1}{6\alpha^2}} \ , \tag{2.3.34}$$

从而得到宇宙加速因子

$$q_0 = \frac{6\alpha^2}{1 + 2\alpha^2} - 1 \ , \tag{2.3.35}$$

对于超引力的值 $\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{12}}$, 得到 $q_0 = -4/7$, 这与超新星观测结果吻合. 这个模型堪称膜宇宙理论的典范, 后面我们还要讨论这个理论的缺陷.

5. 膜宇宙的演化

考虑存在 5 维时空标量场时的宇宙, 假设在辐射为主时期和物质为主时期 5 维时空标量场的势能 U 可以忽略.

在远大于膜张力的高能条件下, 可以得到一个由弗里德曼方程中 ρ^2 项决定的特殊的宇宙. 假设在辐射为主时期标度因子的行为满足

$$a = a_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{1/4} \ , \tag{2.3.36}$$

而标量场满足

$$\phi = \phi_i + \beta \ln\left(\frac{t}{t_0}\right) \ . \tag{2.3.37}$$

可以看出, 在辐射为主时期不存在修正. 假如

$$\phi = \phi_i \ , \tag{2.3.38}$$

这是当辐射能动张量的迹为零时 Klein-Gordon 方程的一个解 (还有一个衰减解, 我们忽略了). 在物质为主时期, 标量场由于与能动张量的迹耦合而演化, 这会导致两个结果: 第一, 标量场的动能会对弗里德曼方程有贡献; 第二, 有效牛顿常数不再是常数. 由于核合成, 牛顿常数的宇宙演化受到严格限制, 也限制了 ϕ 的演化. 为了定量地讨论, 我们回到具有失谐参数 T 的指数超势. 标量场和标度因子与时间的关系为

$$\phi = \phi_1 - \frac{8}{15}\alpha \ln\left(\frac{t}{t_e}\right) , \quad a = a_c \left(\frac{t}{t_e}\right)^{\frac{2}{3} - \frac{8}{45}\alpha^2} ,$$

式中 t_e 和 a_e 是物质和辐射平衡时的时间和标度因子, 注意标度因子的指数与标准模型中的 $\frac{2}{3}$ 有微小的差异. 与牛顿常数相关的红移值为

$$\frac{G_N(z)}{G_N(z_e)} = (\frac{z+1}{z_e+1})^{4\alpha^2/5} . \tag{2.3.39}$$

当引力模型取 $\alpha = -\frac{1}{\sqrt{12}}$ 和 $z \sim 10^3$ 时, 可以算出自核合成以来, 红移减少了约 37%, 这个结果与实验观测基本符合.

最后, 我们分析标量场的膜势能 U 导致宇宙加速膨胀的可能性. 当忽略膜上的物质时, 可以构建一些膜 quintessence 模型. 这会导致微调问题

$$M^4 \sim \rho_c . \tag{2.3.40}$$

式中 $M^4 = (T-1)\frac{3W}{2k_5^2}$ 是膜上失谐张力的大小. 如果像大部分 quintessence 模型那样利用微调来解决, 那么 $\alpha = -\frac{1}{\sqrt{12}}$ 的指数模型与 5 维 quintessence 模型在宇宙学上是一致的.

2.4 小 结

含 5 维时空标量场的膜宇宙模型不同于 R-S 模型的地方是引力常数随时间变化. 它与本篇第一章 Brans-Dicke 的标量–张量理论有很多相同之处, 但有一个重要的区别是投影 Weyl 张量和它的演化. 5 维时空标量场不仅起 quintessence 的作用, 还在宇宙暴胀时期起重要作用. 人们将会发现, 5 维时空标量场在宇宙微波背景辐射各向异性和时空大尺度结构中留下痕迹.

第十篇　广义相对论引力效应

爱因斯坦的引力场方程和在这个场中的运动方程都是相当复杂的. 由这些方程可以引出许多新的推论. 这些推论对牛顿引力理论进行了修正；给出了若干含有新参量的场方程和运动方程的新的特解和新的附加条件. 这些推论中, 有一些可以给予或多或少的物理解释, 这样的一些推论被称为引力效应.

在爱因斯坦对广义相对论做了奠基工作之后, 许多年来人们的主要精力并不是用在研究理论预言的引力效应上面, 而是用在它的理论本身 (数学形式) 的研究和推广上面. 随着实验技术的迅速发展和测量精度的显著提高, 这一状况发生了变化. 许多文章和专著, 不仅仅局限于讨论某些理论预言的直接实验验证, 而且还讨论这些引力效应与广义相对论各基本原理之间的联系. 这些新的进展激励人们在解决广义相对论一些特殊问题的同时, 扩展对引力效应和引力实验的研究, 并进一步得出具体的推论. 因此, 除了详细分析广义相对论预言的四个著名的引力效应以外, 有必要把广义相对论预言的许多其他引力效应进行分类研究. 许多引力效应因为比较微弱, 或者因为夹杂在其他效应中难以分出, 在近期内还不能被实验验证. 但是, 我们相信, 随着实验技术 (包括宇航技术) 的发展, 会有越来越多的引力效应被各类实验所验证. 这些效应和实验验证还可以用来区分各种不同引力理论的正确程度. 事实上, 随着实验精度的提高, 已经淘汰了一大批非爱因斯坦引力理论, 虽然人们曾经承认它们是合理的.

本篇选出的广义相对论引力效应均属于非量子化的. 我们着重考虑这些效应与牛顿引力理论中的效应之间的本质区别.

引力场方程的右端是所有非引力场的能量–动量张量. 所以, 引力势 $g_{\mu\nu}$ 的表达式中起参量作用的物理量数目比牛顿引力理论中的要多. 其中不但有引力质量, 而且还有电荷、电的 (或磁的) 偶极矩, 宇宙常数等等. 我们称这些参量为引力参量, 如“引力质量”、“引力电荷”、“引力自旋”等. 其中, 只有引力质量是广义相对论和狭义相对论所共有的引力参量, 即使在广义相对论的最简单的引力场 ——Schwarzschild 场中, 大多数引力效应也会与牛顿引力理论中的不同. 如果 $T_{\mu\nu}$ 中除引力质量外又包含其他的参量, 则会出现新的引力效应.

为了使问题简化, 和牛顿力学中的类似, 我们常引入试验物体的概念. 如果一物体的存在不影响周围的引力场, 即对引力场 $g_{\mu\nu}$ 无贡献, 则这一物体叫做试验物体. 在最简单的情况下, 试验物体只有一个参量 —— 很小的质量. 简化之后 (根据等效原理), 它可以按照短程线运动.

各种不同的引力参量和试验参量, 以及在运动方程中加于轨道参量的各种不

同的初始条件, 可以构成许多组合, 从而可给出引力场方程和运动方程的很多组解. 由此可预言很多 (广义相对论的) 引力效应. 其中有一些属于同一类效应, 如各种情况下的引力红移效应等. 但是这些效应对上述不同参量的依赖性又使它们各具特点, 因此又表现为各自独立的效应.

为了描述多体系统, 运动物体的辐射和宇宙解等方面的效应, 除了上述各参量以外还要引入一些另外的参量.

第 1 章　引力场中的频移效应

1.1　均匀引力场的情况

光谱线的引力红移效应是广义相对论著名的经典实验验证之一, 它实际上只验证了广义相对论的基本原理 —— 等效原理, 与引力场方程无关. 为了说明这一点, 我们首先讨论均匀引力场的情况.

设想在强度为 $g = \text{const}$ 的均匀引力场中, 沿场强方向有两点 B 和 A(图 10-1). B 在 A 的上方, A、B 相距 h , 一束频率为 ν_B 的光由 B 发出, 至 A 点被接收. 根据等效原理, 引力场 g 等效于一个加速系, 自下而上相对于惯性系做匀加速运动, A 和 B 均静止于加速系中. 光波由 B 至 A 历时 h/c, 此时系统已获得速度 $g\dfrac{h}{c}$. 按多普勒效应, 有

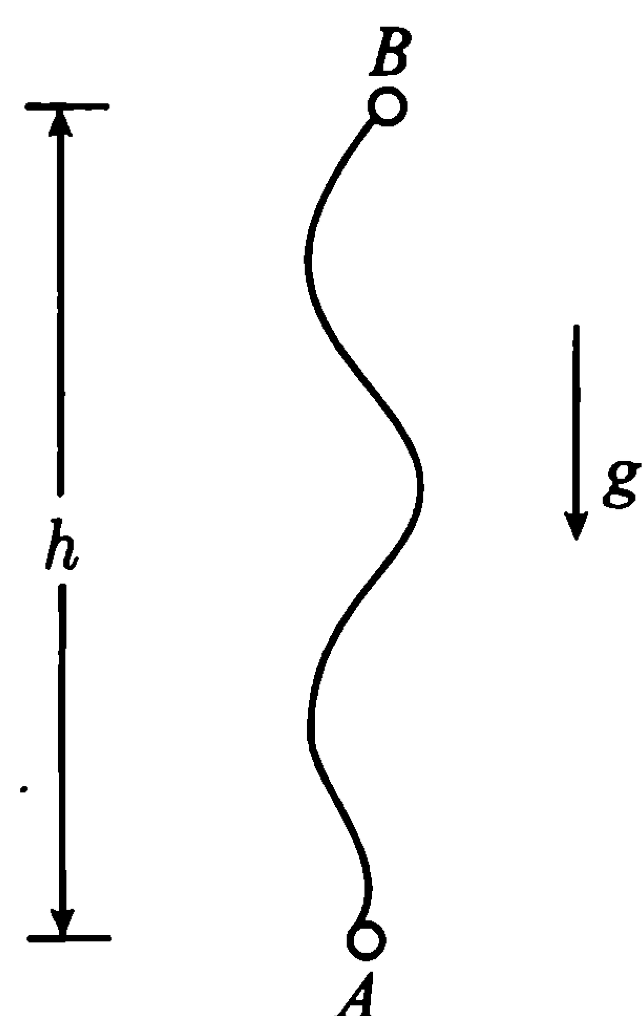


图 10-1

$$\nu_A = \nu_B\left(1+\frac{v}{c}\right) = \nu_B\left(1+\frac{gh}{c^2}\right).$$

即 A 点观测到光谱线的紫移. 如果光波由 A 发出 (逆引力场方向传播), 至 B 点被接收, 只要将上式中 A 换成 B, g 换成 $-g$ 即可:

$$\nu_B = \nu_A\left(1-\frac{gh}{c^2}\right).$$

或

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = -\frac{gh}{c^2}. \tag{1.1.1}$$

此式表明光逆引力场方向传播时要发生光谱线的红移, 上式可表示为

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = -\frac{U_B - U_A}{c^2} = -\frac{\Delta U}{c^2}. \tag{1.1.2}$$

式中 U 为引力标势.

1.2　静态引力场中的静止情况

现在我们将 (1.1.2) 推广到一般的静态引力场, 但仍设光源和接收器都静止在引力场中. 设光波由 A 点发出, 至 B 点被接收, 考虑波场中相邻的两个波阵面. 设

第一个波阵面经过 A 点和 B 点的坐标时分别为 t_1^A 和 t_1^B, 第二个波阵面经过 A 和 B 的坐标时分别为 t_2^A 和 t_2^B. 由于引力场是静态的, 故有

$$t_1^B - t_1^A = t_2^B - t_2^A. \tag{1.2.1}$$

我们知道, 对于引力场中一点发生的过程, 静止标准钟和静止坐标钟读数之间的关系为

$$\mathrm{d}\tau = \sqrt{g_{00}}\mathrm{d}t. \tag{1.2.2}$$

由 (1.2.1) 可知 $\mathrm{d}t^A = \mathrm{d}t^B$, 由 (1.2.2) 可知

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\tau^A &= \sqrt{g_{00}^A}\mathrm{d}t^A,\\ \mathrm{d}\tau^B &= \sqrt{g_{00}^B}\mathrm{d}t^B.\end{aligned} \tag{1.2.3}$$

于是有

$$\frac{\mathrm{d}\tau^A}{\mathrm{d}\tau^B} = \frac{\sqrt{g_{00}^A}}{\sqrt{g_{00}^B}}. \tag{1.2.4}$$

或者以频率表示为

$$\frac{\nu_B}{\nu_A} = \frac{\sqrt{g_{00}^A}}{\sqrt{g_{00}^B}}, \quad \frac{\Delta\nu}{\nu} = \sqrt{\frac{g_{00}^A}{g_{00}^B}} - 1. \tag{1.2.5}$$

对于 1.1 节中均匀引力场的经典近似情况, 在上式中代入 $g_{00} = 1 + \dfrac{U}{c^2}, U = \dfrac{g}{c}z$($z$轴沿$AB$方向), 便退化为式 (1.1.1) 和 (1.1.2).

1.3　光源和接收器运动的情况

取 $c = G = h = 1$(自然单位系). 设想在 x_A^i 处有一原子, 以速度 v_A^i 运动时辐射一能量为 ε 的光子, 同时其静止质量由 m_2 变为 m_1, 速度变为 $v_A'^i$. 设 p_A^μ 为该原子的四维动量, 根据爱因斯坦能量 – 动量关系式, 辐射光子之前有

$$p_{A\mu}(m_2, v_A^i)p_A^\mu(m^2, v_A^i) = m_2^2, \tag{1.3.1}$$

或

$$g_{\mu\nu}(x_A^i)p_A^\mu(m_2, v_A^i)p_A^\nu(m_2, v_A^i) = m_2^2. \tag{1.3.2}$$

辐射光子之后有

$$g_{\mu\nu}(x_A^i)p_A^\mu(m_1, v_A'^i)p_A^\nu(m_1, v_A'^i) = m_1^2. \tag{1.3.3}$$

由辐射过程中能量–动量守恒可知

$$p_A^\mu(m_1, v_A'^i) = p_A^\mu(m_2, v_A^i) - \varepsilon^\mu, \tag{1.3.4}$$

式中 ε^u 为光子的四维动量 ($h=c=1$). 于是 (1.3.3) 成为

$$g_{\mu\nu}(x_A^i)[p_A^\mu(m_2,v_A^i)-\varepsilon^\mu][p_A^\nu(m_2,v_A^i)-\varepsilon^\nu]=m_1^2. \tag{1.3.5}$$

由 (1.3.2)~(1.3.5) 得到

$$2g_{\mu\nu}(x_A^i)p_A^\mu(m^2,v_A^i)\varepsilon^\nu-g_{\mu\nu}\varepsilon^\mu\varepsilon^\nu=m_1^2-m_1^2. \tag{1.3.6}$$

由于光子静止质量为零, 所以上式左端后一项等于零

$$g_{\mu\nu}\varepsilon^\mu\varepsilon^\nu=\mu_0^2=0. \tag{1.3.7}$$

又假设辐射沿 x^1 方向, 则 ε^μ 只有 ε^0 和 ε^1 两个分量不为零. 于是由 (1.3.6) 和 (1.3.7) 得到

$$\nu_A=\varepsilon^0=\frac{m_2^2-m_1^2}{2[g_{\mu0}(x_A^i)+g_{\mu1}(x_A^i)]p_A^\mu(m_2,v_A^i)}. \tag{1.3.8}$$

设另一原子在 x_B^i 处以速度 v_B^i 运动, 吸收这一光子之后静止质量由 m_1 变为 m_2(这对应于原子静止质量及其变化相对引力场中空间坐标的不变性). 与得到 (1.3.8) 的过程类似, 得到

$$\nu_B=\frac{m_2^2-m_1^2}{2[g_{\mu0}(x_B^i)+g_{\mu1}(x_B^i)]p_B^\mu(m_2,v_B'^i)}, \tag{1.3.9}$$

式中 $v_B'^i$ 是 B 处原子吸收光子后的速度. 由 (1.3.8) 和 (1.3 9) 得到

$$\nu_B=v_A\frac{[g_{\mu0}(x_A^i)+g_{\mu1}(x_A^i)]p_A^\mu(m_2,v_A^i)}{[g_{\mu0}(x_B^i)+g_{\mu1}(x_B^i)]p_B^\mu(m_2,v_B'^i)}, \tag{1.3.10}$$

或

$$\frac{\nu_B-\nu_A}{\nu_A}=\frac{[g_{\mu0}(x_A^i)+g_{\mu1}(x_A^i)]p_A^\mu(m_2,v_A^i)}{[g_{\mu0}(x_B^i)+g_{\mu1}(x_B^i)]p_B^\mu(m_2,v_B'^i)}-1. \tag{1.3.11}$$

这就是光源和接收器运动情况下的引力频移一般表达式.

对于光源和接收器静止的特殊情况, $v_A^i=v_B'^i=0$, 能量–动量关系式为

$$g_{00}p^0p^0=m_2^2,\quad p^i=0,\quad i=1,2,3$$

或

$$p^0=\frac{m^2}{\sqrt{g_{00}}},\quad p^i=0. \tag{1.3.12}$$

取时轴正交系 (静态场)$g_{0i}=0$, 将上式代入 (1.3.10), 便得到 (1.2.5).

对于平直空间的情况, $g_{\mu\nu}=\mathrm{diag}\{1,-1,-1,-1\}$, 代入 (1.3.10) 得

$$v_B=v_A\frac{p_A^0(m_2,v_A^i)-p_A^1(m_2,v_A^i)}{p_B^0(m_2,v_B'^i)-p_B^1(m_2,v_B'^i)}. \tag{1.3.13}$$

当 A 处原子 (光源) 静止时, $v_A^i = 0$, 代入式

$$p^i = \frac{mv^i}{\sqrt{1-v^2}}, \quad p^0 = \frac{m}{\sqrt{1-v^2}}\left(\frac{1}{\sqrt{g_{00}}} - \frac{g_{0i}v^i}{g_{00}}\right),$$

再代入 (1.3.13), 得到

$$v_B = v_A \frac{\sqrt{1-v_B'^2}}{1-v_B'}, \tag{1.3.14}$$

这正是狭义相对论中多普勒效应的表达式.

在频移的一般表达式 (1.3.11) 中, 含有度规 $g_{\mu\nu}$、光源和接收器的动量 p^μ. 因此一般地说频移依赖于引力场源参量 (质量, 电荷等) 和运动物体的参量 (p^μ). 等效原理使多普勒频移和引力频移有本质上相同的特点, 由此可以区别于其他种类的频移: 由电场引起的 (史塔克效应), 由磁场引起的 (塞曼效应) 和康普顿效应等等. 引力频移属于多普勒频移, 它不使谱线加宽和分裂. 当然, 由于 (1.3.11) 不仅包含场参量, 而且也包含运动源和观察者参量, 要区分这两者对频移的贡献实际上是不可能的. 通常可以用实验验证的是 (1.2.5). 此式只由 g_{00} 中含有的引力场参量决定, 而与运动方程无关. 可以把 (1.2.5) 看作所含诸参量 (如源质量 m, 源电荷 e 等) 共同作用所产生的总的频移效应.

1.4　Schwarzschild 场中的红移效应

在 Schwarzschild 场中, 设观察者 B 离场源足够远, $g_{00}^B = 1$, 而 $g_{00}^A = 1 - \dfrac{2m}{r}$, 代入 (1.2.5) 得

$$\left(\frac{\Delta\nu}{\nu}\right)_m = \sqrt{1-\frac{2m}{r}} - 1. \tag{1.4.1}$$

式中下标 m 表示产生引力效应的参量是源质量 m. 当此参量等于零时, 相应的引力也就不存在. $m = 0$, 空–时平直, 对应于牛顿引力理论的情况, 那时不存在坐标钟与标准钟的差别, 当然效应 (1.4.1) 等于零. 因此, 红移 (1.4.1) 是广义相对论效应. 注意到 $m \equiv GM/c^2$, 在 $c \to \infty$ 的极限情况下此效应也消失. 精确到 $\left(\dfrac{m}{r}\right)$ 的一阶项, (1.4.1) 可写为

效应 1

$$\left(\frac{\Delta\nu}{\nu}\right)_m = -\frac{m}{r}. \tag{1.4.2}$$

对于自太阳表面辐射的光, 由 $M_\odot = 1.98 \times 10^{33} g, r_\odot = 6.95 \times 10^{10}\text{cm}$, 可得理论值

$$z \equiv -\left(\frac{\Delta\nu}{\nu}\right)_m = 2.119 \times 10^{-6}. \tag{1.4.3}$$

对于太阳的观测, 在除去非引力效应之后, 得到的观测值如下:

1959, M.G.Adams: $z = 2 \times 10^{-6}$,

1961, E.Blamont 和 E.Roddier 以及 1963, J.Branlt

$$z = (2.12 \times 10^{-6}) \times (1.05 \pm 0.05) \tag{1.4.4}$$

比较 (1.4.3) 和 (1.4.4) 可知, 理论值以 5%的精度和观测值相符合. 对于恒星光谱的观测, J.L.Greenstein 等对天狼星 -B 测得 $z = (3.0 \pm 0.5) \times 10^{-4}$, 而理论值为 $(2.8 \pm 1) \times 10^{-4}$.

1960 年, Pound 和 Rebka 首次在实验室中完成了验证引力红移的实验, 他们利用了 1958 年发现的 Mössbauer 效应.

用射线轰击原子核时, 产生吸收的条件是原子核本身也能辐射相同频率的射线, 即人们熟知的共振吸收. 当原子核由激发态跃回基态时, 由于激发能级本身有一定的宽度, 辐射出来的 γ 射线并不是单色的. 用这种射线轰击同类基态原子核时, 应该发生共振吸收, 使基态核跃迁到激发态 (设能级为 E). 设想在某种物理因素的影响下, 射线频率发生微小变化, 但仍未超过吸收范围, 则通过对吸收情况的测量, 便可以确定这种物理因素的微小影响. 这是十分理想的精密测量. 例如, ${}^{57}_{27}\mathrm{Co}$ 经过电子俘获蜕变为 ${}^{57}_{28}\mathrm{Fe}$, 铁核处于发态激发态, 共振能级很窄, 因而只要有频移 $z = 10^{-13}$ 就可能观察到. 用这一实验可以测量纵向多普勒效应, 当 ${}^{57}\mathrm{Fe}$ 共振吸收时, 相对速度 $v = 0.1\mathrm{mm{\cdot}s^{-1}}$ 所产生的频移 $z = \dfrac{v}{c} \sim 10^{-13}$ 就有可能观测到. 利用可见光所作的测量是无论如何也达不到这样高精度的.

但是遗憾的是, 在 Mössbauer 效应出现之前, 上述共振吸收根本无法实现. 这是由于自由核无论放射还是吸收都伴随有核的反冲. 当核放出 γ 光子时, 激发能的一部分转变为核反冲的动能, 因而实际放出 γ 光子的频率 $\nu_1 < E/h$, 而在吸收 γ 光子时, 入射光子能量 $h\nu_2$ 又要供给核反冲的动能, 因而 $\nu_2 > E/\ h$. 由此得 $\nu_2 > \nu_1$, 即自由核共振吸收的频率大于它所能放出的频率. 在谱线相当窄的情况下这是不可能实现的. 比如 ${}^{57}\mathrm{Fe}$, 反冲动能约为 $10^{-3}\mathrm{eV}$, 比激发能级的宽度大 10^6 倍, 已无法再产生共振. 其实, 即使没有核反冲, 只要分子热运动使两个核的纵向相对速度大于 $1\mathrm{mm{\cdot}s^{-1}}$, 共振条件也会被破坏. Mössbauer 巧妙地利用了晶格对核的束缚, 同时降低温度, 使其不致受激而产生弹性波. 这样, 基本上消除了核的反冲, 使上述 γ 射线的共振吸收得到实现, 从而提供了一种精度极高的测量方案.

下面简述 1960 年 Pond 和 Rebka 的实验. 在实验室中, 重力加速度 g 可以看作常量, 因此广义相对论预言的频移以 (1.1.1) 式表示. 当 $h = 10m$ 时, 由此式算得

$$z = -\frac{\Delta\nu}{\nu} \approx 1.1 \times 10^{-15},$$

此值在共振线宽度以内, 可以实现共振吸收. 用 ${}^{57}\mathrm{Co}$ 和 ${}^{57}\mathrm{Fe}$ 嵌入铁板表面的晶格

中. 将一块板作为吸收层放在下方, 另一块作为放射源放在吸收层的上方, 并在吸收层下面记录共振吸收的情况. 如果放射源和吸收层的高度差 $h = 45.11\mathrm{m}$, (1.1.1) 给出

$$z = -\frac{\Delta\nu}{\nu} \approx 4.92 \times 10^{-15}(\text{理论值}). \tag{1.4.5}$$

实验测得

$$z = (5.13 \pm 0.51) \times 10^{-15}(\text{实验值}), \tag{1.4.6}$$

从而在地球上的实验室中验证了广义相对论的预言, 精度为 5%.

Pound 和 Snider 于 1964 年又以 1%的精度验证上式 (1.1.1).

上面讨论的红移 (理论的和实验的) 都是 $\left(\frac{m}{r}\right)$ 的一阶效应. Schwarzschild 场中的二阶频移效应为

效应 2

$$\left(\frac{\Delta\nu}{\nu}\right)_{m^2} = -\frac{m^2}{2r^2}. \tag{1.4.7}$$

人们曾断言, 由于量 $\left(\frac{m}{r}\right)^2$ 很小, 上式被证实的可能性不大. 但是后来有些学者借助于大离心率轨道的宇宙装置研究了二级效应的测量问题, 研究结果认为不久的将来可以验证效应 2. 实际上, 在太阳附近 $(m/r)^2 10^{-13} \sim 10^{-12}$, 用原子钟是完全可以测量的. 原子钟周期的稳定性目前可达到 $10^{-16} \sim 10^{-14}$.

关于光谱线红移的机制, 目前有两种解释. 一种是由引力场产生的引力红移, 另一种是由于天体之间相互远离的速度产生的多普勒红移. 关于引力红移, 目前所知道的最大值是 $z \approx 10^{-2}$(中子星). 但是实际观察到的红移数值自 20 世纪 60 年代类星体发现以来都远远超过了这一数值. 例如, 类星体 OQ172, $z = 3.53$. 如果认为引力红移达到了这样大的值, 则根本无法想象它的物质结构; 若认为是这一类星体迅速后退所产生的多普勒红移, 则后退速度达 $0.9c$ 以上. 是否存在第三种红移机制, 目前尚不清楚.

1.5　R-N 场中的频移效应

将 Reissner-Nordström 度规 [第三篇式 (1.3.9)] 中的 g_{00} 代入 (1.2.5), 可以得到引力电荷 e 对频移的贡献:

效应 3

$$\left(\frac{\Delta\nu}{\nu}\right)_{k} = \frac{k}{2r^2}. \tag{1.5.1}$$

式中 $k = Ge^2/\ c^4$, e 为场源所含电荷. 这一效应和电荷的正负无关. 上式大于零, 这表明引力电荷使光谱线紫移而不是红移. 由上式还可看出, 在 $r = r_k = \ k/2m$ 处,

红移 (1.4.2) 和紫移 (1.5.1) 互相抵消, r_k 只和引力场源参量有关, 仅当比值 k/m 很大时距离 r_k 才有意义. 虽然解 (1.3.9) 中 e 的值可以一直取到 $e=m$, 但是人们研究星体附近等离子区中异号电荷的平衡条件时发现, 星体所含电荷 e 的可能值远小于 m. 所以只能期望在具有 $e>m$ 的裸奇点的场中, 频移 (1.4.2) 和 (1.5.1) 抵消.

原则上, 在静电起电机或静电加速器的场中可以记录频移 (1.5.1). 用迈克耳孙干涉仪做实验, 来比较带正电的、带负电的和中性的场源辐射频率的差别. 当电势为 $\pm 5\times 10^4$V 时, 预期每伏频移为 $1.1\pm 8.8\times 10^{-14}$; 提高测量精度之后, 将电势升至 $\pm 3\times 10^5$V 时, 预期每伏频移为 $0.9\pm 1.0\times 10^{-15}$. 虽然电势的这一数值对于显示效应 3 是很小的, 但实验明显地表明频移与电荷的正负无关 —— 对于不同符号的电荷, 频移近似相等, 这说明频移对静电势的依赖关系是非线性的.

1.6 宇宙项对频移的贡献

将含宇宙项的球对称外部度规 [第三篇 (1.2.13)] 代入 (1.2.5), 容易求出宇宙因子 λ 对频移的贡献:

效应 4

$$\left(\frac{\Delta\nu}{\nu}\right)_\lambda = -\frac{\lambda}{6}r^2. \tag{1.6.1}$$

这一红移效应只有 r 很大时才有可能显示出来, 因为 λ 的值很小. Tolman(1949) 在 de Sitter 宇宙模型中研究了这一效应. 在这种情况下, 由于熟知的引力频移与多普勒频移的相似, 通常用等效多普勒频移代替引力频率 (1.6.1) 进行研究.

1.7 质量四极矩场中的频移效应

在球对称引力场中, 频移不依赖于坐标 θ 和 φ, 所以是各向同性的. 由球对称场的预言与实验观测的符合程度可以判断, 如果存在频移的各向异性, 它应小于整个效应的 0.1%(在地面上观测).

Hofmann(1957) 首先讨论了质量四极矩 σ 引起的频移, 他计算了椭球体的牛顿引力势对一阶效应 (1.4.2) 的影响.

将质量四极矩的度规 [第三篇 (1.8.22)] 代入频移式 (1.2.5), 得到

效应 5

$$\left(\frac{\Delta\nu}{\nu}\right)_\sigma = \frac{m^3\sigma}{15r^3}\left(1+\frac{m}{r}\right)(3\cos^2\theta-1). \tag{1.7.1}$$

当位于辐射源的赤道平面 $\left(\theta=\frac{\pi}{2}\right)$ 和对称轴 $(\theta=0)$ 上时, 上式分别简化为

$$\left(\frac{\Delta\nu}{\nu}\right)_\sigma\left(\theta=\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{m^3\sigma}{15r^3}\left(1+\frac{m}{r}\right), \tag{1.7.2}$$

和

$$\left(\frac{\Delta\nu}{\nu}\right)\sigma(\theta=0)=\frac{2m^3\sigma}{15r^3}\left(1+\frac{m}{r}\right). \tag{1.7.3}$$

由上两式可知, 当角度 θ 改变时, 四极矩的引力作用不但改变了频移的大小, 而且改变了频移的符号. 当 $\theta=\theta_0=\arccos(1/\sqrt{3})$ 时, $\left(\frac{\Delta\nu}{\nu}\right)_\sigma=0$. 此时质量的非球对称性对谱线频移效应没有贡献. 所以, 在地球上准确地验证效应 (1.4.2) 和 (1.4.7) 只能在 $\theta=\theta_0$ 处进行. 实际上, 考虑到 m 和 σ 的值. 我们得到 $m^3\sigma/r^3\sim 5\times10^{-12}\gg m^2/r^2\approx 4\times10^9$. 这就是说, 当二阶效应 (1.4.7) 出现时, 必须考虑 (1.7.1) 的贡献.

1.8　Kerr 场中的频移效应

由 Kerr 度规 [第三篇 (1.14.12)] 和 (1.2.5) 可以求得角动量对频移的贡献:

效应 6

$$\begin{aligned}\left(\frac{\Delta\nu}{\nu}\right)_a&=\sqrt{1-\frac{2mr}{r^2+a^2\cos^2\theta}}-1\\&\approx\frac{ma^2}{r^3}\cos^2\theta.\end{aligned} \tag{1.8.1}$$

与四极矩 σ 的贡献类似, 比角动量 a 确定了效应 6 对角度 θ 的依赖关系, 但这一关系具有 Kerr 场固有的特点. 与 (1.7.2)~(1.7.3) 不同, 我们得到

$$\left(\frac{\Delta\nu}{\nu}\right)_a\left(\theta=\frac{\pi}{2}\right)=0, \tag{1.8.2}$$

$$\left(\frac{\Delta\nu}{\nu}\right)_a(\theta=0)=\frac{ma^2}{r^3}. \tag{1.8.3}$$

只是频移的大小随 θ 改变, 频移的符号不随 θ 变. 当观察者位于旋转质量上面时, 角动量的引力作用对频移的影响已由 Das(1957) 研究过, 他用了场方程的近似解. Hafele(1972) 研究了克尔尔场中用原子钟显示的早钟延缓, 从而讨论了频移效应, 但没有强调效应 6 的角关联 (对角度 θ 的依赖关系). 要揭示这种角关联, 需要将原子钟放在不同 θ 角的地方. 实际上只要简单记录 (不要定量测量) 频移是正的还是负的, 就可以判断场方程对应解的结构. 这些简单的实验可以揭示 Kerr 度规的某些性质, 因为效应 (1.8.1) 取决于度规中所含的角动量.

对于地球, $ma^2/r^3\sim10^{-22}$, 所以效应 (1.8.1) 在地球上与 (1.4.7) 量级相近.

1.9 平面引力波场中的频率效应

频移表达式 (1.3.11) 对于任何度规 $g_{\mu\nu}$ 都适用, 就是说对于引力场方程的任何一个解都成立, 当然也包括波动解. 将平面波解代入 (1.3.11), 在辐射源和观察者在引力波场中相对静止的情况下, 得到

$$\left(\frac{\Delta\nu}{\nu}\right)_{GV} = [(h_{22})_B - (h_{22})_A]\sin^2\frac{\theta}{2}. \tag{1.9.1}$$

式中 θ 是光信号与引力波传播方向间的夹角 (取坐标轴 $x^1 = x$). 对于单色波, 可将 h_{22} 写为下面的形式:

$$h_{22} = p_{22}\cos\omega\left(t - \frac{x}{c}\right). \tag{1.9.2}$$

设辐射源位于坐标原点 ($x_A = 0$), 观察者 B 与辐射源 A 之距离为 l, 则

$$x_B = l\cos\theta, \quad t_A = t_B - t. \tag{1.9.3}$$

由此求得.

效应 7

$$\left(\frac{\Delta\nu}{\nu}\right)_{GV} = 2p_{22}\left[\left(\sin\omega\frac{l}{c}\sin^2\frac{\theta}{2}\right)\right.$$
$$\left.\times \sin\left(\omega t_B - \omega\frac{l}{c}\cos^2\frac{\theta}{2}\right)\right]\sin^2\frac{\theta}{2}. \tag{1.9.4}$$

此式表明, 平面引力波场中的频移是时间的周斯函数, 并依赖于光信号在引力波场中的传播方向, 当光信号的传播方向与 x 轴垂直时, 频移具有最大值

$$\left(\frac{\Delta\nu}{\nu}\right)_{GV,\max} = p_{22}\sin\left(\frac{\omega l}{2c}\right)\sin\left(\omega t_B - \frac{\omega l}{2c}\right). \tag{1.9.5}$$

当光信号沿 x 轴传播时, 不出现频移.

引力波场产生的频移有其特征, 即频移起伏. 对于可能存在的引力波源, 这一效应的量级估计为

$$\left(\frac{\Delta\nu}{\nu}\right)_{GV} \sim 10^{-17}, \tag{1.9.6}$$

比 Mössbauer 效应测量的量级还要小. 因此, 许多人对于如何借助于特殊的实验装置来增加频移起伏 (1.9.6) 感兴趣. 用迈克耳孙实验可以获得较大的 l 值. 无需使光源和观察者相距很远, 只要使光线多次通过回路以后再发生干涉. 以特殊方式选择位相关系、频率和干涉仪两臂的长度, 可以获得频移的共振累积.

在一般情况下, 引力波场中的上述实验所显示的频移, 可能是红移也可能是紫移, 这取决于干涉仪中光线回路的绕行方向和两臂相对于引力波传播方向的取向.

平面引力波场中频移有一个有趣的特点. 假设有一弱引力波沿 $x^1 = z$ 方向传播, 地面上的观察者位于坐标原点, 而作为反射体的宇宙装置静止于坐标为

$$x = \frac{1}{2}\Delta x^0 \sin\theta\cos\varphi,$$
$$y = \frac{1}{2}\Delta x^0 \sin\theta\sin\varphi,$$
$$z = \frac{1}{2}\Delta x^0 \cos\theta \tag{1.9.7}$$

的点. 式中 Δx^0 是信号往和返的传播时间. 此时可以求得相应的频移.

效应 8

$$\left(\frac{\Delta\nu}{\nu}\right)_{GV} = \cos 2\varphi\left\{h_{22}(x^0 - \Delta x^0)\frac{1+\cos\theta}{2} - h_{22}\left[x^0 - \frac{\Delta x^0}{2}(1+\cos\theta)\right]\cos\theta - h_{22}(x^0)\frac{1-\cos\theta}{2}\right\}. \tag{1.9.8}$$

此式表明, 当引力辐射为一个短脉冲 $p_{22} \sim \delta(x^0 - z)$ 时, 观察者将收到三个脉冲信号, 它们的振幅各不相同, 对 θ 角和传播时间 Δx^0 的依赖关系也各不相同. 所以, 引力辐射的每一个波将产生三个被接收到的波. 这是引力波场独具的特点. 这一效应与钟的速率、等离子体的振动以及源和反射体的无规则运动都无关. 因此, 可将这一效应用于引力波的检测. 人们甚至认为, 使用空间站, 用氢激光钟作为频率标准 (在大于 10 秒的期间内稳定性 $\sim 10^{-15}$), 可以把引力波记录下来.

1.10　关于地球引力场中的频移效应

由于测量太阳和恒星光谱线移动的精度不够高, 自然要寻求另外的方法来测量. 利用 Mössbauer 效应的测量就是一个成功的例子, 能够在 (m/r) 值不太大的情况下测量地球引力场中的频移. 此外, 早在成功地发射人造空间装置之前, 人们就讨论了利用人造地球卫星验证广义相对论预言的问题. 由于长时间的测量要受到卫星轨道参量的影响, 所以比较好的方案是采用短时间测量 ($\leqslant$ 30s), 用特殊方法实现频移的同时累积. 可以将卫星和地球上观察者接收的信号与某一另外的辐射相混合, 这后一辐射的频率为原来信号的两倍. 这样, 地球上观察者接收到的由卫星一次反射的信号便有两倍的频移. 经过多次反射, 把效应累积起来. 这一方案对于显示效应 $2 \sim 6$ 都很有效. 另外还有一些不同的方案. 例如用人造卫星显示在近地点和远地点, 黑夜和白天等情况下频移的差异. 这些设想虽然在 20 世纪 60 年代初就讨论过, 但实际上是在高稳定性 (目前已达 $10^{-15} \sim 10^{-14}$) 的振荡器出现之后才实现的. 1976 年, 人们用氢激光钟验证效应 (1.4.2) 精度达到 10^{-5}.

用上述方案进行的测量, 其精度已经足以显示地球引力场中的频移效应. 于是人们开始用飞机来验证广义相对论的预言. 1977 年, 人们从飞机上用激光和地球上的标准钟联系, 飞机飞行 15 小时. 测得由地球引力势的差异造成的频移是 53H, 而狭义相对论效应是 5H. 测量精度为 1.005 ± 0.016.

频移效应来自广义相对论中本征时和坐标时的区别. 这一效应不仅和物体运动有关, 而且直接依赖于引力源参量. 自然, 观察到的效应应该是引力源的各个参量的总贡献. 原则上, 源的各参量 (如质量和电荷) 之间数量关系是任意的, 所以在总的频移效应中, 各参量的贡献之间的数量关系也是任意的. Einstein 引力场方程右端的能量 - 动量张量或其分量中, 不同的部分对频移的贡献可能不同. 原则上可以根据它们贡献的程度将一些参量与另一些参量区分开. 在这种情况下, 每个参量的贡献都具有独立的意义.

我们看到, 研究频移效应的引力实验已进入了相当活跃的阶段. 人们采用了地球上的新方法, 新的引力体, 人造地球卫星, 飞机等等. 至今, 已经以足够高的精度验证了广义相对论对频移效应 [主要效应 (1.4.2)] 的预言. 虽然频移效应和整个引力场方程无关, 但正如上面指出的, 它和场方程的右边部分有关, 应该进一步验证那些由场源的其他参量 (能量 - 动量张量的其他部分) 引起的频移, 用这些实验来检验场方程右边部分的正确性, 即检验广义相对论关于场源概念的正确性.

第 2 章　引力场中物体的轨道效应

本章前三节分别研究试验粒子的短程线运动, 试验粒子的非短程线运动和重质量物体的运动方程. 从第四节开始研究各有关的引力效应.

2.1　试验粒子的短程线运动

首先, 我们局限于准圆锥曲线类型的轨道运动, 短程线方程的第一次积分给出恒定能量 ε 和恒定面积速度 h, 第二次积分给出轨道方程. 假设在球坐标系中, 试验粒子在平面 $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ 内运动, 轨道可写成圆锥曲线的形式

$$
\begin{aligned}
&u \equiv \frac{1}{r} = \frac{1}{p}(1 + e\cos\psi), \\
&\psi \equiv \varphi + \alpha(\varphi) \equiv \varphi + \Delta\varphi.
\end{aligned} \tag{2.1.1}
$$

式中 p 和 e 分别为焦点 (焦线) 参量和离心率, ψ 是真实的反常角位移, 其中包括 (与牛顿理论比较) 附加的角位移 $\alpha(\varphi)$(附加反常). 当 $e < 1$ 时, $\alpha(\varphi)$ 就是近日点的附加反常角位移, 用来描述“近日点的移动”效应. 在圆运动的情况下, 虽然周期的概念退化了, 但更一般的概念“附加反常”仍然有效:

$$
\lim_{e \to 0} \alpha \neq 0.
$$

下面我们从短程线方程出发进行积分. 短程线方程即

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left(g_{\sigma\mu}\frac{\mathrm{d}x^\sigma}{\mathrm{d}\lambda}\right) &= \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\lambda\sigma}}{\partial x^\mu}\frac{\mathrm{d}x^\lambda}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^\sigma}{\mathrm{d}\lambda}, \\
g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\lambda} &= 1.
\end{aligned} \tag{2.1.2}
$$

在球坐标系 $(x^0, r, \theta, \varphi)$ 中, 对于稳定的轴对称场, $g_{\lambda\sigma}$ 不含 x^0 和 φ, (0, 3) 分量分别为

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}(g_{3\sigma}\dot{x}^\sigma) = 0, \\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}(g_{0\sigma}\dot{x}^\sigma) = 0.
\end{aligned}
$$

积分得

$$
(g_{0\sigma}\dot{x}^\sigma) = -\varepsilon, \quad (g_{3\sigma}\dot{x}^\sigma) = h. \tag{2.1.3}
$$

式中 ε 和 h 为积分常数. 将此式代入 $g_{\mu\nu}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu}=1$, 得到轨道的微分方程

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2=F(u). \tag{2.1.4}$$

式中 $F(u)$ 是 $u\equiv r^{-1}$ 的多项式. 可以用不同方法获得方程 (2.1.4) 的形如 (2.1.1) 的解.

将 (2.1.1) 代入 (2.1.4), 可以化为形式

$$\frac{e^2}{p^2}\sin\psi^2\left(\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2=A(\varepsilon,h,p,e)+B(\varepsilon,h,p,e)\cdot\frac{e}{p}\cos\psi + C(\varepsilon,h,p,e)\frac{e^2}{p^2}\sin^2\psi. \tag{2.1.5}$$

比较等式两端各项"系数", 可将此方程分解为两个代数方程和一个一阶微分方程:

$$A(\varepsilon,h,p,e)=0,$$

$$B(\varepsilon,h,p,e)=0, \tag{2.1.6}$$

$$\psi'^2=C(\varepsilon,h,p,e), \tag{2.1.7}$$

或由 (2.1.1) 有

$$\alpha'^2+2\alpha'-C(\varepsilon,h,p,e)+1=0, \tag{2.1.7a}$$

式中 $\alpha'\equiv\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\varphi}$. 由此得到周期附加反常的表达式

$$\frac{\Delta\alpha}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2x}C^{-1/2}\mathrm{d}\psi-1,\quad \int\mathrm{d}\alpha=-\Delta\alpha. \tag{2.1.8}$$

代数方程 (2.1.6) 确定了 (p,e) 和 (ε,h) 以及场源参量之间的联系, 上面的方程组是很有用的, 将 $g_{\mu\nu}$ 的具体形式代入以后, 便可获得具体的表达式. 它们也可以用于圆轨道的情况. 即使 $e=0$ 时由 (2.1.4) 求不出附加反常, 仍可以借助于 (2.1.6)~(2.1.8) 求出来, 因为 $\lim\limits_{e\to 0}\left(\dfrac{\Delta\alpha}{2\pi}\right)\neq 0$.

2.2 试验粒子的非短程线运动

1. 无自旋试验粒子的情况

运动方程和短程线方程的偏离可能由不同的原因引起: 非引力的作用 (如机械力和电磁力等)、"试验参量" 的作用、多体问题中的引力相互作用等.

假设有一质量系统, 我们可以把系统的作用量写为

$$I=-\int\mathrm{d}s+I_e, \tag{2.2.1}$$

式中 I_e 是作用量中的非引力部分. 与虚功原理的处理类似, 我们令

$$\delta I_e = -\int F_\mu \delta x^\mu \mathrm{d}s,$$

此式表明 F_μ 是四维力. 对 (2.2.1) 变分且令 $\delta I = 0$, 与导出短程线方程的过程相似, 得到

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^\mu}{\mathrm{d}s^2} + \Gamma^\mu_{\sigma\lambda}\frac{\mathrm{d}x^\sigma}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^\lambda}{\mathrm{d}s} = F^\mu. \tag{2.2.2}$$

此式也可借助于四维速度 $v^\mu = \dfrac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s}$ 表示为

$$\frac{\delta}{\delta s}\left(\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s}\right) = \frac{\delta v^\mu}{\delta s} = F^\mu, \tag{2.2.3}$$

式中 s 取为沿时迹的仿射参量, 当然也可取为 τ.

考虑引力场中两个邻近的下落粒子, 分别沿轨道 $x^\mu(\tau)$ 和 $x^\mu(\tau)+\delta x^\mu(\tau)$ 运动, 运动方程分别为

$$\frac{\mathrm{d}2x^\mu}{\mathrm{d}\tau^2} + \Gamma^\mu_{\sigma\lambda}(x)\frac{\mathrm{d}x^\sigma}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\lambda}{\mathrm{d}\tau} = F^\mu(x),$$

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2}(x^\mu + \delta x^\mu) + \Gamma^\mu_{\sigma\lambda}(x+\delta x) \times \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(x^\sigma + \delta x^\sigma)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(x^\lambda + \delta x^\lambda)\\ =\ &\Gamma^\mu(x+\delta x),\end{aligned}$$

式中 F^μ 为场源的引力场之外的力. 将二式相减, 保留 δx^μ 的一次项, 得到

$$\frac{\mathrm{d}^2\delta x^\mu}{\mathrm{d}\tau^2} + \frac{\partial \Gamma^\mu_{\sigma\lambda}}{\partial x^p}\delta x^p \frac{\mathrm{d}x^\sigma}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\lambda}{\mathrm{d}\tau} + 2\Gamma^\mu_{\sigma\lambda}\frac{\mathrm{d}x^\sigma}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}\delta x^\lambda}{\mathrm{d}\tau} = \delta x^\sigma \frac{\partial F^\mu}{\partial x^\sigma},$$

或者写成

$$\frac{\mathrm{d}^2\eta^\mu}{\mathrm{d}\tau^2} + 2\Gamma^\mu_{\sigma\lambda}u^\sigma\frac{\mathrm{d}\eta^\lambda}{\mathrm{d}\tau} + \partial_\rho\Gamma^\mu_{\sigma\lambda}u^\sigma u^\lambda\eta^\rho = \eta^\sigma\partial_\sigma F^\mu, \tag{2.2.4}$$

式中 $\eta^\mu \equiv \delta x^\mu$ 是偏离矢量.

当 $F^\mu = 0$ 时, 方程 (2.2.4) 仍然偏离短程线方程. 虽然一个自由下落粒子在与该粒子固连的参考系看来是静止的, 但是一对邻近的自由下落粒子会有相对运动, 和它们一起下落的观察者看来则显示出引力场的存在. 这并不违背等效原理, 因为当两个粒子之间的距离远小于场的特征尺度时, 偏离方程与短程线方程的差别可忽略不计.

2. 试验自旋的情况

由协变守恒定律

$$\mathscr{T}^{\mu\nu}_{;\nu} = 0 \tag{2.2.5}$$

出发, 可以导出试验自旋的运动方程. 式中 $\mathscr{T}^{\mu\nu}$ 是能量–动量张量密度. 自旋张量定义为

$$S^{\mu\nu} = \int (x^u - X^\mu)\mathscr{T}^{\nu o}\mathrm{d}^3x - \int (x^\nu - X^\nu)\mathscr{T}^{\nu o}\mathrm{d}^3x, \tag{2.2.6}$$

式中 X^μ 是四维空–时中沿粒子轨迹 L 的坐标. L 的方程为

$$X^\mu = X^\mu(s),$$

s 是沿 L 的固有时, $\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}X^\mu\mathrm{d}X^\nu$; 积分沿 $x^0 = X^0 = \mathrm{const}$ 的三维体积进行. 引进量

$$M^{\lambda\mu\nu} \equiv -u^0 \int (x^\lambda - X^\lambda)\mathscr{T}^{\mu\nu}\mathrm{d}^3x, \tag{2.2.7}$$

$$M^{\alpha\beta} \equiv u^0 \int \mathscr{T}^{\alpha\beta}\mathrm{d}^3x, \tag{2.2.8}$$

$$u^\alpha \equiv \frac{\mathrm{d}X^\alpha}{\mathrm{d}s}. \tag{2.2.9}$$

由 $x^0 = X^0$, 故 $M^{0\mu\nu} = 0$. 利用式 (2.2.5), Papapetrou 导出了下面的运动方程:

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}S^{\alpha\beta}}{\mathrm{d}s} + \frac{u^\alpha}{u^0}\frac{\mathrm{d}S^{\beta 0}}{\mathrm{d}s} - \frac{u^\beta}{u^0}\frac{\mathrm{d}S^{\alpha 0}}{\mathrm{d}s} + \left(\varGamma^\alpha_{\mu\nu} - \frac{u^\alpha}{u^0}\varGamma^0_{\mu\nu}\right)M^{\beta\mu\nu}\\ &- \left(\varGamma^\beta_{\mu\nu} - \frac{u^\beta}{u^0}\right)M^{\alpha\mu\nu} = 0,\end{aligned} \tag{2.2.10}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{M^{\alpha 0}}{u^0}\right) + \varGamma^\alpha_{\mu\nu}M^{\mu\nu} - \varGamma^\alpha_{\mu\nu,\sigma}M^{\sigma\mu\nu} = 0, \tag{2.2.11}$$

其中满足关系式

$$2M^{\alpha\beta r} = -(S^{\alpha\beta}u^r + S^{\alpha r}u^\beta) + \frac{u^\alpha}{u^0}(S^{0\beta}u^r + S^{0r}u^\beta), \tag{2.2.12}$$

$$M^{\alpha\beta} = u^\alpha\frac{M^{\beta 0}}{u^0} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{M^{\alpha\beta 0}}{u^0}\right) - \varGamma^\beta_{\mu\nu}M^{\alpha\mu\nu}. \tag{2.2.13}$$

对于 $\beta = 0$, 由 (2.2.12) 得到

$$M^{\alpha 0} = \frac{u^\alpha}{u^0}M^{00} + \frac{\mathrm{d}S^{\alpha 0}}{\mathrm{d}s} - \varGamma^0_{\mu\nu}M^{\alpha\mu\nu}. \tag{2.2.14}$$

这些方程中的未知函数共有 10 个: M^{00}, u^α 的三个独立分量 (因为 $u_\alpha u^\alpha = 1$), 反对称张量 $S^{\mu\nu}$ 的六个分量. 运动方程 (2.2.10)~(2.2.11) 有七个是独立的. 这是因为当 $\alpha = 1,2,3$, 和 $\beta = 0$ 时, 对应的方程 (2.2.10) 成为恒等式, 所以 (2.2.10) 只有三个关于 $S^{\mu\nu}$ 的独立方程. 下面改写这七个独立的方程. 引入标量

$$\mu \equiv \frac{1}{(u^0)^2}(M^{00} + \varGamma^0_{\mu\nu}S^{\mu 0}u^\nu) + \frac{u_\alpha}{u_0}\frac{\mathrm{D}S^{\alpha 0}}{\mathrm{D}s}. \tag{2.2.15}$$

式中按通常的定义有

$$\frac{\mathrm{D}f}{\mathrm{D}s}=u^{\nu}f_{;\nu},\tag{2.2.16}$$

将方程 (2.2.10)~(2.2.11) 化为协变形式

$$\frac{\mathrm{D}S^{\alpha\beta}}{\mathrm{D}s}+u^{\alpha}u^{\rho}\frac{\mathrm{D}S^{\beta\rho}}{\mathrm{D}s}-u^{\beta}u_{\rho}\frac{\mathrm{D}S^{\alpha\rho}}{\mathrm{D}s}=0,\tag{2.2.17}$$

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}s}\left(\mu u^{\alpha}+u_{\beta}\frac{\mathrm{D}S^{\alpha\beta}}{\mathrm{D}s}\right)+S^{\mu\nu}u^{\sigma}(\Gamma^{\alpha}_{\nu\sigma,\mu}+(\Gamma^{\alpha}_{\mu\rho}\Gamma^{\rho}_{\nu\sigma})=0.\tag{2.2.18}$$

令

$$P^{\alpha}\equiv\mu u^{\alpha}+u_{\beta}\frac{\mathrm{D}S^{\alpha\beta}}{\mathrm{D}s},\tag{2.2.19}$$

方程 (2.2.17)~(2.2.18) 可写为

$$\frac{\mathrm{D}S^{\mu\nu}}{\mathrm{D}s}=P^{\mu}u^{\nu}-P^{\nu}u^{\mu},\tag{2.2.20}$$

$$\frac{\mathrm{D}P^{\mu}}{\mathrm{D}s}=\frac{1}{2}R^{\mu}_{\nu\rho\sigma}u^{\rho}S^{\nu\sigma}.\tag{2.2.21}$$

如果有外电磁场 $F^{\mu\nu}$ 存在, 且试验粒子带有电荷 q, 则方程 (2.2.18) 和 (2.2.21) 应改写为

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}s}\left(\mu u^{\lambda}+u_{\sigma}\frac{\mathrm{D}S^{\sigma\lambda}}{\mathrm{D}s}\right)=-\frac{q}{c^2}F^{\lambda}_{\sigma}u^{\sigma}+\frac{1}{2}R^{\lambda}_{\nu\sigma\rho}u^{\sigma}s^{\nu\rho}.\tag{2.2.22}$$

2.3　重质量物体的运动

假设一系统由多个物体组成, 每个物体的质量对引力场的影响都不能忽略 (此时它的体积通常也不能忽略), 这时物体的运动要复杂得多. 这类物体称为“重质量物体”, 以与试验粒子相区别.

获得这类物体运动方程的一个方法是, 假设每个物体沿空–时中的短程线运动, 但空–时度规由系统中其他物体和该物体本身共同产生. 因此, 必须把每个物体作为有质量中心的, 具有有限自引力的物质块, 解方程 $T^{\mu\nu}_{;\nu}=0$. 对于太阳系, 可以认为每个天体都由理想流体构成 (Will,1981).

我们先回忆一下牛顿引力理论中的类似处理, 然后将其推至后牛顿极限情况.

在牛顿理论中, 对于系统中的第 a 个物体定义惯性质量和引力中心:

$$m_a=\int_a\rho\mathrm{d}^3x,\quad X_a=\frac{1}{m_a}\int_a\rho X\mathrm{d}^3x.\tag{2.3.1}$$

由连续性方程容易证明

$$\frac{\mathrm{d}m_a}{\mathrm{d}t}=0,$$

$$\boldsymbol{V}_a \equiv \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}_a}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{m_a}\int_a \rho \boldsymbol{V} \mathrm{d}^3x,$$

$$\boldsymbol{a}_a \equiv \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}_a}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{m_a}\int_a \rho \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}^3x. \tag{2.3.2}$$

由理想流体运动方程 [第三篇 (5.1.5)], 可得

$$\boldsymbol{a}_a = \nabla\chi,$$

$$\chi = \sum_{b\neq a}\left[\frac{m_b}{r_{ab}} + \frac{1}{2}Q_b^{ij}\frac{x_{ab}^i x_{ab}^j}{r_{ab}^5} + O(r_{ab}^{-5})\right], \tag{2.3.3}$$

Q_b^{ij} 是第 b 个物体的四极矩, 定义为

$$Q_b^{ij} \equiv \int_b \rho[3(x^i - x_b^i)(x^i - x_b^i) - |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_b|^2\delta^{ij}]\mathrm{d}^3x.$$

在后牛顿极限中, 定义第 a 个物体的惯性质量为

$$m_a \equiv \int_b \tilde{\rho}\left(1 + \frac{1}{2}\bar{v}^2 - \frac{1}{2}\bar{U} + \mathit{\Pi}\right)\mathrm{d}^3x, \tag{2.3.4}$$

式中 $\tilde{\rho}$ 为守恒密度 [见第一篇 (5.3.16)], $\bar{\boldsymbol{v}} \equiv \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_{a(0)}$, 而 $\boldsymbol{v}_{a(0)}$ 为

$$\boldsymbol{v}_{a(0)} \equiv \int_a \bar{\rho}\boldsymbol{v}\mathrm{d}^3x, \tag{2.3.5}$$

(2.3.4) 中的 $\bar{U}$ 为

$$\bar{U} \equiv \int_a \rho(\boldsymbol{r}', t)|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^{-1}\mathrm{d}^3x'. \tag{2.3.6}$$

可以认为 m_a 是在随动的局部静止惯性中测得的总能量 (包括粒子的静止质量、动能、引力能和内能). 根据 PPN 形式守恒定律的讨论, 由 (2.3.4)~(2.3.6) 可严格证明

$$\frac{\mathrm{d}m_a}{\mathrm{d}t} = 0, \tag{2.3.7}$$

即在后牛顿精度下 m_a 是守恒量.

定义惯性质量中心为

$$\boldsymbol{r}_a \equiv \frac{1}{m_a}\int_a \tilde{\rho}\left(1 + \frac{1}{2}\bar{v}^2 - \frac{1}{2}\bar{U} + \mathit{\Pi}\right)\boldsymbol{r}\mathrm{d}^3x \tag{2.3.8}$$

利用连续性方程和相应的后牛顿表示式, 我们得到

$$\boldsymbol{v}_a \equiv \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_a}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{m_a}\int_a \left[\tilde{\rho}\left(1 + \frac{1}{2}\bar{v}^2 - \frac{1}{2}\bar{U} + \mathit{\Pi}\right)\boldsymbol{v} + p\boldsymbol{v} - \frac{1}{2}\tilde{\rho}\bar{\boldsymbol{W}}\right]\mathrm{d}^3x. \tag{2.3.9}$$

式中

$$\bar{\boldsymbol{W}} = \int_a \tilde{\rho}' \frac{[\boldsymbol{v}' \cdot (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')](\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3} \mathrm{d}^3 x. \tag{2.3.10}$$

从而得到加速度

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_a \equiv \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_a}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{m_a} \Bigg\{ & \int_a \tilde{\rho} \left(1 + \frac{1}{2}\bar{v}^2 - \frac{1}{2}\bar{U} + \Pi\right) \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}^3 x \\
& + v_\alpha^i \int_a p_{,i} \bar{\boldsymbol{v}} \mathrm{d}^3 x + \int_a \left[p_{,0}\bar{v} - \frac{p}{\tilde{\rho}} \nabla p\right] \mathrm{d}^3 x \\
& - \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_a \tilde{\rho} \bar{\boldsymbol{W}} \mathrm{d}^3 x + \frac{1}{2}\mathscr{T}_a - \frac{1}{2}\mathscr{T}_a + \mathscr{T}_a \Bigg\},
\end{aligned} \tag{2.3.11}$$

式中

$$\begin{aligned}
\mathscr{T}_a &\equiv \int_a \frac{\tilde{\rho}\tilde{\rho}'\bar{\boldsymbol{v}}'[\bar{\boldsymbol{v}}' \cdot (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')]}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3} \mathrm{d}^3 x \mathrm{d}^3 x', \\
\mathscr{T}_a &\equiv \int_a \frac{\tilde{\rho}\tilde{\rho}'[\bar{\boldsymbol{v}}' \cdot (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')]\bar{\boldsymbol{v}}}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3} \mathrm{d}^3 x \mathrm{d}^3 x', \\
\mathscr{T}_a &\equiv \int_a \frac{\tilde{\rho}\tilde{\rho}'(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3} \mathrm{d}^3 x \mathrm{d}^3 x'.
\end{aligned} \tag{2.3.12}$$

现在利用 PPN 理想流体运动方程, 计算 (2.3.11) 右端括号中的第一项积分. 把 $T^{\mu\nu}$ 的后牛顿表达式和 $\Gamma^{\mu}_{\nu\tau}$ 的后牛顿表达式代入运动方程 $T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$, 并重新用守恒密度 $\tilde{\rho}$ 写出, 结果是

$$\begin{aligned}
\tilde{\rho}\frac{\mathrm{d}v^i}{\mathrm{d}t} = & \tilde{\rho}U_{,i} - [p(1 + 3\gamma U)]_{,i} + p_{,i}\left(\frac{1}{2}v^2 + \Pi + \frac{p}{\tilde{\rho}}\right) \\
& - \tilde{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg[(2\gamma + 2)Uv^i - \frac{1}{2}(4\gamma + 4 + \alpha_1)V^i \\
& - \frac{1}{2}\alpha_1 U w^i\bigg] + v^i(\tilde{\rho}U_{,0} - p_{,0}) \\
& - \frac{1}{2}(1 + \alpha_2 - \zeta_1 + 2\zeta_w)\tilde{\rho}(V^i - W^i)_{,0} \\
& - \frac{1}{2}\tilde{\rho}[(4\gamma + 4 + \alpha_1)v^k + (a_1 - 2\alpha_3)w^k]V_{k,i} \\
& + \tilde{\rho}\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg[\Phi - \zeta_w\Phi_w - \frac{1}{2}(\zeta_1 - 2\zeta_w)\mathscr{A} \\
& - \frac{1}{2}\alpha_2 w^i w^k U_{ik} + \alpha_2 w^k(V_k - W_k)\bigg]
\end{aligned}$$

$$+\tilde{\rho}U_{,i}\left[\gamma v^2-\frac{1}{2}\alpha_1\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{v}+\frac{1}{2}(\alpha_2+\alpha_3-\alpha_1)w^2\right.$$
$$\left.-(2\beta-2)U+3\gamma p/\tilde{\rho}\right]. \tag{2.3.13}$$

将 (2.3.13) 代入 (2.3.11) 求积分. 为了简化, 我们对每个物体的几个固有时间取平均. 这样, 所有固有量的时间导数都可取为零. 对于太阳系, 这一近似是合理的, 因为太阳和行星结构的变化是相当缓慢的. 这样, 可以用一些牛顿关系式来简化后牛顿表达式. 对于每个物体应用下面形式的牛顿运动方程:

$$\begin{aligned}
&2\mathscr{T}^{ij}+\Omega^{ij}+\delta^{ij}P=\langle\ddot{I}^{ij}\rangle=0,\\
&2\mathscr{T}+\Omega+3P=\langle\ddot{I}\rangle=0,\\
&H^{(ij)}-\int\bar{v}(_iP_{,j})\mathrm{d}^3x=\langle\dot{\mathscr{T}}^{ij}\rangle=0,\\
&H^{(ij)}-3K^{ij}=\langle\dot{\Omega}^{ij}\rangle=0,\\
&H^{(ij)}=-\langle\dot{\Omega}\rangle=0,\\
&\int P_{,0}\mathrm{d}^3x=\langle\dot{P}\rangle=0,\\
&-t^i-\mathscr{T}^i+\mathscr{T}^i+3\mathscr{T}^{*i}-\tilde{\Omega}^i-\mathscr{T}^i=\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\tilde{\rho}\bar{W}^i\mathrm{d}^3x\right]=0,\\
&\mathscr{T}^i+\mathscr{T}^i+\Omega^i+\mathscr{T}^i=\langle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\tilde{\rho}\bar{V}^i\mathrm{d}^3x\rangle=0.
\end{aligned} \tag{2.3.14}$$

式中各积分表示如下:

$$\Omega^i_\alpha=\int_\alpha\frac{\tilde{\rho}\tilde{\rho}'\rho''(x-x')^i}{|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}''||\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\mathrm{d}^3x\mathrm{d}^3x'\mathrm{d}x'',$$

$$\tilde{\Omega}^i=\int_a\frac{\tilde{\rho}\tilde{\rho}'\tilde{\rho}''(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}'')\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')(x-x')^i}{|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}''|^3|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\times\mathrm{d}^3x\mathrm{d}^3x'\mathrm{d}^3x'',$$

$$t^i_\alpha=\int_a\frac{\tilde{\rho}\tilde{\rho}'\bar{v}^i\bar{\boldsymbol{v}}'\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\mathrm{d}^3x\mathrm{d}^3x',$$

$$\mathscr{T}^{*i}=\int_a\frac{\tilde{\rho}\tilde{\rho}'[\bar{\boldsymbol{v}}'\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')]^2(x-x')^i}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^5}\mathrm{d}^3x\mathrm{d}^3x';$$

$$\mathscr{T}^{ij}_a=\frac{1}{2}\int\tilde{\rho}\bar{v}'^i\bar{v}^j\mathrm{d}^3x,\quad\mathscr{T}_a=\frac{1}{2}\int_\alpha\tilde{\rho}\bar{v}^2\mathrm{d}^3x,$$

$$\Omega^{ij}_a=-\frac{1}{2}\int_a\frac{\tilde{\rho}\tilde{\rho}'(x-x')^i(x-x')^j}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\mathrm{d}^3x\mathrm{d}^3x',$$

$$
\begin{aligned}
\varOmega_a &= -\frac{1}{2}\int_\alpha \frac{\tilde{\rho}\tilde{\rho}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}^3x\mathrm{d}^3x',\\
I_a^{ij} &= \int_a \tilde{\rho}(x-x_a)^i(x-x_a)^j\mathrm{d}^3x,\\
I_a &= \int_a \tilde{\rho}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_a|^2\mathrm{d}^3x,\quad P_a = \int_\alpha p\mathrm{d}^3x,\\
H_a^{ij} &= \int_a \frac{\tilde{\rho}\tilde{\rho}'\bar{v}^i(x-x')^j}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\mathrm{d}^3x\mathrm{d}^3x',\quad E_a = \int_\alpha \tilde{\rho}\varPi\mathrm{d}^3x,\\
K^{ij} &= \int_a \frac{\tilde{\rho}\tilde{\rho}'\bar{\boldsymbol{v}}'\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')(x-x')^i(x-x')^j}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^5}\mathrm{d}^3x\mathrm{d}^3x'.
\end{aligned}
$$

由 (2.3.14) 得到 PPN 运动方程的最后形式为

$$
\boldsymbol{a}_a = (\boldsymbol{a}_a)_1 + (\boldsymbol{a}_a)_2 + (\boldsymbol{a}_a)_3. \tag{2.3.15}
$$

式中 $(\boldsymbol{a}_a)_1$ 为“自加速度”, $(\boldsymbol{a}_a)_2$ 为准牛顿加速度, $(\boldsymbol{a}_a)_3$ 为 n 体项, 表达式如下:

$$
\begin{aligned}
(a_a^i)_1 =& -\frac{1}{m_a}\left[\frac{1}{2}(a_3+\zeta_1)t_a^i + \zeta_1\left(\mathscr{T}_a^i - \frac{3}{2}\mathscr{T}_a^{*i}\right)\right.\\
&\left. + \zeta_2\varOmega_a^i + \zeta_3\mathscr{E}_a^i + 3\zeta_4\mathscr{T}_a^i\right] - \frac{1}{m_a}\alpha_3(w+v_a)^k H^{ki},
\end{aligned} \tag{2.3.16}
$$

其中

$$
\mathscr{E}_a = \int_a \frac{\widetilde{\rho}\widetilde{\rho}'\varPi'(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\mathrm{d}^3x\mathrm{d}^3x',
$$

$$
(a_a^i)_2 = \frac{1}{m_a}(m_p)_a^{ik}\chi_{,k}; \tag{2.3.17}
$$

$$
\begin{aligned}
(a_a^i)_3 =& \sum_{b\neq a}\frac{m_b x_{ab}^i}{r_{ab}^3}\left\{(2\gamma+2\beta)\frac{m_b}{r_{ab}} + \left(2\gamma+2\beta+1+\frac{1}{2}\alpha_1-\zeta_2\right)\frac{m_a}{r_{ab}}\right.\\
& + (2\beta-1-2\zeta_w-\zeta_2)\sum_{c\neq ab}\frac{m_a}{r_{bc}} + (2\gamma+2\beta-2\zeta_w)\sum_{c\neq ab}\frac{m_c}{r_{bc}}\\
& - \frac{1}{2}(1+2\zeta_w+\alpha_2-\zeta_1)\sum_{c\neq ab}m_c\frac{\boldsymbol{r}_{ab}\cdot\boldsymbol{r}_{bc}}{r_{bc}^3} - \zeta_w\sum_{c\neq ab}m_c\frac{\boldsymbol{r}_{bc}\cdot\boldsymbol{r}_{ac}}{r_{ac}^3} - \gamma v_a^2\\
& + \frac{1}{2}(4\gamma+4+\alpha_1)\boldsymbol{v}_a\cdot\boldsymbol{v}_b - \frac{1}{2}(2\gamma+2+\alpha_2+\alpha_3)v_b^2\\
& + \frac{1}{2}(\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3)w^2 + \frac{1}{2}\alpha_1\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{v}_a\\
& + \frac{1}{2}(\alpha_1-2\alpha_2-2\alpha_3)\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{v}_b + \frac{3}{2}(1+\alpha_2)(\boldsymbol{v}_b\cdot\hat{\boldsymbol{n}}_{ab})^2\\
& \left. + \frac{3}{2}\alpha_2(\boldsymbol{w}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}_{ab})^2 + 3\alpha_2(\boldsymbol{w}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}_{ab})(\boldsymbol{v}_b\hat{\boldsymbol{n}}_{ab})\right\}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}(4\gamma+3-2\zeta_w+\alpha_1-\alpha_2+\zeta_1)\sum_{b\neq a}\frac{m_b}{r_{ab}}\\
&\times\sum_{c\neq ab}\frac{m_c x^i_{bc}}{r^3_{bc}}-\zeta_w\sum_{b\neq a}\frac{m_b}{r^3_{ab}}(\delta_{ik}-3\hat{n}^i_{ab}\hat{n}^k_{ab})\\
&\times\sum_{c\neq ab}m_c\left(\frac{x^k_{ac}}{r_{ac}}-\frac{x^k_{bc}}{r_{bc}}\right)+\sum_{b\neq a}\frac{m_b}{r^3_{ab}}\boldsymbol{r}_{ab}\cdot[(2\gamma+2)\boldsymbol{v}_a\\
&-(2\gamma+1)\boldsymbol{v}_b]v^i_a-\frac{1}{2}\sum_{b\neq a}\frac{m_b}{r^3_{ab}}\boldsymbol{r}_{ab}\\
&\times[(4\gamma+4+\alpha_1)\boldsymbol{v}_a-(4\gamma+2+\alpha_1-2\alpha_2)\boldsymbol{v}_b\\
&+2\alpha_2\boldsymbol{w}]v^i_b-\frac{1}{2}\sum_{b\neq a}\frac{m_b}{\boldsymbol{r}^3_{ab}}\boldsymbol{r}_{ab}\\
&\times[\alpha_1\boldsymbol{v}_a-(\alpha_1-2\alpha_2)\boldsymbol{v}_b+2\alpha_2\boldsymbol{w}]w^i.
\end{aligned}\tag{2.3.18}$$

式 (2.3.16) 中的前六项表示质量中心的“自加速度”, 因为 t^i_a, $\mathscr{T}^i_a$ 等项取决于第 a 个物体的内部结构. 自加速度的存在与总动量不守恒相联系, 它们决定于 PPN 守恒参量 α_3, ζ_1, ζ_2, ζ_3 和 ζ_4. 在半守恒引力理论中, 由于

$$\alpha_3\equiv\zeta_1\equiv\zeta_2\equiv\zeta_3\equiv\zeta_4\equiv 0,\tag{2.3.19}$$

所以自加速度等于零, 另外, 球对称物质的项

$$t^i_a=\mathscr{T}^i_a=\tilde{\mathscr{T}}^{*i}_a=\varOmega^i_a=\mathscr{E}^i_a=\mathscr{T}^i_a=0,\tag{2.3.20}$$

所以自加速度也为零. 如果两个物体沿近似圆轨道运动, 作为这两个物体构成的系统取轨道周期平均值时, 自加速度也等于零. 正因为这个原因, 在太阳系中无法检验这个效应的存在. 但是对于脉冲双星系统, 当轨道离心率很大时, 是可以验证这一效应的.

式 (2.3.16) 中的最后一项 $-\dfrac{1}{m_a}\alpha_3(w+v_a)^k H^{ki}$ 也是自加速度, 其中含有物体相对于宇宙静止标架的运动. 这一效应取决于 PPN 参量 α_3. 在任意半守恒引力理论中 $\alpha_3=0$, 所以无此效应. 静止的物体 $\bar{\boldsymbol{v}}=0$, 所以 $H^{ki}_a=0$, 此效应也不存在. 但对于匀角速转动的物体 $H^{ki}_a\neq 0$. 设角速度为 $\boldsymbol{\omega}$, 则有

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_a),$$

$$\begin{aligned}
H^{ki}_a&=\epsilon^{klm}\boldsymbol{\omega}^l\int_a\frac{\tilde{\rho}\tilde{\rho}'(x'-x_a)^m(x-x')^i}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\mathrm{d}^3x\mathrm{d}^3x'\\
&=\epsilon^{klm}\boldsymbol{\omega}^l(\varOmega_a)^{im}.
\end{aligned}\tag{2.3.21}$$

对于接近球形物体, $\varOmega^{im}$ 的各向同性部分是对式 (2.3.21) 的主要贡献, 即

$$(\Omega_a)^{im} \approx \frac{1}{3}\delta^{im}\Omega_a, \quad H_a^{ki} \approx \frac{1}{3}\varepsilon^{ikl}\omega^l\Omega_a. \tag{2.3.22}$$

这时式 (2.3.16) 中的最后一项可改写为

$$-\frac{1}{3}\alpha_3\frac{\Omega_a}{m_a}(\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{v}_a)\times\boldsymbol{\omega}. \tag{2.3.23}$$

式 (2.3.15) 中 $(\boldsymbol{a}_a)_2$ 是重质量物体的准牛顿加速度, 它的表达式 (2.3.17) 中的 $(m_p)_a^{ik}$ 是“被动引力质量线量”, 具有形式

$$\begin{aligned}(m_p)_a^{ik} =& m_a\left\{\delta^{ik}\left[1+(4\beta-\gamma-3-3\zeta_w-\alpha_1+\alpha_2-\zeta_1)\frac{\Omega_a}{m_a}\right.\right.\\ &\left.\left.-3\zeta_w\hat{n}_{ab}^1\hat{n}_{ab}^m\frac{\Omega_a^{1m}}{m_a}\right]+(2\zeta_w-\alpha_2-\zeta_1-\zeta_2)\frac{\Omega_a}{m_a}\right\};\end{aligned} \tag{2.3.24}$$

(2.3.17) 中的 $\chi(\boldsymbol{r}_a)$ 是准牛顿引力势, 具有形式

$$\chi(\boldsymbol{r}_a) = \sum_{b\neq a}\frac{[m_A(\hat{\boldsymbol{n}}_b)]_b}{r_{ab}}. \tag{2.3.25}$$

式中 $[m_A(\hat{\boldsymbol{n}})_{ab}]_b$ 是第 b 个物体的“主动引力质量”, 它的表达式为

$$\begin{aligned}[m_A(\hat{\boldsymbol{n}})_{ab}]_b = m_b\bigg\{&1+\left(4\beta-\gamma-3-3\zeta_w-\frac{1}{2}\alpha_3-\frac{1}{2}\zeta_1-2\zeta_2\right)\times\frac{\Omega_b}{m_b}\\ &+\zeta_3\frac{E_b}{m_b}-\left(\frac{3}{2}\alpha_3+\zeta_1-3\zeta_4\right)\frac{P_b}{m_b}\\ &+\frac{1}{2}(\zeta_1-2\zeta_w)\hat{n}_{ab}^i\hat{n}_{ab}^k\frac{\Omega_b^{ik}}{m_b}\bigg\}.\end{aligned} \tag{2.3.26}$$

应注意, 主动引力质时和被动引力质量与相对于其他物体的方向 $\hat{\boldsymbol{n}}_{ab}$ 有关. 为了应用的方便, 我们改写准牛顿加速度的表达式, 使其含有与位置无关的惯性质量、主动引力质量和被动引力质量张量, 及引力势 χ^{lm}, 结果表示为

$$\begin{aligned}&(\tilde{m}_I^{ik})_a(a_\alpha^k)_2 = (\tilde{m}_p)_a^{lm}\chi_{,i}^{lm},\\ &\chi^{lm} \equiv \sum_{b\neq a}(\tilde{m}_A)_b^{ml}\hat{n}_{ab}^k\hat{n}_{ab}^l r_{ab}^{-1},\end{aligned} \tag{2.3.27}$$

式中

$$\begin{aligned}&(\tilde{m}_I)_a^{ik} = m_a\left\{\delta^{ik}\left[1+(\alpha_1-\alpha_2+\zeta_1)\frac{\Omega_a}{m_a}\right]+(\alpha_2-\zeta_1+\zeta_2)\frac{\Omega_a^{ik}}{m_a}\right\},\\ &(\tilde{m}_p)_a^{lm} = m_a\left\{\delta^{lm}\left[1+(4\beta-\gamma-3-3\zeta_w)\frac{\Omega_a}{m_a}\right]-\zeta_w\frac{\Omega_a^{lm}}{m_a}\right\},\end{aligned} \tag{2.3.28a}$$

$$(\tilde{m}_A)_b^{mk} = m_b\left\{\delta^{mk}\left[1+(4\beta-\gamma-r-3\zeta_w-\frac{1}{2}\alpha_3-\frac{1}{2}\zeta_1\right.\right.$$
$$\left.\left.-2\zeta_2)\frac{\Omega_b}{m_b}+\zeta_3\frac{E_b}{m_b}-\left(\frac{3}{2}\alpha_3+\zeta_1-3\zeta_4\right)\frac{P_b}{m_b}\right]-\left(\zeta_w-\frac{1}{2}\zeta_1\right)\frac{\Omega_b^{mk}}{m_b}\right\}, \quad (2.3.28\text{b})$$

Ω_a 是惯性引力能张量. Ω_a^{ij} 是引力能张量.

在牛顿理论中, 主动引力质量, 被动引力质量和惯性质量都是相同的, 所以每个物体的加速度与其质量和结构无关, 此即等效原理. 但是由 (2.3.28) 可知, 在给定的引力度规理论中, 并不要求被动引力质量等于惯性质量, 二者的差别取决于几个 PPN 参量和物体的自引力能 (Ω 和 Ω^{ik}). 这一效应称为 Nordtvedt 效应, 在弱等效原理中不存在. Nordtvedt 效应的存在并不违背 Eøtvøs 实验, 因为在考虑实验室尺度的物体时忽略了自引力 $\left[\dfrac{\Omega}{m}(\text{实验室内}) < 10^{-39}\right]$.

对于大多数实际情况, 可以设物体是球对称的, 于是可用 $\Omega_a^{ik} \approx \dfrac{1}{3}\delta^{ik}\Omega_a$ 简化质量张量, 这时我们有

$$(a_a^i)_2 = \frac{1}{m_a}(m_p)_a\chi_{,i},$$
$$\chi = \sum_{b\neq a}(m_A)_{b/r_{ab}}.$$

式中

$$\frac{(m_p)_a}{m_a} = 1+\left(4\beta-\gamma-3-\frac{10}{3}\zeta_w-\alpha_1+\frac{2}{3}\alpha_2-\frac{2}{3}\zeta_1-\frac{1}{3}\zeta_2\right)\frac{\Omega_a}{m_a},$$
$$\frac{(m_A)_b}{m_b} = 1+\left(4\beta-\gamma-3-\frac{10}{3}\zeta_w-\frac{1}{2}\alpha_3-\frac{1}{3}\zeta_1-2\zeta_2\right)\frac{\Omega_b}{m_b}$$
$$+\zeta_3\frac{E_b}{m_b}-\left(\frac{3}{2}\alpha_3-\zeta_1-3\zeta_4\right)\frac{P_b}{m_b}. \quad (2.3.29)$$

我们已把 $(\tilde{m}_I^{ik})^{-1}$ 和 $\tilde{m}_p^{lm}$ 放入 m_p 之中.

式 (2.3.15) 中的 $(\boldsymbol{a}_a)_3$ 称为 n 体项, 它是对“点质量”PPN 短程线运动方程的后牛顿修正, 也含有物体本身引力场产生的一些后牛顿项. 这一 n 体加速度可以产生“经典的”近日点进动和一些其他的引力效应.

2.4 Schwarzschild 场中的近日点移动 (爱因斯坦经典效应)

我们首先讨论试验粒子的情况, 即“经典”近日点进动. 将 Schwarzschild 度规

代入 (2.1.4) , 得到

$$F(u)=\frac{\varepsilon^2-1}{h^2}+\frac{2m}{h^2}u-u^2+2mu^3. \tag{2.4.1}$$

解方程 (2.1.6), 给出常数 ε 和 h 的准确表达式:

$$\varepsilon^2=\left[\left(1-\frac{2m}{p}\right)^2-\frac{4m^2}{p^2}e^2\right]\left[1-\frac{m(3+e^2)}{p}\right]^{-1},$$

$$h^2=mp\left[1-\frac{m(3+e^2)}{p}\right]^{-1} \tag{2.4.2}$$

由 (2.1.7) 得

$$C=1-\frac{2m}{p}(3+e\cos\psi). \tag{2.4.3}$$

取 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$, 将 (2.4.3) 代入 (2.1.8) 积分, 得到近日点附加移动的近似表达式:

效应 9

$$\left(\frac{\Delta\alpha}{2\pi}\right)_m=\frac{3m}{p}+\frac{27m^2}{2p^2}+\frac{3m^2}{4p^2}e^2, \tag{2.4.4}$$

此式表明, 牛顿椭圆轨道的近日点发生进动. 式中第一项是爱因斯坦 (1915) 由场方程的近似解得到的, 而严格解是 Schwarzschild 于 1916 年才给出的. 此效应随焦参量 p 的减小而增大. 对于水星,

$$p(\text{水星})=5.53\times10^{11}\text{cm},$$

$$\Delta\alpha(\text{水星, 理论值})=0.1038''\cdot\text{周}^{-1}=43.03''\cdot\text{百年}^{-1}, \tag{2.4.5}$$

$$\Delta\alpha(\text{水星, 观测值})=(42.56\pm0.94)''\cdot\text{百年}^{-1}. \tag{2.4.6}$$

爱因斯坦首先将理论预言的结果与以前的观测所确定的数值进行了比较, 符合得很好.

为了清楚地显示出四极矩和其他参量对轨道近日点移动的影响, 我们用 PPN 形式系统再仔细讨论这一效应 (关于四极矩效应的一个简单讨论见 2.16 节). 考虑惯性质量为 m_1 和 m_2, 自引力能为 Ω_1 和 Ω_2 的两体系统. 第一个物体具有很小的四极矩 Q^{ij}. 分 $w=0$ 和 $w\neq0$ 两种情况讨论, w 是参考系相对于宇宙静止标架的速度.

(1) $w=0$ 的情况, 即整个系统相对于宇宙静止标架是静止的. 假设系统附近再没有其他引力体. 取系统质量中心为 PPN 坐标系原点. 认为每个物体都近似为球体, 我们有 $\Omega^{ik}\approx\dfrac{1}{3}\delta^{ik}\Omega_a$. 根据 (2.3.15), 得到每个物体的加速度

$$\boldsymbol{a}_1=\left(\frac{m_p}{m}\right)_1(\nabla\chi)_1-\frac{m_2\boldsymbol{r}}{\mathrm{r}^3}\left[(2\gamma+2\beta)\frac{m_2}{r}\right.$$

$$
\begin{aligned}
&+\left(2\gamma+2\beta+1+\frac{1}{2}\alpha_1-\zeta_2\right)\frac{m_1}{r}-\gamma\boldsymbol{v}_1^2\\
&+\frac{1}{2}(4\gamma+4+\alpha_1)\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2-\frac{1}{2}(2\gamma+2+\alpha_2+\alpha_3)\boldsymbol{v}_2^2\\
&\left.+\frac{3}{2}(1+\alpha_2)(\boldsymbol{v}_2\cdot\hat{\boldsymbol{n}})^2\right]-\frac{m_2\boldsymbol{r}}{r^3}\cdot[(2\gamma+2)\boldsymbol{v}_1\\
&-(2\gamma+1)\boldsymbol{v}_2]\boldsymbol{v}_1+\frac{1}{2}\frac{m_2\boldsymbol{r}}{r^3}\cdot[4\gamma+4+\alpha_1)\boldsymbol{v}_1\\
&-(4\gamma+2+\alpha_1-2\alpha_2)\boldsymbol{v}_2]\boldsymbol{v}_2,
\end{aligned}
$$

$$
\boldsymbol{a}_2=\{\text{上式中将}\boldsymbol{r}\text{换为}-\boldsymbol{r},\text{脚标 1 与 2 对换}\}. \tag{2.4.7}
$$

式中 $\boldsymbol{r}\equiv\boldsymbol{r}_{21}, \hat{\boldsymbol{n}}\equiv\boldsymbol{r}/r$. 在物体 1 产生的准牛顿势中含有四极矩的牛顿贡献, 我们有

$$
\begin{aligned}
&(\chi_{,i})_1=(m_A)_2\frac{x^i}{r^3}\\
&(\chi_{,i})_2=-(m_A)_1\frac{x^i}{r^3}-\frac{1}{2}\frac{Q_1^{kl}}{r^4}(5\hat{\boldsymbol{n}}^k\hat{\boldsymbol{n}}^1\hat{\boldsymbol{n}}^i-2\delta^{ik}\hat{\boldsymbol{n}}^l),
\end{aligned}
\tag{2.4.8}
$$

式中 $(m_A)_1$ 和 $(m_A)_2$ 是由方程 (2.3.29) 给出的主动引力质量. 可以证明, 一个关于 $\hat{e}$ 方向轴对称的物体, Q^{ik} 的形式为

$$
Q_1^{ik}=m_1R_1^2J_{2(1)}(\delta^{ik}-3\hat{e}^i\hat{e}^k). \tag{2.4.9}
$$

式中 J_2 是四极矩的大小, 由下式给出:

$$
J_2=\frac{C-A}{mR^2}, \tag{2.4.10}
$$

C 是关于对称轴的惯性矩, A 是关于赤道轴的惯性矩, R 是半径.

由于系统的质量中心是静止的, 保证 (2.4.7) 中后牛顿项的足够精度, 我们可以把 $\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_2$ 用下式代换:

$$
\boldsymbol{v}_1=-\frac{m_2}{m}\boldsymbol{v},\quad \boldsymbol{v}_2=\frac{m^1}{m}\boldsymbol{v}. \tag{2.4.11}
$$

式中

$$
\boldsymbol{v}\equiv\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1,\quad m\equiv m_1+m_2. \tag{2.4.12}
$$

定义折合质量为

$$
\mu=\frac{m_1m_2}{m}. \tag{2.4.13}
$$

这样, 相对加速度 $\boldsymbol{a}\equiv\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_1$ 可写为

$$
\boldsymbol{a}=-\frac{\tilde{m}\boldsymbol{r}}{r^3}+\frac{1}{2}\frac{m_1\boldsymbol{R}_1^2\boldsymbol{J}_{2(1)}}{r^4}[15(\hat{e}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}])^2\hat{\boldsymbol{n}}
$$

$$
\begin{aligned}
&- 6(\hat{e}\cdot\hat{\boldsymbol{n}})\hat{e} - 3\hat{\boldsymbol{n}}] + \frac{mr}{r^3}\left[(2\gamma+2\beta)\frac{m}{r} - \gamma v^2\right.\\
&+ (2+\alpha_1-2\zeta_2)\frac{\mu}{r} - \frac{1}{2}(6+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)\frac{\mu}{m}v^2\\
&\left.+ \frac{3}{2}(1+\alpha_2)\frac{\mu}{m}(\boldsymbol{v}\cdot\hat{\boldsymbol{n}})^2\right] + \frac{m(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}}{\boldsymbol{r}^3}\left[(2\gamma+2) - \frac{\mu}{m}(2-\alpha_1+\alpha_2)\right]. \qquad (2.4.14)
\end{aligned}
$$

式中

$$
\begin{aligned}
\tilde{m} &\equiv \left(\frac{m_p}{m}\right)_2 (m_A)_1 + \left(\frac{m_p}{m}\right)_1 (m_A)_2\\
&= m([1 + f_1(\varOmega_1) + f_2(\varOmega_2)]. \qquad (2.4.15)
\end{aligned}
$$

$f_1(\varOmega_1)$ 和 $f_2(\varOmega_2)$ 分别代表两个物体的引力自能项, 对于太阳, 它们不超过 $\sim 10^{-5}$, 并且是一个常量. 所以有 $\tilde{m}\approx m$, 可以去掉波号.

在太阳系中, 取地球轨道平面为参考平面, 春分点的地–日方向为参考方向. 对于所有的行星, 其轨道与参考平面的夹角 i 都很小, 可以认为 $\sin i \ll 1$. 从参考方向到上交点的角为 $\boldsymbol{\varOmega}$. 在轨道平面中测得的近日点角度为 ω, 离心率为 e, 半长轴为 α. 用标准方法计算轨道参量的扰动. 把 (2.4.14) 中的加速度 $\boldsymbol{a}$ 分解为径向分量 $a^{(1)}$. 垂直于轨道平面的分量 $a^{(2)}$ 和垂直于前两个方向的分量 $a^{(3)}$, 利用下列公式计算各轨道参量的变化率:

$$
\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = -\frac{pa^{(1)}}{he}\cos\phi + \frac{(p+r)a^{(3)}}{he}\sin\phi - \frac{ra^{(2)}}{h}\cot i\cdot\sin(\omega+\phi), \qquad (2.4.16)
$$

$$
\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = \frac{1-e^2}{h}\left[aa^{(1)}\sin\phi + \frac{a^{(3)}}{e}\left(\frac{ap}{r} - r\right)\right], \qquad (2.4.17)
$$

$$
\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = \frac{2a^2}{h}\left(\frac{pa^{(3)}}{r} + a^{(1)}e\sin\phi\right), \qquad (2.4.18)
$$

$$
\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{ra^{(2)}}{h}\cos(\omega+\phi), \qquad (2.4.19)
$$

$$
\frac{\mathrm{d}\varOmega}{\mathrm{d}t} = \frac{a^{(2)}r}{h}\frac{\sin(\omega+\phi)}{\sin i}. \qquad (2.4.20)
$$

式中 h 是单位质量的轨道角动量, ϕ 是从近日点到行星的角, p 的定义仍为

$$
p = a(1-e^2), \qquad (2.4.21)
$$

r, ϕ, p, e 的关系仍为

$$
\begin{aligned}
r &\equiv p(1+e\cos\phi)^{-1},\\
r^2\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} &\equiv h \equiv (mp)^{1/2}. \qquad (2.4.22)
\end{aligned}
$$

由于在地心坐标系中观测, 所以测得的近日点为

$$\tilde{\alpha} = \alpha + \Omega \cos i. \tag{2.4.23}$$

这时可算出 $\tilde{\alpha}$ 的变化率

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{\alpha}}{\mathrm{d}t} = -\frac{pa^{(1)}}{he}\cos\phi + \frac{a^{(3)}(p+r)}{he}\sin\phi. \tag{2.4.24}$$

式 (2.43.24) 中的扰动加速度为

$$\begin{aligned} a^{(1)} = & \frac{3}{2}\frac{m\boldsymbol{R}^2\boldsymbol{J}_2}{r^4}[3(\hat{\boldsymbol{e}}\cdot\hat{\boldsymbol{n}})]^2 - 1] + \frac{m}{r^2}\Bigg[(2\gamma+2\beta)\frac{m}{r} \\ & - \gamma v^2 + (2\gamma+2)(\boldsymbol{v}\cdot\hat{\boldsymbol{n}})^2 + (2+\alpha_1-2\zeta_2)\frac{\mu}{r} \\ & - \frac{1}{2}(6+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)\frac{\mu}{m}v^2 \\ & - \frac{1}{2}(1-2\alpha_1-\alpha_2)\frac{\mu}{m}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})^2\Bigg], \end{aligned}$$

$$a^{(3)} = \frac{-3mR_2J_2}{r^4}(\hat{\boldsymbol{e}}\cdot\hat{\boldsymbol{n}})(\hat{\boldsymbol{e}}\cdot\hat{\boldsymbol{\lambda}}) + \frac{m}{r^2}(\boldsymbol{v}\cdot\hat{\boldsymbol{n}})(\boldsymbol{v}\cdot\hat{\boldsymbol{\lambda}})[(2\gamma+2) - \frac{\mu}{m}(2-\alpha_1+\alpha_2). \tag{2.4.24a}$$

式中 $\hat{\boldsymbol{\lambda}}$ 沿轨道运动方向, 与 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 正交, $\boldsymbol{\lambda}$ 和 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 都是单位矢. 在太阳系中, 对称轴与轨道平面正交, 所以 $\hat{e}\cdot\hat{\boldsymbol{n}} = 0$. 把 (2.4.24) 代入 (2.4.24), 并注意 (2.4.22), 沿轨道求积分, 得到

效应 10

$$\begin{aligned} \Delta\tilde{a} = & \frac{6\pi m}{p}\Bigg[\frac{1}{3}(2+2\gamma-\beta) \\ & + \frac{1}{6}(2\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3+2\zeta_2)\frac{\mu}{m} + \frac{J_2R^2}{2mp}\Bigg]. \end{aligned} \tag{2.4.25}$$

上式中的第一项取决于 PPN 参数 γ 和 β 的经典近日点进动. 第二项取决于两物体质量的比, 这一项在完全守恒理论中 $(\alpha_1 \equiv \alpha_2 \equiv \alpha_3 \equiv \zeta_2 \equiv 0)$ 为零. 由于水星质量与太阳质量之比约为 2×10^{-7}, 所以 $\mu/m \sim 2\times10^{-7}$, 故对于水星和太阳可忽略这一项. 第三项取决于太阳四极矩 J_2. 太阳四极矩是由它的扁平结构产生的, 估计 $J_2 \sim 10^{-7}$, 用这一值及水星–太阳的标准轨道参数代入, 得到近日点进动值为

$$\begin{aligned} & \dot{\tilde{\alpha}} = 42''\cdot 95\lambda_p \cdot \text{百年}^{-1}, \\ & \lambda_p \equiv \frac{1}{3}(2+\ 2\gamma-\beta) + 3\times10^{-4}(J_2/10^{-7}). \end{aligned} \tag{2.4.26}$$

用雷达测量水星轨道, 得到对 PPN 参数的限制

$$\frac{1}{3}(2+\ 2\gamma-\beta) = \begin{cases} 1.005\pm0.020(\text{Shapiro}, 1972) \\ 1.003\pm0.005(\text{Shapiro}, 1976) \end{cases} \tag{2.4.27}$$

曾经有一段时间, 人们对水星近日点进动的解释有争议. 主要是由于 Dicke 等 (1966) 测量太阳的扁率, 得到极半径与赤道半径之差为 $\Delta R = (43.''3 \pm 3.''3) \times 10^{-3}$. 由此得到

$$J_2 = (2.47 \pm 0.23) \times 10^{-5} \quad (\text{Dicke}, 1974) \tag{2.4.28}$$

这样大的 J_2 值对水星近日点进动的贡献约为 $4''c^{-1}$. 这使广义相对论的预言与观测结果不一致. 另一方面, 这一值可由 Brans-Dicke 的标量引力理论得到解释, 只要取其中参量 $\omega \approx 5$.

这一争议直至 Hill 小组公布了他们的观测结果之后才平息下来. 他们观测的结果是

$$\begin{aligned} &\Delta R = (9.''2 \pm 6''2) \times 10^{-3}, \\ &J_2 = 0.10 \pm 0.43 \times 10^{-5} \quad (\text{Hill et al.}, 1974). \end{aligned} \tag{2.4.29}$$

此结果比 Dicke 值小 5 倍. 但是这两个观测结果的不一致性仍未解决.

要区分相对论引力效应和 J_2 效应是很困难的. 一种方法是比较不同行星的进动. 但是目前对金星、地球和火星进动值的测量精度都不够高. Shapiro(1972) 曾指出, 用雷达对内行星进行几年观测, 有可能作出上述比较. 最有希望的是用所谓太阳探索, 发射一飞船, 其近日点与太阳中心距离为太阳半径的 4 倍. 借助于这样高偏心率的飞船, 能给出精度为 10^{-8} 的 J_2 值 (Nordtvedt,1977).

(2) $w \neq 0$ 的情况. 设两体系统的质心以速度 $\boldsymbol{w}$ 相对于宇宙静止标架运动. 由 (2.3.16), (2.3.17) 和 (2.3.23) 得到附加加速度

$$\begin{aligned} \delta \boldsymbol{a}_1 = &-\frac{1}{3}\alpha_3 \frac{\Omega_1}{m_1}(\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v}_1) \times \boldsymbol{w} - \frac{m_2 \boldsymbol{r}}{r^3}\bigg[(4\beta + 2\gamma - 1 - \zeta_2 - 3\zeta_w)\frac{m_G}{r_G} \\ &+ \frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3)w^2 + \frac{1}{2}\alpha_1 \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{v}_1 + \frac{1}{2}(\alpha_1 - 2\alpha_2 - 2\alpha_3)\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{v}_2 + \frac{3}{2}\alpha_2(\boldsymbol{w}\cdot\hat{\boldsymbol{n}})^2 \\ &+ 3\alpha_2(\boldsymbol{w}\cdot\hat{\boldsymbol{n}})(\boldsymbol{v}_2\cdot\hat{\boldsymbol{n}})\bigg] - \zeta_w \frac{m_2}{r^3}\frac{m_G}{r_G}[2(\hat{\boldsymbol{n}}_G\cdot\boldsymbol{r})\hat{\boldsymbol{n}}_G - 3\boldsymbol{r}(\boldsymbol{n}_G\cdot\hat{\boldsymbol{n}})^2] \\ &+ \alpha_2\frac{m_2}{r^3}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{w})\boldsymbol{v}_2 + \frac{1}{2}\frac{m_2}{r^3}\boldsymbol{r}\cdot[\alpha_1\boldsymbol{v}_1 - (\alpha_1 - 2\alpha_2)\boldsymbol{v}_2 + 2\alpha_2\boldsymbol{w}]\boldsymbol{w}, \\ \delta\boldsymbol{a}_2 = &\{\text{在上式中将}\boldsymbol{r}\text{换为} -\boldsymbol{r}, \text{脚标}1 \leftrightarrow 2\}, \end{aligned} \tag{2.4.30}$$

式中 $\boldsymbol{r} \equiv \boldsymbol{r}_{21}, \hat{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{r}/r, r_G \equiv |\boldsymbol{r}_{1G}|, \hat{\boldsymbol{n}}_G \equiv \boldsymbol{r}_{1G}/r_G$, 下脚标 G 代表银河系. 在导出上式的过程中忽略了 $m_G r/ r_G^2, m_G r^2/r_G^2$ 等高阶项. (2.4.30) 的第一个中括号里前两项为常数, 可以放到牛顿加速度中去. 由太阳和行星组成的系统, 可忽略行星的 Ω/m. 取太阳为物体 1, 则相对加速度 $\delta\boldsymbol{a} = \delta\boldsymbol{a}_2 - \delta\boldsymbol{a}_1$ 可写为

$$\delta\boldsymbol{a} = \frac{m\boldsymbol{r}}{r^3}\left[\frac{1}{2}\alpha_1\frac{\delta m}{m}\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{v} + \frac{3}{2}\alpha_2(\boldsymbol{w}\cdot\hat{\boldsymbol{n}})^2\right]$$

$$+\zeta_w \frac{m}{r^3}\frac{m_G}{r_G}[2(\hat{\boldsymbol{n}}_G\cdot\boldsymbol{r})\hat{\boldsymbol{n}}_G - 3\boldsymbol{r}(\hat{\boldsymbol{n}}_G\cdot\hat{\boldsymbol{n}})^2]$$

$$-\frac{m\boldsymbol{r}}{r^3}\left[\frac{1}{2}\alpha_1\frac{\delta m}{m}\boldsymbol{v}+\alpha_2\boldsymbol{w}\right]\boldsymbol{w}+\frac{1}{3}\alpha_3\left(\frac{\Omega}{m}\right)_\Theta \boldsymbol{w}\times\boldsymbol{w}. \tag{2.4.31}$$

式中用到了 (2.4.11) 和 (2.4.12), $\delta m \equiv m_2 - m_1$.

设 $m_2 \ll m_1, e \ll 1$, $\boldsymbol{w}$ 与轨道平面正交, 用计算 (2.4.25) 的方法, 取到 e 的零阶, 得到轨道上 $\bar{\alpha}$ 的变化量

$$\Delta\bar{\alpha} = -2\pi\left[\frac{1}{4}\alpha_1\left(\frac{m}{p}\right)^{1/2}\frac{w_\odot}{e}+\frac{1}{8}\alpha_2(w_p^2-w_Q^2)\right.$$

$$\left.-\frac{1}{4}\zeta_w\frac{m_G}{r_G}(\hat{n}_p^2-\hat{n}_Q^2)-\frac{1}{2}\alpha_3\left(\frac{|\Omega|}{m}\right)_\odot\times\left(\frac{|w|p^2}{me}\right)w_Q\right]. \tag{2.4.32}$$

式中 w_p, w_Q 和 $\hat{n}_p, \hat{n}_Q$ 分别是矢量 $\boldsymbol{w}$ 和 $\boldsymbol{n}$ 沿近日点方向 $(w_p, \hat{n}_p)$ 和沿与它垂直 (与轨道面上) 的方向 $(w_Q, \hat{n}_Q)$ 的分量. 可以证明, 式 (2.4.31) 中的扰动引起 e, i 和 Ω 的变化. 将水星、地球和太阳的各有关参量代入. 有

$$\left(\frac{\Omega}{m}\right)_\odot \approx 4\times10^{-6}, \quad w_\odot \approx 3\times10^{-6}\mathrm{s}^{-1},$$

$\boldsymbol{w}$ 的方向指向银河系中心. 太阳系相对于优越标架的速度

$$w = 350\mathrm{km}\cdot\mathrm{s}^{-1}, \tag{2.4.33}$$

这一数值是根据 (1977) 测量数据算得的. 考虑到“经典”贡献, 最后得到

效应 11

$$\dot{\alpha}_{水星} = 43.0\left[\frac{1}{3}(2\gamma+2-\beta)+3\times10^{-4}(J_2/10^{-7})\right]$$

$$-123\alpha_1+92\alpha_2+1.4\times10^5\alpha_3+63\zeta_w/百年 \tag{2.4.34}$$

效应 12

$$\dot{\alpha}_{地球} = 3.8\left[\frac{1}{3}(2\gamma+2-\beta)\right]-198\alpha_1+12\alpha_2$$

$$+2.4\times10^6\alpha_3+14\zeta_w/百年 \tag{2.4.35}$$

取 $J_2 < 5\times10^{-6}$, 按观测值与上两式比较, 可以得到对几个 PPN 参量的限制

$$|49\alpha_1-\alpha_2-6.3\times10^5\alpha_3-2.2\zeta_w| < 0.1,$$

$$|a_3| \lesssim 2\times10^{-7}. \tag{2.4.36}$$

效应 11 和效应 12 是由于 $w \neq 0$ 引起的, ($\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 不为零), 属于优越标架效应.

2.5 Nordtvedt 效应

在 2.3 节中已指出, 对于重质量的具有自引力的物体, 弱等效原理可能不成立. 每个物体的被动引力质量和惯性引力质量不必须相等, 它们的差异可用 PPN 参量表示出来. 物体加速度的准牛顿部分表示为 (2.3.27) 和 (2.3.28). 太阳系中大多数天体接近球形, 所以有

$$\Omega_a^{ik} \approx \frac{1}{3}\Omega_a \delta^{ik}. \tag{2.5.1}$$

将此式代入 (2.3.27), 可把准牛顿加速度写为

$$(a_a^i)_2 = \left(\frac{m_p}{m}\right)_a \chi_{,i}. \tag{2.5.2}$$

式中

$$\left(\frac{m_p}{m}\right)_a = 1 + \left(4\beta - \gamma - 3 - \frac{10}{3}\zeta_w - \alpha_1 + \frac{2}{3}\alpha_2 - \frac{2}{3}\zeta_1 - \frac{1}{3}\zeta_2\right)\frac{\Omega_a}{m_\sigma},$$

$$\chi = \sum_{b\neq a} \frac{(m_A)_6}{r_{ab}}. \tag{2.5.3}$$

由于月球的自引力能比地球的小, 按 (2.5.2)~(2.5.3), 月球和地球以不同的加速度落向太阳. 考虑到它们的相互吸引, 由 (2.5.2) 和 (2.5.3)(忽略四极矩项) 得到

$$\begin{aligned} a_{\text{地}}^i &= -\left(\frac{m_p}{m}\right)_{\text{地}}\left[(m_A)_\odot \frac{X^i}{R^3} - \frac{(m_A)_{\text{月}} x^i}{r^3}\right], \\ a_{\text{月}}^i &= -\left(\frac{m_p}{m}\right)_{\text{月}}\left[(m_A)_\odot \frac{X_0^i}{R_0^3} + \frac{(m_A)_{\text{地}} x^i}{r^3}\right], \end{aligned} \tag{2.5.4}$$

式中 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{X}_0$ 分别表示太阳到地球和月亮的矢量, $\boldsymbol{x}$ 是由地球到月球的矢量. 月球相对于地球的加速度为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} \equiv& \boldsymbol{a}_{\text{月}} - \boldsymbol{a}_{\text{地}} \\ =& -\frac{\tilde{m}\boldsymbol{r}}{r^3} + \eta\left[\left(\frac{\Omega}{m}\right)_{\text{地}} - \left(\frac{\Omega}{m}\right)_{\text{月}}\right]\frac{m_\odot \boldsymbol{X}}{R^3} \\ &+ \left(\frac{m_p}{m}\right)_{\text{月}} m_\odot \left(\frac{\boldsymbol{X}}{R^3} - \frac{\boldsymbol{X}_0}{R_0^3}\right). \end{aligned} \tag{2.5.5}$$

式中

$$\begin{aligned} &\tilde{m} \equiv (m_A)_{\text{地}} + (m_A)_{\text{月}} + \eta\left[(m_A)_{\text{地}}\left(\frac{\Omega}{m}\right)_{\text{月}} + (m_A)_{\text{月}}\left(\frac{\Omega}{m}\right)_{\text{地}}\right], \\ &m_\odot \equiv (m_A)_\odot, \\ &\eta \equiv 4\beta - \gamma - 3 - \frac{10}{3}\zeta_w - \alpha_1 + \frac{2}{3}\alpha_2 - \frac{2}{3}\zeta_1 - \frac{1}{3}\zeta_2. \end{aligned} \tag{2.5.6}$$

式 (2.5.5) 中第二项是地球和月球落向太阳的加速度之差.

效应 13

$$(\boldsymbol{a})_{\Omega,\eta} = \eta\frac{m_\odot \boldsymbol{X}}{R^3}\left[\left(\frac{\Omega}{m}\right)_{\text{地}} - \left(\frac{\Omega}{m}\right)_{\text{月}}\right], \tag{2.5.7}$$

此即 Nordtvedt 效应. 第三项是非相对论扰动, 第一项是地球和月球的牛顿加速度. 这样, 由 (2.5.5) 略去非相对论扰动, 得到月球相对于地球的运动方程为

$$\boldsymbol{a} = -\frac{\tilde{m}\boldsymbol{r}}{r^3} + \eta\frac{m_\odot \boldsymbol{X}}{R^3}\left[\left(\frac{\Omega}{m}\right)_{\text{地}} - \left(\frac{\Omega}{m}\right)_{\text{月}}\right]. \tag{2.5.8}$$

取 PPN 准笛卡儿坐标系, 设未受扰动时月球在 $x-y$ 面内做角速度为 ω_0 的圆运动, 地球在此平面内做角速度为 ω_e 的圆运动, 于是有

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}, \quad \boldsymbol{h} = \boldsymbol{r}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}, \tag{2.5.9}$$

式中 $\boldsymbol{h}$ 为地–月轨道的比角动量. 由上式可得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} &= \frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a}}{r} + \frac{h^2}{r^3},\\ \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{h}}{\mathrm{d}t} &= \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{a}.\end{aligned} \tag{2.5.10}$$

这样, 由 (2.5.7) 和 (2.5.8) 得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} &= -\frac{\tilde{m}}{r^2} + \frac{h^2}{r^3} + (a)_\Omega \cos\omega t,\\ \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} &= -r(a)_\Omega \sin\omega t.\end{aligned} \tag{2.5.11}$$

式中

$$\begin{aligned}&\omega \equiv \omega_0 - \omega_e, \quad \cos\omega t \equiv -\frac{\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{r}}{r} \quad \sin\omega t \equiv -\frac{(\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{r})_z}{r},\\ &(a)_{\Omega,\eta} \equiv \eta\frac{m_\odot}{R^2}\left[\left(\frac{\Omega}{m}\right)_{\text{地}} - \left(\frac{\Omega}{m}\right)_{\text{月}}\right],\end{aligned} \tag{2.5.12}$$

角度 ωt 是地–日方向和地–月方向的夹角. 令

$$r \equiv r\sigma + \delta r, \quad h \equiv h_0 + \delta h, \tag{2.5.13}$$

并利用 $\tilde{m}/r_0^3 = h_0^2/r_0^4 = \omega_0^2$, 代入 (2.5.11), 积分得

效应 14

$$(\delta r)_{\Omega,\eta} = \left(\frac{1+2\omega_0/\omega}{\omega_0^2 - \omega_2}\right)(a)_\Omega \cos\omega t, \tag{2.5.14}$$

效应 15

$$(\delta h)_{\Omega,\eta} = \frac{r_0}{\omega}(a)_{\Omega}\cos\omega t. \tag{2.5.15}$$

式 (2.5.14) 表示由自引起的地–月轨道的极化. $\eta > 0$ 时, 这极化总是指向太阳 (即轨道长轴指向太阳).

利用已知参量值

$$m_{\odot}/R^2 \approx 5.9 \times 10^{-6}\text{km} \cdot \text{s}^{-2},$$

$$\omega_0 \approx 13.4\omega_e \approx 2.7 \times 10^{-6}\text{s}^{-1},$$

$(\Omega/m)_{地} \approx -4.6 \times 10^{-10}, (\Omega/m)_{月} \approx -0.2 \times 10^{-10}$, 可以将 (2.5.14) 写为

$$(\delta r)_{\Omega,\eta} \approx 8.0\eta\cos(\omega - \omega_e)tm. \tag{2.5.16}$$

1969 年 8 月测得由月球上的 Apollo11 号反射器反射回来的激光信号到达得克萨斯的观测器所经历的时间, 精度为 1 ns(30cm), 对于测量数据的分析, 没能把 Nordtvedt 效应和其他的因素分离开, 它有可能被其他的地–月轨道扰动所掩盖.

2.6 Schwarzschild 场中近日点的移动 (非经典效应)

1. 电荷在 Schwarzschild 场中运动时轨道近日点的移动

设有两个重质量物体, 它们都带有电荷, 而电荷又足够大, 会影响引力场. 这时解两个重质量物体组成的系统的运动方程, 才能显示出引力效应. 设其中一个物体的质量远小于另一物体的质量, 而令大质量物体的电荷为零, 则附加反常的表达式为

效应 16

$$\left(\frac{\Delta\alpha}{2\pi}\right)_k = -\frac{\tilde{k}}{2\tilde{m}p}. \tag{2.6.1}$$

式中 $\tilde{k}$ 表示小质量物体电荷的平方, $\tilde{m}$ 表示其质量.

效应 (2.6.1) 只和运动物体的参量有关. 可以在很大范围内改变这些参量的值, 从而改变效应 (2.6.1) 的值. 因此, 可以按最合适 (对于观测) 的参量发射卫星来测量此效应. 这比通常测量具有固定参量的巨大天体要简单得多.

2. 引力磁矩对近日点移动的贡献

与 2.3 节中的方法相似, 设两个重质量物体都带有磁矩, 这些磁矩对引力场都有贡献, 解二体运动方程, 来显示引力效应. 设大质量物体的磁矩等于零, 则可得到小质量物体的磁矩对附加反常的贡献. 假设小物体的引力磁矩 $\hat{n}$ 与轨道平面垂直, 轨道近日点附加移动为

效应 17

$$\left(\frac{\Delta\alpha}{2\pi}\right)_n = -\frac{6m\tilde{n}}{p\sqrt{mp}}. \tag{2.6.2}$$

由上式可见, 运动物体参量的引力作用减小了总的附加反常. 因此, 如果发射一个具有大电量或大磁矩的物体到中性试验物体的轨道上去, 则这荷电 (磁) 的物体会比中性物体落后. 如果强磁体的 $|c\hat{n}| \to 10^3 \sim 10^5 \mathrm{cm}^2 \cdot \mathrm{s}^{-1}$, 则效应为 (绕地球一周)

$$\left(\frac{\Delta\alpha}{2\pi}\right)_{\tilde{n}} \to 1.6 \times (10^{-11} \sim 10^{-9}). \tag{2.6.3}$$

在焦点参量 $p \sim 10^9\mathrm{cm}$ 的轨道上, 卫星每年绕地球运行约 3000 周, 所以卫星上磁体的近日点每年移动 $0.5 \sim 200\mathrm{cm}$. 用运行着的卫星可以做这一检验.

3. Schwarzschild 场中试验振子近日点移动

假设试验粒子在 Schwarzschild 场中沿半径为 r_0 的圆轨道运动. 如果粒子受到附加的非引力的作用, 则其运动方程为 (2.2.4).

对于周期性外力的情况

$$F^\mu = -\Omega^2\eta^\mu, \quad \eta^\mu = \xi^\mu \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega\tau+\beta)}. \tag{2.6.4}$$

式中 Ω 是频率, $\omega = f(\Omega)$. 假设只有径向分量 F^1 和 η^1, 我们对运动方程 (2.2.4) 做一次积分后, 得到力 F^μ 作用下试验振子一个周期内附加反常的表达式

效应 18

$$\left(\frac{\Delta\alpha}{2\pi}\right)_\Omega = \left[1+\frac{\Omega^2}{\omega_0^2}\left(1+\frac{3m}{r_0}\right)\right]^{1/2}\left(1+\frac{3m}{r_0}\right) - \left(1+\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2. \tag{2.6.5}$$

式中 $\omega_0 = \sqrt{\frac{m}{r_0^3}}$ 是开普勒频率. 这一效应的特点是它的大小与频率 Ω 和 ω_0 之比有关. 由 (2.6.5) 可得

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\Delta\alpha}{2\pi}\right)_{\Omega=0} &= \frac{3m}{r_0} \\
\left(\frac{\Delta\alpha}{2\pi}\right)_{\Omega_1\ll\omega_0} &= \frac{3m}{r_0}\left(1-\frac{\Omega_1^2}{\omega_0^2}\right), \\
\left(\frac{\Delta\alpha}{2\pi}\right)_{\Omega_2\gg\omega_0} &= \frac{3m}{2r_0} - \frac{\omega_0}{\Omega_2}.
\end{aligned} \tag{2.6.6}$$

由上式可见, 频率为 Ω_1 和 Ω_2 的两个振子的极化角不同, 因此它们之间的距离应随时间变化. 观察这种变化可以验证效应 (2.6.5).

4. 试验自旋法向分量的贡献

考虑一个试验物体的非短程线运动, 它的所有参量都是试验参量. 设所研究物体具有试验自旋, 方向垂直于轨道平面, $S=S_z$. 可以证明, 当沿赤道面运动时, 轨道是稳定的.

Papapetrou 方程 (2.2.17) 和 (2.2.18) 的第一次积分可写为

$$\mu u_0+u^\lambda\frac{\mathrm{D}S_{\lambda 0}}{\mathrm{D}\tau}+\frac{1}{2}g_{0\rho,\sigma}S^{\rho\sigma}=-\mu\varepsilon,$$

$$\mu u_3+u^\lambda\frac{\mathrm{D}S_{3\lambda}}{\mathrm{D}\tau}+\frac{1}{2}g_{3\rho,\sigma}S^{\rho\sigma}=\mu h. \tag{2.6.7}$$

另外, 由于方程组 (2.2.17)~(2.2.18) 含有 7 个独立的方程和 10 个未知量 ($S^{\mu\nu}$ 和 u^λ), 还可对粒子的自旋加上具体的附加条件. 此条件可选为

$$S^{\rho\sigma}u_\sigma=0,\quad \frac{1}{\mu}S_{\lambda\sigma}=\eta_{\lambda\sigma\rho\nu}S^\rho u^\nu, \tag{2.6.8}$$

并且只限于自旋的线性项, 因为这时才可以将粒子看成试验自旋, 也才可以忽略形如 $u^\lambda\dfrac{\mathrm{D}S_{\lambda\sigma}}{\mathrm{D}\tau}$ 的项. 由 (2.6.7) 和 $g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu=1$, 代入 Schwarzschild 度规, 只保留自旋的一次项, 我们得到轨道微分方程

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}_{m,s}(u)=&\frac{\varepsilon^2-1}{h^2}\left(1\pm\frac{2S\varepsilon}{h}\right)+\frac{2m}{h^2}\left(1\pm\frac{2S\varepsilon}{h}\right)u\\&-u^2+2m\left(1\mp\frac{S\varepsilon}{h}\right)u^3.\end{aligned} \tag{2.6.9}$$

由 (2.1.5) 得

$$C=1-\frac{2m}{p}\left(1\mp\frac{S\varepsilon}{h}\right)(3+e\cos\psi). \tag{2.6.10}$$

按前面相同的程序, 对自旋作近似积分, 得到自旋对轨道近日点移动的贡献.

效应 19

$$\left(\frac{\Delta\alpha}{2\pi}\right)_{m,s}=\mp\frac{3mS}{p\sqrt{mp}}. \tag{2.6.11}$$

当自旋与轨道角动量平行时, 式 (2.6.9)~(2.6.11) 取上面的符号, 反平行时取下面的符号. 对于地球, $S=a$, 所以在地面附近效应 (2.6.11)~ 10^{11}.

如果有两个试验自旋同在一个 Schwarzschild 场中的一个轨道上运行, 当它们的自旋反平行时, 二者会离开. 这一实验可以用来检验效应 (2.6.11). 第一周, 同向绕行的两个反向自旋粒子分离开的角度为

$$\Delta\beta=\frac{12\pi mS}{p\sqrt{mp}}. \tag{2.6.12}$$

2.7 Schwarzschild 场对试验物体轨道参量的限制

多种原因都会导致对轨道参量的限制, 比如轨道参量 p, e 和守恒能量 ε, 守恒面积 h 之间的依赖关系就可使 p 和 e 受到限制. 经常讨论的是圆轨道的稳定性问题, 因为这一情况在天体物理方面是有用的, 同步引力辐射就属于这种情况.

试验粒子的轨道必须满足下面的条件, 这些条件也可称为准则:

(a) 真实的运动要求

$$\varepsilon \geqslant 0, \quad h \geqslant 0; \tag{2.7.1}$$

(b) 径向稳定性要求

$$\frac{\mathrm{d}^2\varepsilon}{\mathrm{d}r^2} > 0, \quad \frac{\mathrm{d}^2h}{\mathrm{d}r^2} > 0. \tag{2.7.2}$$

对轨道还可能有一系列其他限制, 在具体物理问题中再讨论. 下面研究 Schwarzschild 场中的情况.

1. Schwarzschild 场中的圆轨道

当 $e=0$ 时, 由 (2.4.2) 得到

$$\varepsilon = \left(1-\frac{2m}{r}\right)\left(1-\frac{3m}{r}\right)^{-1/2},$$

$$h = \sqrt{mr}\left(1-\frac{3m}{r}\right)^{-1/2} \tag{2.7.3}$$

(2.7.1) 要求

$$r \geqslant 3m. \tag{2.7.4}$$

上式取等号对应于光速 (光子轨道). 由 (2.7.2) 可知 $r=6m$ 的轨道满足 "拐点" 条件. 满足条件

效应 20

$$r \geqslant 6m \tag{2.7.5}$$

的轨道对于径向扰动是稳定的. 这就是说, 当轨道半径介于 $3m$ 和 $6m$ 之间时, 只要使径向坐标有一点变化, 试验物体就会飞向无限远或者落入引力中心. 对引力场中圆轨道的上述限制在牛顿引力理论中是没有的. 显然, 上述效应只对半径小于 $6m$ 的引力源才成立.

2. 圆轨道的分离

将 (2.4.1) 再对 u 微分一次, 把所得方程用于圆轨道情况, 不难得到确定这些轨道半径的方程

$$r^2 - \frac{h^2}{m}r + 3h^2 = 0. \tag{2.7.6}$$

此方程的解为

效应 21

$$r_{\pm} = \frac{h^2}{2m}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{12m^2}{h^2}}\right). \tag{2.7.7}$$

这一效应表明, h 确定以后, 在 Schwarzschild 场中存在两个圆轨道, 其半径为 r_+ 和 r_-, $r_+ > r_-$. 当 h 充分大, $m/h \to 0$ 时, 得到 $r_- = 0, r_+ = \dfrac{h^2}{2m} = r_{\text{Newton}}$. 此效应表示在图 10-2 中. $r < 6m$ 时轨道不稳定, 只有当 $r = r_+$ 时运动才是稳定的. 随着 h 值增大, r_+ 增大而 r_- 减小. 由 (2.7.7) 可见, 在 Schwarzschild 场中只有 $h \geqslant 2\sqrt{3m}$ 对应的轨道运动才是可能的.

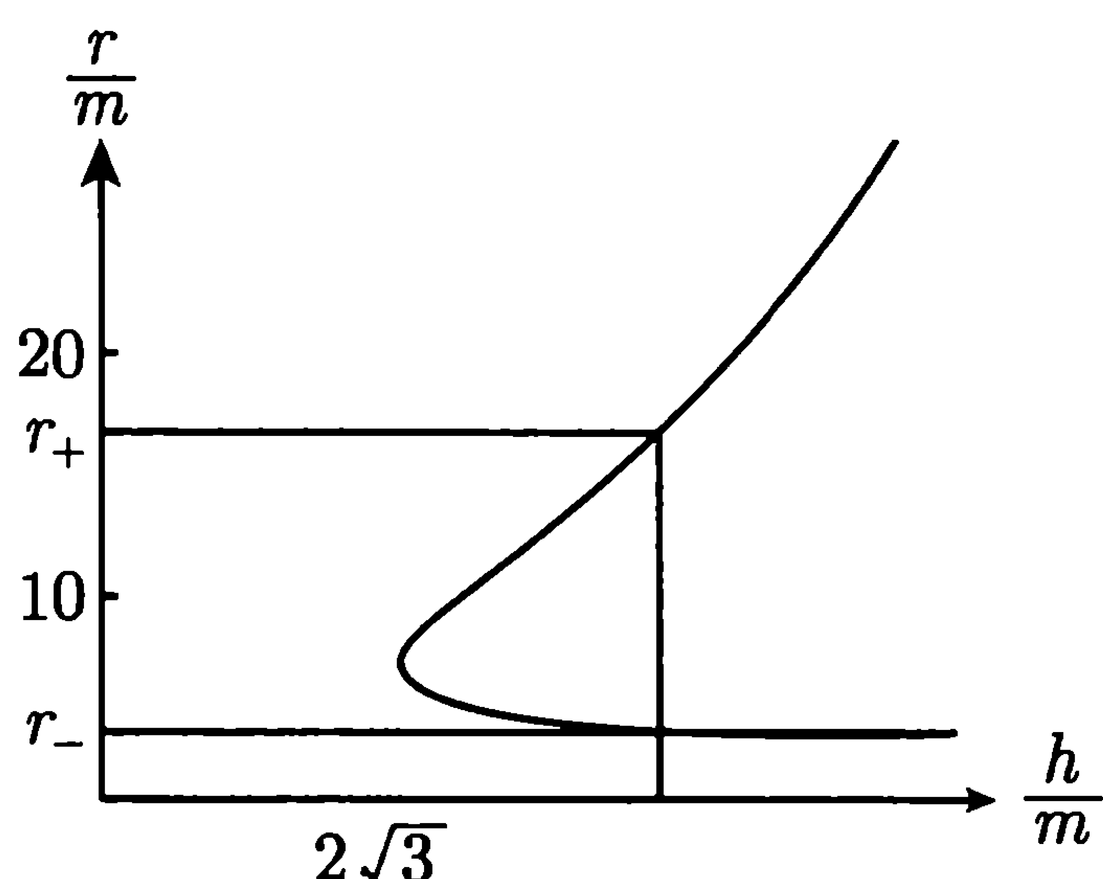


图 10-2

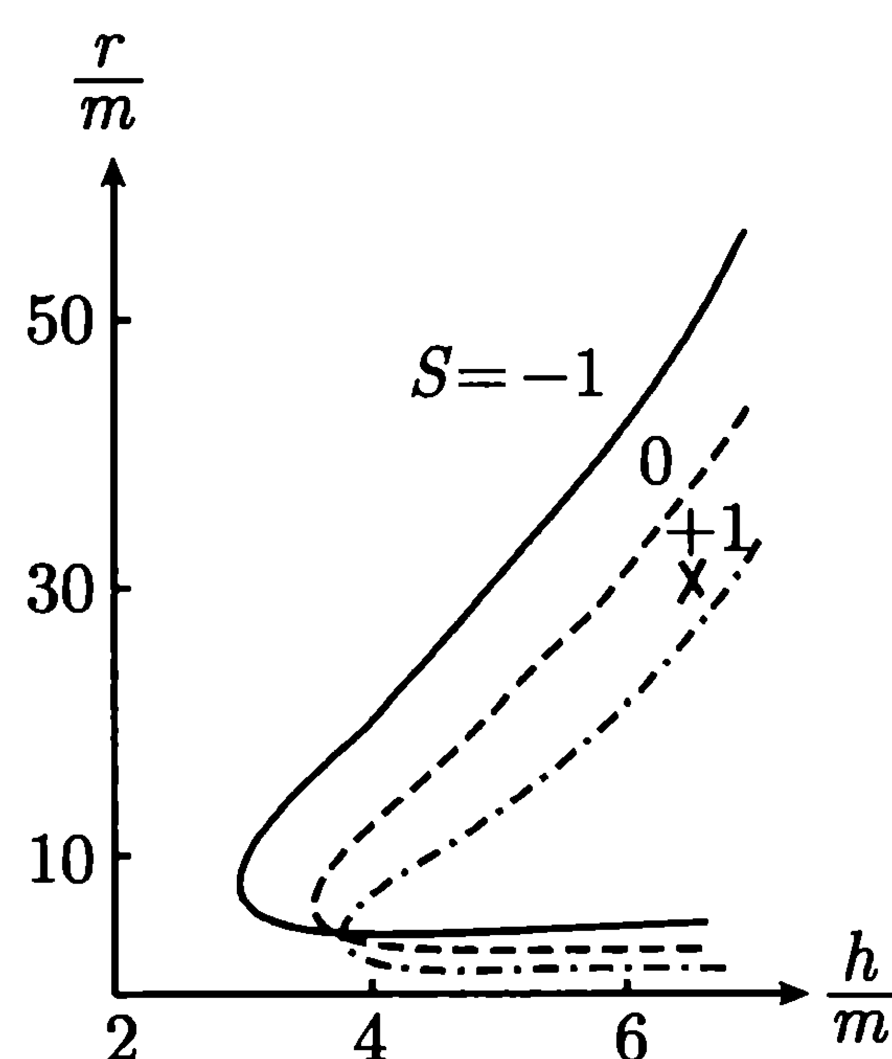


图 10-3

3. Schwarzschild 场中两个自旋的圆轨道

效应 22

设自旋方向与轨道平面垂直. 这一试验自旋的轨道运动由 Papapetrou 方程代入 Schwarzschild 度度规 $\left(\theta = \dfrac{\pi}{2}\right)$ 作第一次积分便可得到. $\varepsilon(r)$ 满足一个二次方程, 其中各项系数含有 m, r 和 S. 由于这个方程含有自旋的线性组合, 所以可以认为 $\varepsilon(r)$ 和 $h(r)$ 是自旋 S 的线性函数. 这就是说, 圆轨道半径依赖于自旋 $\boldsymbol{S}$ 的取向 (图 10-3). 这一取向通常以轨道角动量矢量为标准方向. 轨道角动量矢量在轨道面法线上的投影即为守恒面积 h. 图中表明 r 和 h 间的关系, 是由方程的数值解画出的. 由图 10-3 可见, 当试验粒子自旋沿轨道角动量正方向取向 (即正向绕行) 时的轨道比反方向取向 (逆行) 时更靠近场源. 两个反方向取向的试验自旋在作同向绕行时, 稳定轨道半径的差异效应是自旋–轨道相互作用的结果. 这一效应的实验观测要求仪器具有很高的精度. 例如, 用卫星做实验, 需要记录卫星中回转仪的位移.

4. 场源质量对轨道的影响

当 Schwarzschild 场源的质量改变时, 试验物体将会离开稳定轨道. 由于微粒辐

射和波辐射, 太阳和其他恒星的质量会减小, 它们的引力场也会随时间减弱, 中心质量的变化必导致试验物体轨道参量的变化. 若源的质量突然改变 (如由于爆炸), 则本身位于稳定轨道上的试验物体就可能飞到无限远. 在牛顿引力理论中, 飞出的条件是

$$(\Delta m)_N \geqslant \frac{1}{2}(m+\mu). \tag{2.7.8}$$

式中 μ 为试验物体的质量. 在 Schwarzschild 场中, 如果假设 $\dot{r}$ 和 h 不变, $m \gg \mu$, 则试验物体飞出的条件是

$$(\Delta_m)_{GR} \geqslant \frac{m(r-4m)}{2(r-2m)} \approx \frac{m}{2}\left(1-\frac{2m}{r}\right). \tag{2.7.9}$$

可见爱因斯坦理论与牛顿理论预言是不同的, 其差为

效应 23

$$(\Delta m)_{GR} - (\Delta_m)_N \approx -\frac{m^2}{r}. \tag{2.7.10}$$

比较 (2.7.9) 和 (2.7.8) 可以发现, 广义相对论效应偏离牛顿效应是由于在牛顿理论中 (2.7.8) 和径向坐标 r 无关.

当 r 很小时, 即使 $(\Delta_m)_{GR}$ 不很大, 粒子也可能脱离稳定轨道. 当质量源发生吸积过程 (质量增大) 时, 也会出现对应的效应.

2.8 Schwarzschild 场中的进动效应

受引力场的影响, 试验物体的参量可能发生变化. 例如试验自旋引力场中轨道运动时, 受引力场的影响, 它的自旋会改变. 这类效应属于广义相对论效应. 当然上述进动应遵守矢量进动的一般方程

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{A}. \tag{2.8.1}$$

式中 $\boldsymbol{\Omega}$ 是进动角速度. 在某些情况下, 自旋的方向可能改变, 但不发生进动.

引力场中的轨道角动量也会有上述进动效应.

1. Schwarzschild 场中的进动效应

de Sitter(1916) 证明了: 试验自旋在有心力场中作轨道运动时, 应以角速度

效应 24

$$(\boldsymbol{\Omega})_{m,s} = \frac{3m}{2r^3}\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v} \tag{2.8.2}$$

进动, 式中 $\boldsymbol{r}$ 是试验物体惯性中心的矢径, $\boldsymbol{v}$ 是它的轨道运动速度. de Sitter 进动的特点是只和引力源的质量有关, 与试验物体的自旋无关. Schiff(1 960) 根据 Papapetrou 运动方程 (2.2.17)~(2.2.18) 研究了这一效应, 并讨论了用人造卫星上的实验来检验地球引力场中这一效应的可能性. 理论预言 $7'' \cdot \mathrm{a}^{-1}$ 左右的效应.

下面我们较详细地研究一试验自旋沿一半径为 r_0 的闭合轨道自由运动时的短程线运动. 矢量 v^μ 沿曲线的平移由下式给出 (希腊字母取 1, 2, 3, 4,):

$$\frac{\delta v^\mu}{\delta u}=\frac{\mathrm{d}v^\mu}{\mathrm{d}\lambda}+\Gamma^\mu_{\rho\sigma}\frac{\mathrm{d}x^\rho}{\mathrm{d}u}v^\sigma=0. \tag{2.8.3}$$

我们把“起始点” $P_0(u=u_0)$ 处的矢量记作 $v^{\mu 0}$, 把上式的解 v^μ 写成

$$v^\mu=\tilde{g}^\mu_{\sigma 0}v^{\mu 0}. \tag{2.8.4}$$

式中脚标 O 不表示坐标分量, 而表示 P_0 处的值; $\tilde{g}^\mu_{\sigma 0}$ 为平移传播函数. 注意矢量 $v^{\mu 0}$ 在 P_0 点可以任意选择, 将 (2.8.4) 代入 (2.8.3), 得到 $\tilde{g}^\mu_{\sigma 0}$ 满足的方程

$$\frac{\delta g^\mu_{\sigma 0}}{\delta u}=\frac{\mathrm{d}\tilde{g}^\mu_{\sigma 0}}{\mathrm{d}u}+\Gamma^\mu_{\rho\tau}\frac{\mathrm{d}x^\rho}{\mathrm{d}u}\tilde{g}^\tau_{\sigma 0}=0. \tag{2.8.5}$$

按照此所取的号差, Schwarzschild 度规具有形式

$$\mathrm{d}s^2=\left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2+r^2(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2)-\left(1-\frac{2m}{r}\right)\mathrm{d}t^2. \tag{2.8.6}$$

位于赤道平面内具有一个仿射参量 λ 的闭合轨道方程可以写为

$$r=r_0,\quad \theta=\frac{\pi}{2},\quad \varphi=\frac{u}{\alpha r_0^2},$$

$$t=\frac{\beta u}{1-2m/r_0},\quad \alpha^2\beta^2=\frac{1}{mr_0}\left(1-\frac{2m}{r_0}\right)^2, \tag{2.8.7}$$

其中 α 和 β 是初始状态参量, 当 $r_0>3m$ 时轨道是类时的. 由 (2.8.6) 和 (2.8.7), 可将平移传播函数的方程 (2.8.5) 改写为

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{g}^1_{\sigma 0}}{\mathrm{d}u}+\frac{1}{ar_0^2}\Gamma^1_{33}\tilde{g}^3_{\sigma 0}+\frac{\beta}{1-2m/r_0}\Gamma^1_{44}\tilde{g}^4_{\sigma 0}=0 \tag{2.8.8}$$

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{g}^2_{\sigma 0}}{\mathrm{d}u}=0, \tag{2.8.9}$$

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{g}^3_{\sigma 0}}{\mathrm{d}u}+\frac{1}{ar_0^2}\Gamma^3_{31}\tilde{g}^1_{\sigma 0}=0, \tag{2.8.10}$$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{g}^4_{\sigma 0}}{\mathrm{d}u}+\frac{\beta}{1-2m/r_0}\Gamma^4_{41}\tilde{g}^1_{\sigma 0}=0, \tag{2.8.11}$$

式中 $x'=r, x^2=\theta, x^3=\varphi, x^4=t$. 为了解方程 (2.8.8)~(2.8.11), 微分 (2.8.8), 并代入 (2.8.10) 和 (2.8.11), 得到

$$\frac{\mathrm{d}^2\tilde{g}^1_{\sigma 0}}{\mathrm{d}u^2}+\gamma^2\tilde{g}^1_{\sigma 0}=0. \tag{2.8.12}$$

式中

$$\gamma \equiv \left(1 - \frac{3m}{r_0}\right) / a^2 r_0^4.$$

方程 (2.8.12) 的通解为

$$\tilde{g}^1_{\sigma 0} = A_{\sigma 0} \mathrm{e}^{\mathrm{i} r u} + B_{\sigma 0} \mathrm{e}^{-\mathrm{i} r u}, \tag{2.8.13}$$

矢量 $A_{\sigma 0}$ 和 $B_{\sigma 0}$ 由初始条件确定

$$\lim_{U \to 0} \tilde{g}^1_{\sigma 0} = \delta^1_\sigma, \tag{2.8.14}$$

$$\lim_{U \to 0} \frac{\mathrm{d}\tilde{g}^1_{\sigma 0}}{\mathrm{d}u} = -\left(\frac{1}{a r_0^2} \Gamma^1_{33} \tilde{g}^3_{\sigma 0} + \frac{\beta}{1 - 2m/r_0} \Gamma^1_{44} \tilde{g}^4_{\sigma 0}\right)_{u=0}. \tag{2.8.15}$$

将求得的 $\tilde{g}^1_{\sigma 0}$ 代入 (2.8.10) 和 (2.8.11), 便可求出 $\tilde{g}^3_{\sigma 0}$ 和 $\tilde{g}_{00}$. 这样, 我们得到沿类时闭合轨道的平移传播函数的表达式

$$\tilde{g}^\mu_{\sigma 0} = \begin{bmatrix} \cos\gamma u & 0 & \dfrac{r_0(1-2a)}{(1-3a)^{1/2}} \sin\gamma u & -\dfrac{(1-2a)\sqrt{a}}{(1-3a)^{1/2}} \sin\gamma u \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\dfrac{\sin\gamma u}{r_0(1-3a)^{1/2}} & 0 & 1 - \dfrac{2(1-2a)}{1-3a} \sin^2 \dfrac{\gamma u}{2} & \dfrac{2(1-2a)\sqrt{a}}{r_0(1-3a)} \sin^2 \dfrac{\gamma u}{2} \\ -\dfrac{\sqrt{a} \sin\gamma u}{(1-2a)(1-3a)^{1/2}} & 0 & -\dfrac{2 r_0 \sqrt{a}}{1-3a} \sin^2 \dfrac{\gamma u}{2} & 1 + \dfrac{2a}{1-3a} \sin^2 \dfrac{\gamma u}{2} \end{bmatrix} \tag{2.8.16}$$

式中 $a = m/r_0$. 上式也可以应用到类空轨道和类零轨道, 只要分别取 r_0 满足条件 $2m < r_0 < 3m$ 和 $r_0 \to 3$ 即可.

现在我们应用上述传播函数研究 Schwarzschild 场中一个试验自旋的行为. 设自旋 $\boldsymbol{S}$ 沿闭合轨道做自由运动. 在 (2.8.6) 和 (2.8.7) 中, 取仿射参量 $u = \tau$(固有时), 则可求得 α 和 β

$$a = \frac{1}{r_0} \left(\frac{r_0}{m}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{3m}{r_0}\right)^{1/2}, \quad \beta = \frac{1 - 2m/r_0}{(1 - 3m/r_0)^{1/2}}. \tag{2.8.17}$$

我们引入随动系 $\{\boldsymbol{e}_i\}$ 和对应的基 $\{\boldsymbol{\omega}^i\}$

$$\boldsymbol{e}_{\hat{i}} = h^i_k \boldsymbol{e}_k, \quad \boldsymbol{\omega}^{\hat{i}} = t^i_k \boldsymbol{\omega}^k. \tag{2.8.18}$$

式中 $\{\boldsymbol{e}_k\}$ 即 $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right\}$, $\{\boldsymbol{\omega}_k\}$ 即对应的基矢量系 $\{\mathrm{d}x^i\}$. 这些变换矩阵为

$$(h_i^k) = \begin{bmatrix} (1-2a)^{1/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_0^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{(1-2a)^{1/2}}{r_0(1-3a)^{1/2}} & \dfrac{\sqrt{a}}{[(1-2a)(1-3a)]^{1/2}} \\ 0 & 0 & \dfrac{\sqrt{a}}{r_0(1-3a)^{1/2}} & \dfrac{1}{(1-3a)^{1/2}} \end{bmatrix}, \tag{2.8.19}$$

$$(t_k^i) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{(1-2a)^{1/2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{r_0(1-2a)^{1/2}}{(1-3a)^{1/2}} & -\dfrac{\sqrt{a}(1-2a)^{1/2}}{(1-3a)^{1/2}} \\ 0 & 0 & -\dfrac{r_0\sqrt{a}}{(1-3a)^{1/2}} & \dfrac{1-2a}{(1-3a)^{1/2}} \end{bmatrix}. \tag{2.8.20}$$

由基矢量系 $\{\boldsymbol{e}_i\}$ 变换到 $\{\boldsymbol{e}_{\hat{i}}\}$, 我们可以计算平移传播函数 $\tilde{g}^{\hat{u}}_{\hat{\sigma}0}$. 在随动标架中有 $\tilde{g}^{\hat{u}}_{\hat{\sigma}0} = t^{\mu}_{k} h^{l0}_{\sigma 0} \tilde{g}^{k}_{l0}$, 即

$$(\tilde{g}^{\hat{u}}_{\hat{\sigma}0}) = \begin{bmatrix} \cos\gamma u & 0 & \sin\gamma u & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\gamma u & 0 & \cos\gamma u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.8.21}$$

由于试验自旋 $\boldsymbol{S}$ 保持与速度矢量 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}$ 垂直, 即 $S_\mu \dfrac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}u} = 0$, 故有

$$S^4 = \frac{r_0(m/r_0)^{1/2}}{1-2m/r_0} S^3. \tag{2.8.22}$$

自旋 $S^{\hat{\mu}}$(在随动系中) 可类似地由 $S^{\hat{\mu}} = t^{\mu}_{\sigma} S^{\sigma}$ 得到, 这时由 (2.8.22) 可得 $S^{\hat{4}} = 0$. 令 $S^{\hat{i}0}(i = 1, 2, 3)$ 表示 P_0 处的自旋, 平移至闭合轨道上的任一点 P 时表示为 $S^{\hat{i}}$. 当 $u = u_p = 2\pi r_0 (r_0/m)^{1/2}(1-3m/r_0)^{1/2}$ 时, $\boldsymbol{S}$ 沿这轨道回到开始的空间点 P_0, 我们可以将 $\boldsymbol{S}$ 沿时间轴 x^4 平行移动一周, 确定 $S^{\hat{\alpha}}$ 和 $S^{\hat{\alpha}0}$ 的标量积, 从而确定它们之间的夹角.

由 (2.8.21) 可看出, 自旋矢量 $S^{\hat{i}}$ 环绕着基矢量 $\boldsymbol{e}_{\hat{2}}$ 旋转. 因此, 为了寻求自旋的渐近进动频率 Ω, 可以令 $S^{\hat{2}0} = 0$. 这时我们得到 $S^{\hat{i}0}$ 和 $S^{\hat{i}}$ 间的夹角:

$$\cos\delta = \frac{S^{\hat{i}0} S^{\hat{i}}}{|S^{\hat{i}0}||S^{\hat{i}}|} = \cos\gamma u_p. \tag{2.8.23}$$

式中 $S^{\hat{i}} = \tilde{g}^{\hat{i}}_{\hat{j}0} S^{\hat{i}0}, g_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \eta_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$. 在随动系中, 由于 $\gamma u_p = 2\pi(1-3m/r_0)^{1/2}$, 故可得到

$$\delta = \pm 2\pi \left(1 - \frac{3m}{r_0}\right)^{1/2} + 2n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{2.8.24}$$

另外, 当 $\delta \to 0$ 时, 对应于 $3m/r_0 \to 0$; 而 $\delta > 0$, 所以有

$$\delta = 2\pi \left[1 - \left(1 - \frac{3m}{r_0}\right)^{1/2}\right]. \tag{2.8.25}$$

由此, 我们得到渐近进动频率

效应 25

$$(\boldsymbol{\Omega})_m = |\boldsymbol{\Omega}| = \frac{\delta}{u_p} = \frac{1}{r_0}\left(\frac{m}{r_0}\right)^{1/2} \times \left[\left(1 - \frac{3m}{r_0}\right)^{-1/2} - 1\right]. \tag{2.8.26}$$

如果采用坐标时 $t = u/\sqrt{1 - 3m/r_0}$, 上式的最低阶近似为 $|\boldsymbol{\Omega}| = \dfrac{3}{2}(m/r_0^2)\sqrt{\dfrac{m}{r_0}}$, 这结果与 Schiff(1960) 的结果一致.

2. Schwarzschild 场中试验自旋的下落

当试验自旋沿径向运动时, Papapetrou 方程可以简化, 从而可以获得运动方程的准确解. 将 Schwarzschild 度规代入, 得到

效应 26

$$|\boldsymbol{S}|^2 = \gamma_{ij} S^i S^j = [(S_{\infty}^{1\ 2})^2 + (S_{\infty}^{1\ 3})^2] \times \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} + (S_{\infty}^{2\ 3})^2, \tag{2.8.27}$$

$$\cos(\boldsymbol{S}, \mathrm{d}\boldsymbol{x}^1) = \frac{S_{\infty}^{2\ 3}}{S},$$

$$\cos(\boldsymbol{S}, \mathrm{d}\boldsymbol{x}^2) = S_{\infty}^{1\ 3}/S\sqrt{1 - \frac{2m}{r}}, \tag{2.8.28}$$

$$\cos(\boldsymbol{S}, \mathrm{d}\boldsymbol{x}^3) = S_{\infty}^{2\ 1}/S\sqrt{1 - \frac{2m}{r}}. \tag{2.8.29}$$

式中 $S_{\infty}^{i\ j}$ 是 S^{ij} 在空间无限远处的值. 可见仅当自旋沿径向时 $(S_{\infty}^{1\ 2} = S_{\infty}^{1\ 3} = 0)$, 它的大小才不发生变化. 在一般情况下, 当 $r \to 2m$ 时 $S \to \infty$. 由 (2.8.28) 可以看出, 试验自旋 $\boldsymbol{S}$ 力图转向由 $\boldsymbol{S}_{\infty}$ 和运动方向确定的平面 ($\boldsymbol{S}_{\infty}$ 始终和运动方向垂直). 如果 $(S^{23})_0 = 0, (S^{12})_0^2 + (S^{13})_0^2 \neq 0$, 则沿径向运动时矢量 $\boldsymbol{S}$ 的大小和取向都不变.

3. 不均匀旋转效应

如果所研究的物体具有有限大小, 则在 Schwarzschild 场中做轨道运动时会发生不均匀旋转. 由 Papapetrou 方程得到摆动角速度

$$\boldsymbol{\omega} = -\frac{2m}{r^3}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}) + \omega_0. \tag{2.8.30}$$

式中 v 是轨道运动速度. 对于赤道运动 $\omega_z = -2mh/r^3$. 应用 (2.1.1), 当 φ 由 $-\pi/2$ 到 $+\pi/2$ 变化时, 我们得到由于摆动产生的转动角

效应 27

$$(\Delta\varphi)_m = -\frac{6m}{p}e. \tag{2.8.31}$$

对于地球在太阳引力场中的运动, 已观察到地球转动角速度随季节的变化. 但是效应 (2.8.31) 是观测值的一部分.

下面研究 R-N 场中的轨道效应.

2.9 引力电荷对近日点移动的贡献

1. 中性粒子在 R-N 场中轨道近日点的移动

按照 2.1 节中的程序, 将 R-N 度规 [第三篇 (1.3.9)] 代入, 得到

$$F_{m,k}(u) = \frac{\varepsilon^2 - 1}{h^2} + \frac{2m}{h^2}u - \left(1 - \frac{k}{h^2}\right)u^2 + 2mu^3 - ku^4. \tag{2.9.1}$$

式中 $k \equiv e^2$, e 为电荷, 对应的轨道微分方程的解已由 Armenti(1977) 给出. 由方程组 (2.1.6) 得到常数 ε, h 和 C 的准确值

$$\begin{aligned}\varepsilon^2 =& \left\{\left(1 - \frac{2m}{p} + \frac{k}{p^2}\right)^2 + e^2\left[\frac{2k}{p^2} + \frac{4mk}{p^3} - \frac{4m^2}{p^2}\right.\right.\\ &\left.\left. - \frac{k^2}{p^4}(2 - e^2)\right]\right\} \times \left\{1 - \frac{m}{p}(3 + e^2) + \frac{2k}{p^2}(1 + e^2)\right\}^{-1},\end{aligned} \tag{2.9.2}$$

$$h^2 = (mp - k)\left\{1 - \frac{m}{p}(3 + e^2) + \frac{2k}{p^2}(1 + e^2)\right\}^{-1},$$

$$C = 1 - \frac{2m}{p}(3 + e\cos\psi) + \frac{k}{h^2} + \frac{2k}{p^2}(3 + 2e\cos\psi) + \frac{ke^2}{p^2}(1 + \cos^2\psi). \tag{2.9.3}$$

代入 (2.1.8) 积分, 得到

效应 28

$$\left(\frac{\Delta\alpha}{2\pi}\right)_k = -\frac{k}{2mp} - \frac{6k}{p^2} - \frac{ke^2}{4p^2}. \tag{2.9.4}$$

将上式与 (2.6.1) 比较, 可以发现二者一致, 即在非短程线运动的情况下试验质量所带电荷 k 的引力作用与在短程线运动的情况下源电荷 k 对中性试验粒子的引力作用一致.

2. 异号试验电荷在 R-N 场中的分离

在 R-N 场中, 可以证明试验电荷 $\tilde{e}$ 的轨道微分方程也具有 (2.1.4) 的形式 (Jaffe, 1922), 其中

$$F_{k,\tilde{e}}(u)=\frac{\varepsilon^2-1}{h^2}+\frac{2(m-A\varepsilon)}{h^2}u-\left(1+\frac{k-A^2}{h^2}\right)\times u^2+2mu^3-ku^4. \tag{2.9.5}$$

式中 $A\equiv\pm Q\tilde{e}/\mu c^2$, 当中心引力体的电荷和试验电荷同号时取正号, 异号时取负号. 由 (2.9.5) 和 (2.1.5) 得到

$$C=1+\frac{k-A^2}{h^2}-\frac{2m}{p}(3+e\cos\psi)+\frac{2k}{p^2}(3+2e\cos\psi)+\frac{ke^2}{p^2}(1+\cos^2\psi) \tag{2.9.6}$$

由此得到实验电荷轨道近日点的移动

效应 29

$$\left(\frac{\Delta\alpha}{2\pi}\right)_{k,\tilde{e}}=\mp\frac{Q\tilde{e}}{\mu MG}\left(\frac{k}{2mp}\mp\frac{Q\tilde{e}}{2p\mu c^2}-\frac{11k}{4p^2}\right). \tag{2.9.7}$$

Jaffe 将 h 的表达式代入 (2.1.8), 算得了上式中的前两项 (导出上式时假定 $A\sim m$). 在较大范围内改变试验物体的参量, 可以增大 (2.9.7) 的值. 效应 (2.9.7), (2.6.1) 和 (2.9.4) 的共同作用可导致轨道近日点 $-2''.26/$ 百年的附加移动. 用现代技术显示效应 (2.9.7) 原则上是可能的. 另一方面, 由斯塔克效应确的水星和太阳的电量代人此式, 得到对轨道近日点移动的贡献为 $\sim 0.1''/$ 百年 (Smith, 1977).

根据 (2.9.7) 对异号电荷的区别, 可以测量异号电荷极化角之差, 来验证这一效应.

3. 引力电荷对试验自旋的影响

设一试验粒子具有自旋 $\boldsymbol{S}$, 在 R-N 场中运动. 将 R-N 度规代入 Papapetrou 运动方程, 得到

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2=F(u),$$

$$\begin{aligned}F_{k,s}(u)=&\frac{\varepsilon^2-1}{h^2}\left(1\pm\frac{2S\varepsilon}{h}\right)+\frac{2m}{h^2}\left(1\pm\frac{2S\varepsilon}{h}\right)u\\&-\left\{1+\frac{k}{h^2}\left(1+\frac{2S\varepsilon}{h}\right)\right\}u^2+2m\left(1\mp\frac{S\varepsilon}{h}\right)u^3\\&-k\left(1\mp\frac{2S\varepsilon}{h}\right)u^4,\end{aligned} \tag{2.9.8}$$

经过近似积分之后, 我们求得轨道近日点的附加进动

效应 30

$$\left(\frac{\Delta\alpha}{2\pi}\right)_{k,s} = \pm\frac{15kS}{2p^2\sqrt{mp}}. \tag{2.9.9}$$

上面诸式中正负号的取法与效应 19 中的相同. 由此可知, 两个反向自旋 (对应于上式中不同符号) 将发生分离. 但是这里和 Schwarzschild 场中的情况 (2.6.11) 不同. 比较可以发现, 从效应的正或负考虑, 引力电荷 k 和引力质量 m 的效应是相反的. 即对于非短程线运动, 参量 k 仍然力图抵消总反常中 m 的贡献.

2.10 引力电荷场中的圆轨道

由 R-N 度规和 (2.1.6) 得到

$$\varepsilon = \left(1-\frac{2m}{r}+\frac{k}{r^2}\right)\left(1-\frac{3m}{r}+\frac{2k}{r^2}\right)^{-1/2},$$

$$h = \sqrt{mr-k}\left(1-\frac{3m}{r}+\frac{2k}{r^2}\right)^{-1/2} \tag{2.10.1}$$

限制条件 (2.7.1) 要求

$$r^2-2mr+2k \geqslant 0, \quad mr-k \geqslant 0,$$

从而有

$$r \geqslant \frac{3m}{2}\left(1+\sqrt{1-\frac{8k}{9m^2}}\right). \tag{2.10.2}$$

此式表明, 无论引力电荷取何值, 都使中性试验粒子的圆轨道半径减小. 稳定性条件 (2.7.2) 要求

$$r^3-6mr^2+9kr-\frac{4k^2}{m} \geqslant 0, \tag{2.10.3}$$

考虑到 $k \ll m^2$ 得到

效应 31

$$r \geqslant 6m\left(1-\frac{k}{4m^2}\right). \tag{2.10.4}$$

下面讨论 de Sitter 场 (含宇宙项的球对称场) 中的轨道效应.

2.11 宇宙因子对轨道近日点移动的影响

1. 中性试验粒子的轨道

由含宇宙项的球对称度规 [第三篇 (1.2.13)], 得到

$$F_{m,\lambda}(u) = \frac{\varepsilon^2-1}{h^2}+\frac{\lambda}{3}+\frac{2m}{h^2}u-u^2+2mu^3+\frac{\lambda}{3h^2u^2}. \tag{2.11.1}$$

解相应的方程组, 得到

$$\varepsilon^2 = \left[\left(1-\frac{2m}{p}-\frac{\lambda p^2}{3}\right)^2 - 2\lambda p^2 e^2\left(1-\frac{10m}{p}\right)\right]\times\left\{1-\frac{m}{p}(3+e^3)\right\}^{-1},$$

$$h^2 = \left[mp-\frac{\lambda}{3}p^4(1+2e^2)\right]\left[1-\frac{m}{p}(3+e^2)\right]^{-1}, \tag{2.11.2}$$

$$C = 1-\frac{2m}{p}(3+e\cos\psi)-\frac{\lambda p^4}{3h^2}(3-4e\cos\psi+5e^2+5e^2\cos^2\psi). \tag{2.11.3}$$

代入 (2.1.8), 积分得到近似式

效应 32

$$\left(\frac{\Delta\alpha}{2\pi}\right)_\lambda = \mp\frac{\lambda p^3}{2m}\left(1+\frac{6m}{p}\right)+\frac{\lambda p^3}{2m}\left(\frac{5}{2}+12\frac{m}{p}\right)e^2. \tag{2.11.4}$$

2. 试验自旋的轨道

设自旋垂直于轨道平面. 将含宇宙项的度规 [第一篇 (1.2.13)] 代入 Papapetrou 方程 ($q=0$), 第一次积分给出

$$F_{\lambda,s}(u) = \left(\frac{\varepsilon^3-1}{h^2}+\frac{2m}{h^2}u\right)\left(1\mp\frac{2S\varepsilon}{h}\right)+\frac{\lambda}{3h^2}u^{-2}\times\left(1\pm\frac{2S\varepsilon}{h}\right)$$
$$-u^2+2m\left(1\mp\frac{2S\varepsilon}{h}\right)u^3+\frac{\lambda}{3}\pm\frac{2\lambda S\varepsilon}{3h}, \tag{2.11.5}$$

近似积分, 得到

效应 33

$$\left(\frac{\Delta\alpha}{2\pi}\right)_{\lambda,S} = \pm\frac{7\lambda S p^2}{2\sqrt{mp}}. \tag{2.11.6}$$

由于此效应和自旋的取向有关, 所以不同取向的两个自旋的轨道也会分离.

2.12 宇宙因子对圆轨道半径的限制

由含宇宙项的 de Sitter 度规和轨道微分方程, 对于圆轨道可以求出 ε 和 h 的准确表达式:

$$\varepsilon = \left(1-\frac{2m}{r}-\frac{\lambda}{3}r^2\right)\left(1-\frac{3m}{r}\right)^{-1/2},$$

$$h = \sqrt{mr-\frac{\lambda}{3}r^4}\left(1-\frac{3m}{r}\right)^{-1/2}. \tag{2.12.1}$$

代入条件 (2.7.1), 得到

$$r \geqslant 3m, \quad r \leqslant \left(\frac{3m}{\lambda}\right)^{1/3} \tag{2.12.2}$$

代入稳定性条件, 得到

$$r^4 - \frac{15}{4}mr^3 - \frac{3}{4}\frac{mr}{\lambda} + \frac{9m^2}{2\lambda} = 0. \tag{2.12.3}$$

如果限于 $9m^2\lambda < 1$ 的情况, 则由上面方程的近似解可知, 当 $r > r_0$ 的轨道是稳定的, 其中 r_0 为

效应 34

$$r_0 = \frac{32m}{9} + 4m\sqrt{p}\cos\frac{\pi+\beta}{3}. \tag{2.12.4}$$

式中 β 是依赖于 λ 和 m 的常量. 当 $m < r < r_0$, 不存在稳定的圆轨道. 可以证明, 稳定圆轨道的半径还存在一个上限. 这就是说, 在含宇宙项的球对称场中, 仅在一个确定的范围内, 圆轨道才是稳定的.

下面讨论 Kerr 场中的轨道效应.

2.13 Kerr 场中轨道近日点的移动

1. 中性试验粒子的轨道

由 Kerr 度规 [第一篇 (1.14.12)] 可算出 (2.1.4) 的表达式

$$F_{m,a}(u) = \frac{\varepsilon^2-1}{h^2} + \frac{2m}{h^2}\left[1 - \frac{2a\varepsilon}{h}(\varepsilon^2-1)\right]u - \left[1 + \frac{8m^2a}{h^3}\varepsilon^3\right]u^2$$
$$+ 2m\left[1 - \frac{8m^2a}{h^3}\varepsilon - \frac{8m^3a}{h^4}\varepsilon \times (\varepsilon^2-1)\right]u^3. \tag{2.13.1}$$

由 (2.1.5) 求出

$$C = 1 + \frac{8am^2}{h^3}\varepsilon^3 - 2m\left[1 - \frac{8am^3}{h^3}\varepsilon - \frac{8am^3}{h^4}\varepsilon(\varepsilon^2-1)\right] \times \frac{3+e\cos\psi}{p}. \tag{2.13.2}$$

积分 (2.1.7a), 得到旋转质量引起的试验粒子轨道近日点移动效应:

效应 35

$$\left(\frac{\Delta\alpha}{2\pi}\right)_a = -\frac{4a\sqrt{m}}{p\sqrt{p}}\left(1 + \frac{9m}{p}\right). \tag{2.13.3}$$

由上式可见, 当粒子绕行方向与场源旋转方向相反时, 修正量 (2.13.3) 使爱因斯坦效应 (2.4.4) 增大, 反向绕行时使之减小.

Lense 和 Thirring 发现, 克尔场中轨道近日点的移动和轨道平面取向有关 (相对于赤道平面). 设轨道面对赤道面的倾角为 i, 可以用因子 $\cos i$ 来表示上述依赖关系:

效应 36

$$\left(\frac{\Delta\alpha}{2\pi}\right)=-\frac{4a\sqrt{m}}{p\sqrt{p}}\cos i. \tag{2.13.4}$$

分别以太阳和地球为场源, 由数值

$$a_{\odot}=1.26m_{\odot},\quad a_{地}=330\text{cm},$$

可知效应 (2.13.3) 的量级分别为 10^{-8} 和 10^{-11}, 即约为 Schwarzschild 场中的百分之几.

在人造卫星的运动中, 目前测量的精度可以显示出效应 (2.13.3)(考虑到非引力扰动的修正之后). 根据计算估计, 这一效应可能相当明显.

2. 试验自旋的轨道

试验自旋在克尔场中运动时, 考虑到中心质量在旋转, 试验自旋轨道近日点的移动应依赖于自旋–轨道耦合以及 $\boldsymbol{S}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的相互作用.

我们讨论自旋垂直于赤道平面的情况. 此时由克尔度规得到

$$\begin{aligned}F_{a,S}(u)=&\frac{\varepsilon^2-1}{h^2}\left(1\pm\frac{2S\varepsilon}{h}\right)+\frac{2m}{h^2}\left[1\pm\frac{2S\varepsilon}{h}+\frac{2a\varepsilon}{h}(\varepsilon^2-1)\right.\\&\left.\pm\frac{6aS\varepsilon^2}{h^2}(\varepsilon^2-1)\right]u-\left[1-\frac{8am^2\varepsilon^2}{h^3}\pm\frac{24a}{h^4}m^2S\varepsilon^4\right]u^2\\&+2m\left[1\mp\frac{S\varepsilon}{h}\pm\frac{aS}{h^2}(1-2\varepsilon^2)+\frac{8am^2\varepsilon}{h^3}\pm\frac{24a}{h^4}m^2S\varepsilon^2\right]u^3.\end{aligned} \tag{2.13.5}$$

只保留 aS 的一阶项, 对轨道微分方程作近似积分, 我们得到

效应 37

$$\left(\frac{\Delta\alpha}{2\pi}\right)_{a,S}=\mp\frac{27aS}{p^2}. \tag{2.13.6}$$

取 $\boldsymbol{a}$ 的方向沿 $\theta=0$, 当自旋 $\boldsymbol{S}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向且 $\boldsymbol{a}$ 与轨道角动量同向时 (顺行), 上两式均取上面的符号, 当 $\boldsymbol{S}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向, 或者 $\boldsymbol{S}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向而粒子逆行时取下面的符号.

2.14 Kerr 场对轨道的限制

1. 圆轨道和绕行方向的关系

一个中性无自旋试验粒子, 在克尔场中赤道面上运动. 关于这一粒子的圆轨道

的存在和稳定性问题, 首先由 Ruffini 和 Wiler(1971) 研究. 轨道半径满足方程

效应 38

$$[r^3+a^2(r+2m)]\varepsilon^2-4amh\varepsilon \\ +[(2m-r)h^2-r^2(r-2m)-a^2r]=0. \tag{2.14.1}$$

可以看出, 方程的解和引力源的旋转方向有关, 因此也就依赖于试验粒子沿圆轨道的运行方向 (绕行). 图 10-4 中描述了这种依赖性. 由图可以看出, 相对于源质量的旋转方向, 正向绕行的粒子比反向绕行的粒子具有更小的轨道半径. 按 Ruffini 和 Wiler 的估算, 在极端克尔场 ($a=m$) 中, 正向绕行粒子的轨道半径直至 $r_+=m$ 都是稳定的, 而反向绕行粒子的轨道半径只能到 $r_-=9m$. 因此, 绕行方向相反的两个粒子的轨道会分开.

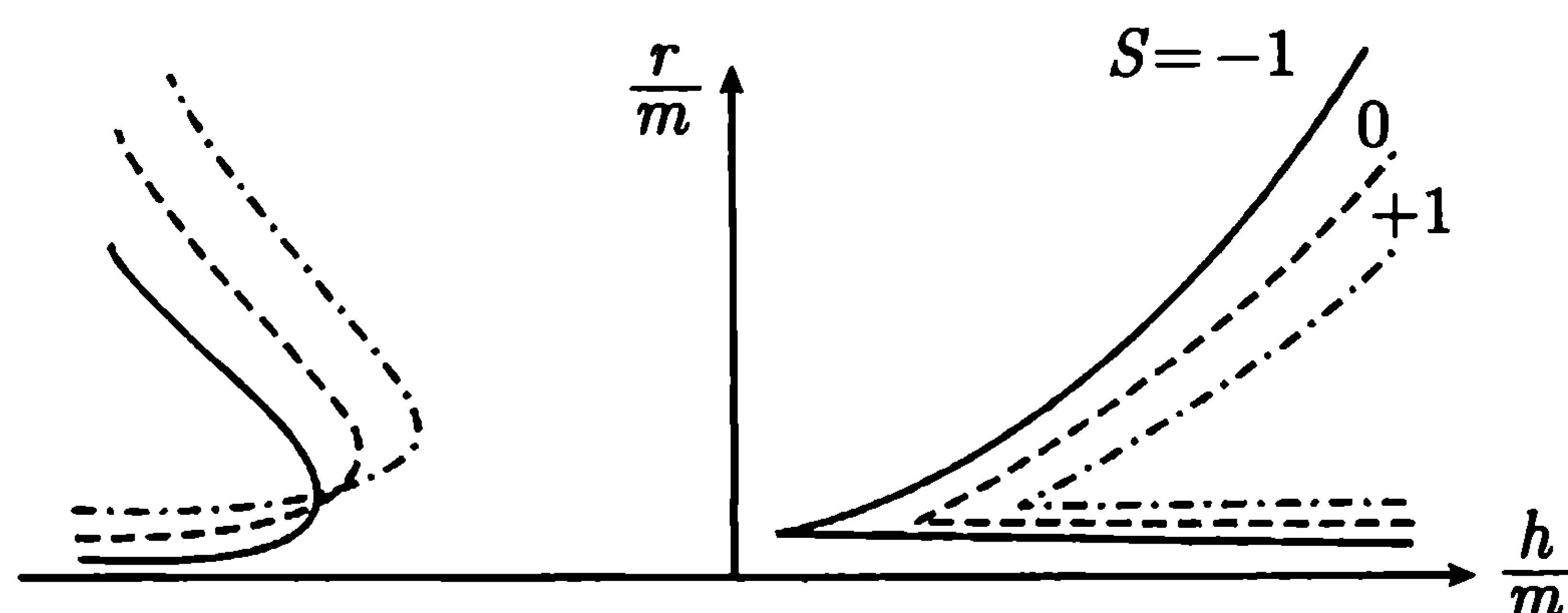


图 10-4

2. 不同倾角的圆轨道

由于旋转质量具有辐射对称性, 研究轨道按角 θ 的分布是有意义的. 人们称函数 $\varepsilon=\varepsilon(\theta)$ 为 θ 势. Johnson 和 Ruffini 证明这个势满足方程

$$B=K-(h-a\varepsilon)^2=\cos^2\theta[a^2(1-\varepsilon^2)+h^2\sin^{-2}\theta], \tag{2.14.2}$$

式中 K 是表征角动量的参数. 由此得角度 θ 对场和轨道参量的依赖关系:

效应 39

$$\sin^2\theta_{1,2}=\frac{1}{2}\left[1-\frac{B+h^2}{a^2(1-\varepsilon^2)}\right] \\ \times\left\{1\pm\left[1+\frac{4h^2a^2(1-\varepsilon^2)}{[a^2(1-\varepsilon^2)-(B+h^2)]^2}\right]^{1/2}\right\}. \tag{2.14.3}$$

由此可见, 不在赤道面上的轨道只在 (2.14.3) 决定的角度上才可能倾向于赤道. 当 $h=0$ 时, 由上式得到

效应 40

$$\sin^2\theta_{1,2}=\frac{1}{2}(1\pm1)\left[1-\frac{B}{a^2(1-\varepsilon^2)}\right]. \tag{2.14.4}$$

如果 B 是任意的, 则有 $\sin^2\theta_2=\sin^2\theta_-=0$; 如果 $B=a^2(1-\varepsilon^2)$, 则有 $\sin^2\theta_1=\sin^2\theta_2=0$. 就是说, 仅当 $h=0$ 时才有 $\theta=0$.

Johnson 和 Ruffini 又将结果推广至荷电试验物体在 Kerr-Newman 场中进行运动的情况.

3. 试验自旋的圆轨道

效应 41

由于自旋–自旋相互作用, Kerr 场中两个试验自旋的运动有很大差别, 这一差别比效应 38 和效应 22 都要大些. 由图 10-5 可知, 此效应反映了稳定轨道半径和 $\boldsymbol{S}-\boldsymbol{a}$ 相互取向的关系, 两个试验自旋的稳定圆轨道在 Kerr 场中会分离

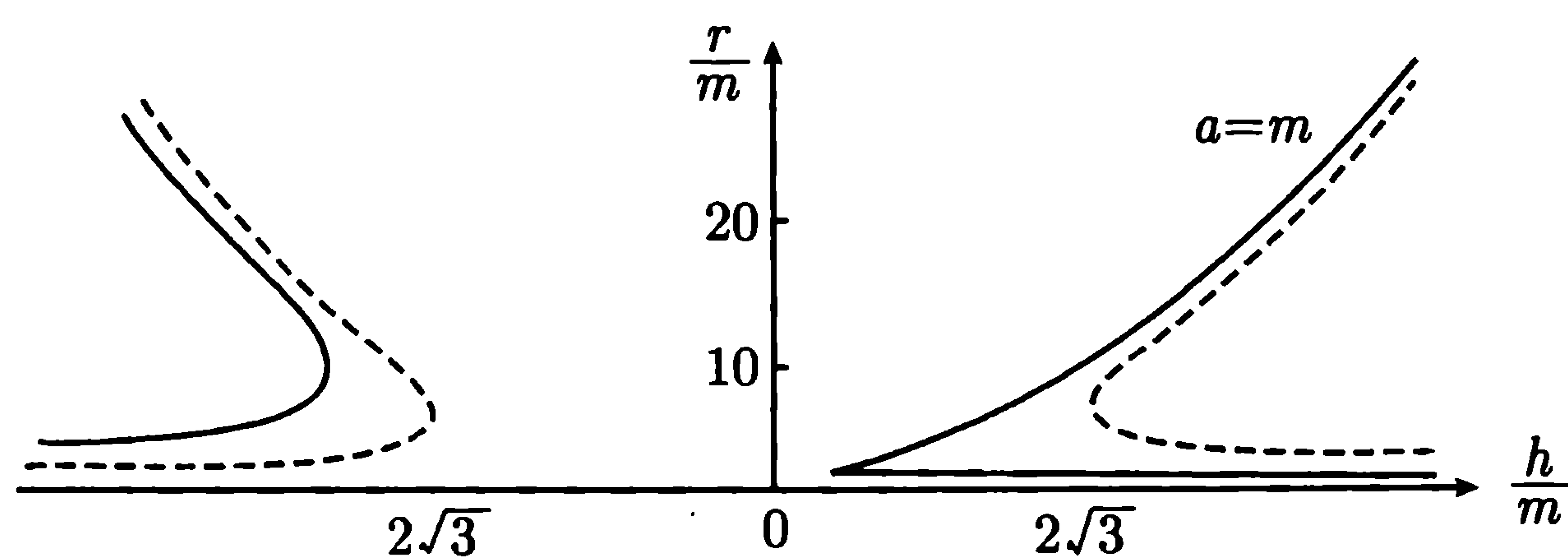


图 10-5

4. 试验物体的运动趋于直线

将 Kerr 度规代入运动方程, 由第一次积分得到

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}=\frac{h(1-2m/r)+2am\varepsilon/r}{r^2+a^2(1-m/r)}. \tag{2.14.5}$$

$\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}=0$ 确定一转变点, 即 φ 由增大变为减小或相反. 这一点为

效应 42

$$r=2m+\frac{2am\varepsilon}{h}. \tag{2.14.6}$$

当试验物体到达这一点时, 趋于 φ 不变, 即趋于沿直线 $\varphi=\text{const}$ 运动. 这一效应只能在黑洞的引力场中出现, 因为 r 已接近引力半径 r_g.

2.15 Kerr 场中的运动效应

1. 试验自旋的进动

Kerr 场中 Papapetrou 方程的自旋部分已由 Schiff(1960) 研究, 并获得了它的解, 从而得到参量 a、S 对进动角速度的贡献:

效应 43

$$(\Omega)_{a,S}=\frac{am}{r^5}[3\boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a})-\boldsymbol{a}r^2], \tag{2.15.1}$$

导出上式时只考虑了 $\boldsymbol{a}$ 的线性项. 这一效应称为 Schiff 进动. 如果试验自旋垂直于轨道平面, 则 de Sitter 效应为零, 只有效应 (2.15.1). 在轨道上放置两个自旋方向互

相垂直的陀螺, 可以区分效应 (2.15.1) 和效应 (2.8.2). 在人造地球卫星上测得 Schiff 进动的大小为 $\sim 0.05'' \cdot \mathrm{a}^{-1}$.

2. 轨道角动量的进动

Schwarzschild 场产生试验自旋的进动, Kerr 场除产生试验自旋的进动以外还产生轨道角动量矢量的进动. 根据 (2.8.1), 轨道平面的进动表示式 (近似式) 为

效应 44

$$(\Omega)_a = \frac{2m\boldsymbol{a}}{p\sqrt{mp}}. \tag{2.15.2}$$

这一效应的特点是各向异性. 当轨道平面通过源质量的转动轴时, 这一效应达最大值. 沿赤道平面的轨道无此效应.

上式的导出采用了旋转质量外部度规

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 = &\left(1 - \frac{2m}{r}\right)\mathrm{d}x^{0^2} - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2 \\ &- r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2) - \frac{4ma}{r}\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}x^0. \end{aligned} \tag{2.15.3}$$

此式由 Lense 和 Thirring(1918) 给出. 如果由克尔度规出发, 则可发现 Kerr 场中轨道角动量的进动有一奇异性: 随着试验粒子轨道半径的减小, 进动角速度无限增大. 所以, 当轨道半径较小时, 试验粒子绕行一周, 轨道平面绕源质量自转轴转动很多周.

这一效应还有一个特点, 即只要求源转动, 与源是否荷电无关.

3. VPE 效应

Van Patten 和 Everitt(1976) 证明, 效应 (2.15.2) 可导致试验粒子轨道平面的分离. 效应 (2.15.2) 在极化轨道上达最大值, 而且和试验粒子的绕行方向有关. 我们考虑两个试验粒子, 它们的轨道十分相近, 且都是极化的; 但它们有不同的绕行方向. 设在初始时刻两个粒子的轨道角动量反平行, 然后按 (2.15.2) 沿不同方向绕中心质量的自转轴转动. 这样, 两粒子之间的距离 (严格说是它们的轨道和平面 $z = \text{const}$ 的交点间距离) 也随时间而增大:

效应 45

$$(\Delta\varphi)_a = 2\Omega_a x^0. \tag{2.15.4}$$

借助于人造地球卫星可以测量这一效应. 两颗人造卫星的轨道和赤道平面交点间的距离在飞行半年之后为 13.9km(卫星距地面高度为 800km). 测量精度可达 1%.

下面研究质量四极矩的引力场和引力波场中的轨道效应.

2.16 质量四极矩场中的轨道效应

1. 质量四极矩对近日点移动的贡献

将质量四极矩场的度规代入短程线方程, 按前面的程序得到

$$F(u)=\frac{\varepsilon^2-1}{h^2}+\frac{2m}{h^2}u-u^2+2m\left[1+\frac{m^2\sigma(2\varepsilon^2-1)}{15h^2}\right]u^3+\frac{m^4\sigma(3\varepsilon^2-1)}{3h^2}u^4. \quad (2.16.1)$$

(2.1.6) 的近似解给出

$$\begin{aligned}\varepsilon^2&=1-\frac{m}{p}(1-e^2)+\frac{m^2}{p^2}(1-e^2)^2,\\h^2&=mp\left[1-\frac{m(3+e^2)}{p}\right]^{-1}\left[1+\frac{m^2\sigma^2}{15p^2}(2\varepsilon^2-1)\times(3+e^2)\right.\\&\left.\quad+\frac{2m^3\sigma}{3p^3}(3\varepsilon^2-1)(1+e^2)\right]; \quad (2.16.2)\\C&=1-\frac{3m}{p}\left[1+\frac{m^2\sigma^2}{15h^2}(2\varepsilon^2-1)\right](3+e\cos\psi)\\&\quad-\frac{m^4\sigma}{3h^2p^2}(3\varepsilon^2-1)(6+4e\cos\psi+e^2+e^2\cos^2\psi). \quad (2.16.3)\end{aligned}$$

代入 (2.1.8) 积分, 得到四极矩对近日点移动的贡献:

效应 46

$$\left(\frac{\Delta\alpha}{2\pi}\right)_\sigma=\frac{14m^3\sigma}{5p^3}+\frac{4m^3\sigma}{5p^3}e^2. \quad (2.16.4)$$

在太阳表面附近, 上式中两项分别为 0.898×10^{-5} 和 2.664×10^{-10}; 在地球附近为 1.45×10^{-3} 和 1.412×10^{-11}. 因此, 在地球引力场中运动的物体必须计及此效应.

2. 质量四极矩场中的进动效应

场源的质量四极矩对于试验自旋的进动应有附加的贡献. 对于极化轨道求平均之后, 我们得到

效应 47

$$(\Omega)_{\sigma,s}=-\frac{\sigma m^2}{15r^2}\Omega_{m,S}, \quad (2.16.5)$$

式中参量 σ 和质量四极矩 Q 的关系为 $Q=2m^3\sigma/15$. 当轨道角动量任意取向时, 进动角速度和角 θ 有关. 因此, 效应 (2.16.5) 的大小和进动方向都与倾角有关. 当角 θ 很小时, 此效应减小了 de Sitter 效应; 当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时则增大了 de Sitter 效应. 跟前边讨论的情况相似, 此效应只和自旋的取向有关, 和它的大小无关. 按 Connell 的估计, 效应 (2.16.5) 应该是可以测量的. 使陀螺仪在靠近地球的轨道上运行, 此效应约为 $0.001''\cdot\mathrm{a}^{-1}$.

2.17　引力波场中的轨道效应

1. 平面引力波中轨道近日点的移动

由于引力波影响试验粒子的轨道运动, 因此引力波对轨道近日点的移动应有贡献.

假设在质量 m 的引力场中, 有一平面引力波, 其传播方向与试验粒子的轨道面垂直. 此时引力波产生的附加力为

$$F_r = \frac{1}{2} r\ddot{h}\cos(2\varphi + \alpha_1), \quad F_\varphi = \frac{1}{2} r\ddot{h}\sin(2\varphi + \alpha_1),$$

$$h = \frac{1}{2} h_0 \sin(\omega_g t + \alpha_2). \tag{2.17.1}$$

式中 α_2 是位相, ω_g 是引力波频率, α_1 表示极化. 我们应用运动方程 (2.2.4). 当效应随时间累积时, 对实验验证有利, 因此最好在共振情况下解 (2.17.1). 同步条件为 $\omega_g = \omega_0 \cdot \omega_0$ 是开普勒频率, 它满足 $\omega_0 = \sqrt{m/r_0^3}$. 此时得到的轨道近日点移动为

$$\frac{\Delta\alpha}{2\pi} = \frac{3m}{r_0} + \frac{3r_0 h_0}{8\xi^1}, \tag{2.17.2}$$

式中 $\xi^1 = (r - r_0)/\sin\omega\tau$ 是近日点移动的径向分量. 在这种情况下, 引力波引起的近日点共振移动为

效应 48

$$\left(\frac{\Delta\alpha}{2\pi}\right)_{GV} = \frac{3r_0 h_0}{8\xi^1}. \tag{2.17.3}$$

由上式可见, 当 ξ^1 很小时, 此效应会很大, 甚至比爱因斯坦效应还大. 但是很难准确知道 ξ^1, 所以测量 (2.17.3) 给出的效应仍是困难的.

2. 引力波对轨道参量的影响

如果平面引力波落到引力源和试验物体的系统上, 可以期望试验物体的轨道会发生随时间变化的微弱变化. 我们感兴趣的是引力波和轨道运动发生共振的情况. 对于轨道的摄动, 可以得到 (Rudenko,1975)

$$\ddot{r} + \omega_0^2 r = -\frac{1}{4} r_0 h_0 \omega_g^2 \frac{\omega_g - 4\omega_0}{\omega_g + 2\omega_0} \sin(\Omega t + \Phi).$$

如果粒子在原轨道 r_0 上的绕行频率等于引力波的频率 $(\omega_g = \omega_0)$ 或者 $\omega_g = 3\omega_0$, 则出现共振跃迁, 粒子由圆轨道跃迁到椭圆轨道, 轨道的离心率随时间线性增大. 椭圆轨道的取向取决于引力波的极化和位相. 如果 $\omega_g = 2\omega_0, \Omega = 0$, 则轨道成为螺旋线.

Schwarzschild 场中, 试验粒子轨道的离心率在引力波作用下要发生变化:

效应 49

$$\begin{aligned}\tilde{e} \approx & e - \frac{3}{8}h_0\omega_0 s\cdot\sin(\alpha_2-\alpha_1) + \frac{3}{8}h_0\cos(\alpha_2-\alpha_1)\\ & - \frac{5}{24}h_0\cos(\alpha_1+\alpha_2)\sin\omega_0 s.\end{aligned} \tag{2.17.4}$$

3. 试验自旋在引力波场中的共振进动

设自旋的初始位置为 $(S^{ij})_0$, 在随动坐标系中解 Papapetrou 方程的自旋部分, 得到自旋 S^{ij} 的近似式

$$\begin{aligned}&S^{23} = (S^{23})_0, \quad S^{12} = (S^{12})_0\left(1+\frac{h_{22}}{2}\right),\\ &S^{31} = (S^{31})_0\left(1-\frac{h_{22}}{2}\right).\end{aligned}$$

由上式可见, 原来静止的自旋绕着波的传播方向 (x^1 轴) 进动. 假设试验自旋沿一圆轨道运动, 轨道平面与波的传播方向垂直 (设 $x^1=0$), 则对于单色波共振的情况 ($\omega_g=\omega_0$), 我们得到

效应 50

$$S^{ij} \approx (S^{ij})0 + \frac{v}{c}(S^{ij})_1. \tag{2.17.5}$$

式中 $(S^{ij})_1$ 的各分量为

$$\begin{aligned}&(S^{23})_1 = \frac{h_0}{4}\omega_g t[(S^{12})_0\sin\varphi - (S^{31})_0\cos\varphi],\\ &(S^{31})_1 = \frac{h_0}{4}\omega_g t(S^{23})_0\cos\varphi,\\ &(S^{12})_1 = -\frac{h_0}{4}\omega_g t(S^{23})_0\sin\varphi.\end{aligned} \tag{2.17.6}$$

由此可知, 试验自旋发生共振进动, 其大小与 $h\omega/4$ 成正比且随时间增大.

4. 引力波场中轨道平面的转动

假设试验粒子在平面 (x,y) 内绕源质量运动, 一平面引力波沿 x 轴正方向传播. 可以证明, 轨道平面绕着引力波传播方向转动, 角速度为

效应 51

$$(\omega)_{GV} = \frac{B}{4\omega_g} = \frac{\partial^2 h_{23}}{\partial t^2}\frac{1}{4\omega_g\cos\omega_g t}. \tag{2.17.7}$$

式中 ω_0 为粒子绕行频率. 推导中已设 $\omega_0=\omega_g$, 所以此效应具有共振性质.

第 3 章　引力场中极端相对论粒子和光子的轨道效应

本章研究极端相对论粒子在引力场中的轨道效应, 认为这些粒子以极端相对论速度沿准双曲线运动. 其极限情况 ($v \to c$) 即光子的轨道效应, 包括光线的引力偏转类效应. 对于光线 (电磁信号) 的传播, 一般来说, 要同时研究爱因斯坦引力场方程和广义相对论麦克斯韦方程. 在光线附近, 而且不考虑偏振的情况下, 可以认为电磁信号沿零短程线传播. 这里, 光子的 (各向同性的) 零短程线方程的解和通常粒子的短程线方程的解, 只是积分常数的极限值不同. 所以, 为了求出附加反常, 可以由 (包含极限情况的) 一般短程线方程出发 (Eddington, 1922).

3.1　极端相对论粒子的轨道

为了得到极端相对论粒子的轨道方程, 只需将 (2.1.4) 用瞄准参量 b 和无限远处的初始速度 v_0 表示出来. 结果为

$$\varepsilon = (1-\beta_0^2)^{-1/2}, \quad h = b\beta_0(1-\beta_0)^{-1/2},$$
$$\frac{\varepsilon^2-1}{h^2} = b^{-2}, \quad \beta_0 = \frac{v_0}{c}. \tag{3.1.1}$$

由粒子的准双曲线运动可以计算其轨道与直线的偏离. 由 (2.1.1) 可知, 在坐标系 $(r, \psi = \varphi + \alpha)$ 中, 此方程为双曲线方程. 所以, 轨道的两条渐近线之间的夹角 θ 可写为

$$\theta = f + \alpha_{\max}. \tag{3.1.2}$$

式中 f 为坐标系 (r, ψ) 中双曲线两条渐近线之间的夹角, $\alpha_{\max}$ 是由坐标系 (r, ψ) 变到坐标系 (r, φ) 时转过的角. 由双曲线方程得到

$$f = \arctan\frac{1}{\sqrt{e^2-1}}, \tag{3.1.3}$$

所以有

$$\theta = \arctan\frac{1}{\sqrt{e^2-1}} + \alpha_{\max}. \tag{3.1.4}$$

通常极端相对论粒子通过场源 m 的引力场时, 满足条件

$$m^2/b^2 \ll 1, \quad 1/e^2 \ll 1. \tag{3.1.5}$$

此时, 在 Schwarzschild 场中, 可以得到

$$\begin{aligned}
\varepsilon^2 &= \left(1 - \frac{me}{b}\right)^{-1} = \frac{1}{1-\beta_0^2},\\
h^2 &= mbe\left(1 - \frac{me}{b}\right)^{-1} = \frac{b^2-\beta_0^2}{1-\beta_0^2},\\
\beta^2 &= \frac{v^2}{c^2} = \beta_0^2 + \frac{2m}{r}(1-\beta_0^2),
\end{aligned} \tag{3.1.6}$$

式中

$$\beta_0^2 \equiv \beta^2(m=0, r=\infty) = 1 - \frac{1}{\varepsilon^2} = \frac{me}{b}.$$

在极限情况下 (即对于光子轨道), 由 (3.1.1) 有

$$\begin{aligned}
&\varepsilon(\beta_0 = 1) = \infty,\\
&h(\beta_0 = 1) = \infty,\\
&\frac{h}{\varepsilon} - (\beta_0 = 1) = b.
\end{aligned} \tag{3.1.7}$$

应用 (2.1.7) 和 (3.1.6), 得到元附加反常

$$\mathrm{d}\alpha \approx \left(-\frac{3m}{\varepsilon b} - \frac{m}{b}\cos\varphi\right)\mathrm{d}\psi. \tag{3.1.8}$$

积分上式给出 $\alpha_{\max}$

$$\alpha_{\max} = \int_{\psi 1}^{\psi 2}\left(-\frac{3m}{\varepsilon b} - \frac{m}{b}\cos\varphi\right)\mathrm{d}\psi, \tag{3.1.9}$$

式中 ψ_1 和 ψ_2 是在 (2.1.1) 中令 $r=\infty$ 时 ψ 的两个绝对值较小的根. 将此式代入 (3.1.2), 考虑到 (3.1.6), 得到引力场中极端相对论粒子轨道的偏转效应:

效应 52

$$\begin{gathered}
\theta_m \approx \frac{2m}{b}\left(1 + \frac{1}{\beta_0^2}\right) \approx \frac{4m}{R}\left(1 + \frac{\delta}{2\beta_0^2} + \frac{m}{R\beta_0^2}\right)\cdots,\\
r_0 = r(\varphi = 0) = b\left(1 + \frac{1}{e}\right)^{-1}, \quad b \approx r_0\left(1 + \frac{m}{r_0\beta_0}\right),\\
\theta = 2\varphi_{\max} - \pi.
\end{gathered} \tag{3.1.10}$$

式中 $\delta = 1 - \beta_0^2, r_0$ 是轨道与引力中心的最小距离.

3.2 Schwarzschild 场中的光子轨道效应

1. 光线的爱因斯坦偏转

在 (3.1.10) 中, 取极限 $\beta_0 \to 1$, 得到光线的**爱因斯坦偏转效应**:

效应 53

$$(\theta)_m(\beta_0 = 1) \approx \frac{4m}{r_0}. \tag{3.2.1}$$

这一效应是广义相对论的经典检验之一, 也称为**光线弯曲效应**.

按照前面的程序, (3.2.1) 可以这样得到:

由 Schwarzschild 场中的运动微分方程 (2.4.1) 取极限 $\beta_0 \to 1$. 将 (3.1.6) 代入, 我们得到

$$F_m(u, h \to \infty) = \frac{1}{b^2} - u^2 + 2mu^3. \tag{3.2.2}$$

按 (2.1.6) 和 (2.1.7) 把上式分解为代数方程和常微分方程之后, 保持前面的精确度, 得到

$$p = \frac{b^2}{m}, \quad e = \frac{b}{m} > 1, \tag{3.2.3}$$

$$C(\varepsilon, h \to \infty) = 1 - \frac{2m}{p} e\cos\psi. \tag{3.2.4}$$

作近似积分, 保留 m 的一阶项, 便得到总偏转角的表达式 (3.2.1).

下面采用 PPN 形式, 详细讨论偏转效应, 并给出相应的表达式. 所给出的表达式的意义比 (3.2.1) 更广泛, 除了在特殊情况 ($\gamma = 1$) 下成为 (3.2.1) 以外, 还可以用来比较不同引力理论对此效应的预言.

光子沿零短程线

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^\mu}{\mathrm{d}\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\sigma\tau} \frac{\mathrm{d}x^\sigma}{\mathrm{d}\lambda} \frac{\mathrm{d}x^\tau}{\mathrm{d}\lambda} = 0, \tag{3.2.5}$$

$$g_{\mu\nu} \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda} \frac{\mathrm{d}x^\tau}{\mathrm{d}\lambda} = 0 \tag{3.2.6}$$

运动, 式中 λ 是沿轨道的某一仿射参量. 我们可以用 PPN 坐标时 $t = x^0$ 作为上式中的仿射参量 λ. 此时由于 $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} x^0 = 0$, (3.2.5) 的空间分量可改写为

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^i}{\mathrm{d}t^2} + (\Gamma^i_{\sigma\tau} - \Gamma^0_{\sigma\tau}) \frac{\mathrm{d}x^\sigma}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}x^\tau}{\mathrm{d}t} = 0. \tag{3.2.7}$$

式 (3.2.6) 改写为

$$g_{\mu\nu} \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}t} = 0. \tag{3.2.8}$$

取后牛顿极限 [第一篇 (5.2.22) 和 (5.2.24)], (3.2.7) 和 (3.2.8) 成为

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^i}{\mathrm{d}t^2} = U_{,i}\left(1+\gamma\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|^2\right) - 2\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{dt}}\cdot\nabla U\right)(1+\gamma),$$

$$1-2U-\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|^2(1+2\gamma U)=0. \tag{3.2.9}$$

这些方程的牛顿解为

$$x^i = \hat{n}^i(t-t_0), \quad \hat{\boldsymbol{n}} \equiv \frac{\boldsymbol{r}}{r}. \tag{3.2.10}$$

此式表明光子以恒定速度 $\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right| = 1$ 沿直线 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 运动. 在 x^i 中引入一偏离直线的量 x_p^i

$$x^i \equiv \hat{n}^i(t-t_0) + x_p^i, \tag{3.2.11}$$

代入 (3.2.9), 得到偏离匀速直线运动的后牛顿方程

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = (1+\gamma)[\nabla U - 2\hat{\boldsymbol{n}}(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\nabla U)], \tag{3.2.12}$$

$$\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = -(1+\gamma)U. \tag{3.2.13}$$

知道 PPN 度规的具体形式, 便可由上式确定光子轨道的具体形状.

设坐标时间为 t_e 时在 x_e 处发射一光信号, 初始方向沿 $\hat{\boldsymbol{n}}$. 考虑到后牛顿修正 $\boldsymbol{r}_p$, 光子轨道为

$$\begin{aligned} &x^0(t) = t, \\ &\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}_e + \hat{\boldsymbol{n}}(t-t_c) + \boldsymbol{r}_p(t). \end{aligned} \tag{3.2.14}$$

式中用了边界条件 $\boldsymbol{r}_p(t_e)=0$. 把 $\boldsymbol{r}_p$ 分解为沿着未受扰动轨道的分量和垂直于原轨道的分量:

$$\begin{aligned} &r_{p_{//}} = \hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{r}_p(t), \\ &r_{p_\perp} = \boldsymbol{r}_p(t) - [\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{r}_p(t)]\hat{\boldsymbol{n}}, \end{aligned} \tag{3.2.15}$$

这时由 (3.2.12) 和 (3.2.13) 得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r_{p_{//}} = -(1+\gamma)U, \tag{3.2.16}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}x^i_{p_\perp} = (1+\gamma)[U_{;i} - \hat{n}^i(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\nabla U)]. \tag{3.2.17}$$

对于 Schwarzschild 场源 m, 牛顿势为

$$U = \frac{m}{r}. \tag{3.2.18}$$

沿着未受扰动的光子轨道有

$$U = \frac{m}{r(t)} = \frac{m}{|\boldsymbol{r}_e + \hat{\boldsymbol{n}}(t - t_e)|}. \tag{3.2.19}$$

代入 (3.2.17) 积分, 精确到后牛顿项, 得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{r}_{p\perp} = -(1+\gamma)m\frac{\boldsymbol{a}}{a^2}\left[\frac{\boldsymbol{r}(t)\cdot\hat{\boldsymbol{n}}}{r(t)} - \frac{\mathrm{r}_e\cdot\hat{\boldsymbol{n}}}{r_e}\right]. \tag{3.2.20}$$

式中

$$\boldsymbol{a} \equiv \hat{\boldsymbol{n}} \times (\boldsymbol{r}_e \times \hat{\boldsymbol{n}}) \tag{3.2.21}$$

是从引力源中心到未受扰动光线的距离 (图 10-6). 式 (3.2.20) 表明, 光子轨道方向的变化指向太阳 (沿 $-\boldsymbol{a}$ 方向). 由 (3.2.16) 和 (3.2.20), 得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{r}_p(t) = -(1+\gamma)U\hat{\boldsymbol{n}} - (1+\gamma)\frac{m\boldsymbol{a}}{a^2}\times\left(\frac{\boldsymbol{r}(t)\cdot\hat{\boldsymbol{n}}}{r(t)} - \frac{\boldsymbol{r}_e\cdot\hat{\boldsymbol{n}}}{r_e}\right). \tag{3.2.22}$$

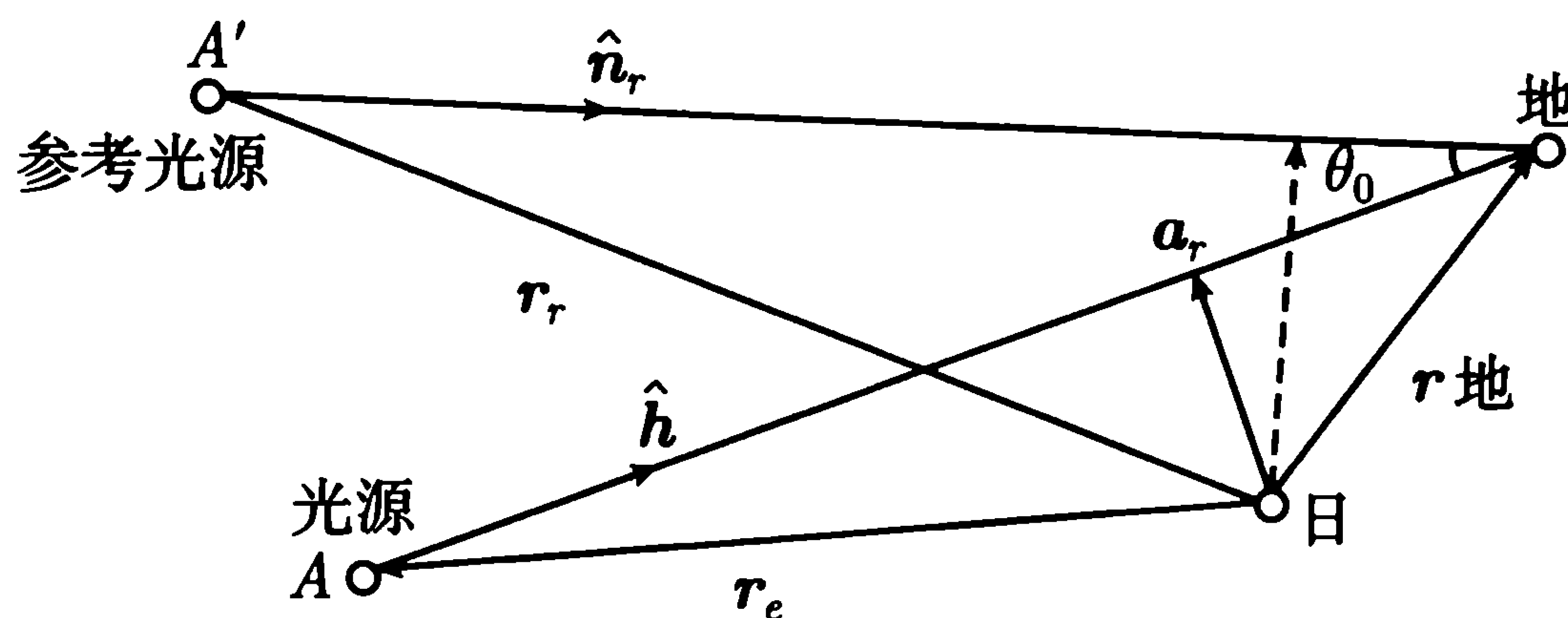


图 10-6

假设地球上一观察者, 接收到由源 A 和参考源 A' 发出的光子. 两个光子入射线之间的夹角为 θ. 用投影算符

$$P^\nu_\mu \equiv \delta^\nu_\mu + u_\mu u^\nu \tag{3.2.23}$$

将两个入射光子轨道的切矢量 $k^\mu \equiv \dfrac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t}$ 和 $k^\mu_r \equiv \dfrac{\mathrm{d}x^\mu_r(t)}{\mathrm{d}t}$ 投影到与 u^μ 正交的超曲面上 (u^μ 是观察者的四维速度), 得到

$$\cos\theta \equiv \frac{P^\mu_\lambda k^\lambda P_{\nu\mu}k^\nu_r}{|P^\tau_\lambda k^\lambda||P_{\nu\mu}k^\nu_r|} = 1 + \frac{\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\kappa}_r}{(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\kappa})(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\kappa}_r)}. \tag{3.2.24}$$

地球速度只产生光程差, 可略去. 此时上式简化为

$$\cos\theta = 1 - g^{-1}_{00}g_{\mu\nu}k^\mu k^\nu_r. \tag{3.2.25}$$

把 (3.2.14) 和 (3.2.22) 代入上式, 精确到后牛顿项, 得到

$$\cos\theta = \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}_r - (1+\gamma)\left[\frac{m}{a}\left(\frac{\boldsymbol{a}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}_r}{a}\right)\left(\frac{\boldsymbol{r}_{地}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}}{r_{地}} - \frac{\boldsymbol{r}_e\cdot\hat{\boldsymbol{n}}}{r_e}\right) + \frac{m}{a_r}\left(\frac{\boldsymbol{a}_r\cdot\hat{\boldsymbol{n}}}{a_r}\right)\left(\frac{\boldsymbol{r}_{地}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}_r}{r_{地}} - \frac{\boldsymbol{r}_r\cdot\hat{\boldsymbol{n}}_r}{r_r}\right)\right]. \quad (3.2.26)$$

式中

$$\boldsymbol{a}_r \equiv \hat{\boldsymbol{n}}_r \times (\boldsymbol{r}_r \times \hat{\boldsymbol{n}}_r). \quad (3.2.27)$$

设 θ_0 是未受扰动时两入射光线的夹角, 即

$$\cos\theta_0 = \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} r. \quad (3.2.28)$$

观测到的夹角 θ 与 θ_0 的偏差为 $\delta\theta \equiv \theta - \theta_0$.

如果取太阳本身为参考光源 (图 10-6), 则 $a_r = 0$, $\boldsymbol{a}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}_r/a = \sin\theta_0$, 我们得到

效应 54

$$\delta\theta = \left(\frac{1+\gamma}{2}\right)\frac{2m}{a}\left(\frac{\boldsymbol{r}_{地}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}}{r_{地}} - \frac{\boldsymbol{r}_e\cdot\hat{\boldsymbol{n}}}{r_e}\right). \quad (3.2.29)$$

对于远处恒星发出的光, 我们有

$$r_e \gg \boldsymbol{r}_{地}, \quad \frac{r_e\cdot\hat{n}}{r_e} \approx -1, \quad (3.2.30)$$

$$\frac{\boldsymbol{r}_{地}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}}{r_{地}} \approx \hat{\boldsymbol{n}}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}_r = \cos\theta_0. \quad (3.2.31)$$

于是 (3.2.29) 简化为

效应 55

$$\delta\theta = \left(\frac{1+\gamma}{2}\right)\frac{4m}{a}\left(\frac{1+\cos\theta_0}{2}\right). \quad (3.2.32)$$

对于广义相对论, $\gamma = 1$, 再取 $\theta_0 = 0$, 上式即为 (3.2.1).

由 (3.2.32) 可以看出, 掠过太阳 ($\theta_0 \approx 0$) 的光线偏转角最大. 代入各量的值: $a \approx R_\odot \approx 6.96\times10^5\text{km}, m = m_\odot = 1.476\text{km}$, 得到此效应的理论值

$$(\delta\theta)_{\max} = \frac{1}{2}(1+\gamma)1''.75. \quad (3.2.33)$$

广义相对论 ($\gamma = 1$) 对于掠过太阳的光线预言的最大偏转角为 $1''.75$; 对于木星, 要小 100 倍. 这些估算早已由爱因斯坦给出. 早在 1913 年, Freundlich 研究了 1901 年的日食照片, 考查实验观测的结果. 1914 年, 为了观测爱因斯坦的这一引力效应, 他率探险队到克雷姆去观测. 第一次世界大战后的第一次日全食期间 (1919), Eddington 等观测了星光的弯曲效应, 观测值为 $1''.61 \pm 0.40$. 他们的实验精确度只有 30%, 接着几次实验精确度也没有明显提高, 结果在 $\frac{1}{2}$ 和 2 倍爱因斯坦值之间

摆动. 后来, Biesbroek(1947,1952), Texas 大学 (1973) 观测值在误差范围内都与爱因斯坦理论值符合得很好. 虽然由于各种因素影响观测的精确度, 但人们还是公认这些观测都准确地验证了广义相对论. 实际上, 日食专家早已能够断言, 除了引力效应以外, 任何别的效应 (或效应组合) 都不可能解释观测到的光线偏转现象.

1973 年 Texas 大学的观测结果是

$$\delta\theta = 1''58 \pm 0.16,$$

或者

$$\frac{1}{2}(1+\gamma) = 0.95 \pm 0.11. \tag{3.2.34}$$

此式给出了不同引力理论中参量 γ 应受到的限制.

为了提高测量精度, Lillestrand(1961) 建议把测量装置放在宇宙飞船里. 这样, 即使不发生日食也有可能观测到光线偏转效应, 并且测量精度可达 1%. 但是此后验证此效应的研究却沿另一途径发展了. 20 世纪 50 年代末以来, 长基线和超长基线无线电干涉技术发展迅速, 用这一技术可以测出角度变化 (或分开角度) 3×10^{-4} 弧秒. 与此同时, 每年有多颗类星体强射电源在太阳附近出现. 由于类星体辐射角范围小, 可以在较大范围内改变射电干涉的基线, 于是人们可以通过测量干涉仪发出的信号的相位差, 精确地确定一对类星体分开的角度.

2. *恒星的视差*

由于光线的引力偏转效应改变了恒星在天穹上的视位置, 必然出现恒星视差的相对论修正, 对 Schwarzschild 场中的零短程线方程作第二次积分, 可以得到恒星周年视差的减小效应. 保留源质量 m 的一阶项, 得到

效应 56

$$\Delta p = p(\mathrm{tr}) - p(\mathrm{real}) = -\frac{2m}{r}\sin^{-2}\varphi_0. \tag{3.2.35}$$

式中 $p(\mathrm{tr})$ 是总视差, 由三角测量得到; $l(\mathrm{real}) = \dfrac{r}{r_0}$ 是牛顿视差, r_0 和 φ_0 是恒星的日心坐标 (距离和纬度), r 是观察者和引力源中心的距离. 效应 (3.2.35) 预言的 $\Delta_p \geqslant 0.004''$.

3. *试验自旋对轨道偏转的影响*

根据广义相对论, 试验物体自旋的取向在很大程度上是任意的. 这可以由多体问题的解得到, 也可以由一个物体的 Papapetrou 方程得到. 设试验自旋沿轨道平面的法线分量为 S_n, 我们得到

$$(\Delta\alpha_{\max})_s(S^{0i}=0) = -2mS_n^*/\varepsilon b^2, \tag{3.2.36}$$

实际上 $S_n^* = \varepsilon S_n$. 由 (3.1.4) 和 (3.2.36) 得到附加偏转

效应 57

$$(\delta\theta)_{m,S}(S^{0i}=0)=-2m\frac{S_n}{b^2}. \tag{3.2.37}$$

这一效应和对粒子自旋加上的附加条件 ($S^{0i}=0$) 有关. 由上式可见, 自旋为零的光子的轨道没有这一偏转. 它是自旋 S_n 的贡献.

4. 光子偏离平面运动

如果粒子开始运动时其自旋在平面 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 内, 运动中它的自旋的法向分量保持不变 (即 $S_z=0, S_x, S_y\neq 0$), 则试验自旋的运动方程 (巴巴别特鲁方程) 转为短程线方程. 可以证明, 这样的运动不是平面运动.

下面讨论光子偏离平面运动的效应. 为了给出这一效应, 解短程线偏离方程 (2.2.4), 并把 (2.2.22) 右端后一项 ($q=0$) 作为扰动力 F^λ, 将 Schwarzschild 度规代入. 最后得到由于光子自旋的存在, 使轨道沿垂直于赤道平面的方向偏转:

效应 58

$$l=\frac{mA_1}{(A_2)^2}\sin 2\varphi. \tag{3.2.38}$$

3.3 Schwarzschild 场中对光子轨道的限制

1. 对光线掠射角的限制

假设 Schwarzschild 场中一点处有一光源, 发出的光子沿 Schwarzschild 场的零短程线运动, 由第一次积分得到速度的空间分量:

$$v^1=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x^0}=\left(1-\frac{2m}{r}\right)\sqrt{1-\frac{b^2}{r^2}\left(1-\frac{2m}{r}\right)},$$

$$v^3=r\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x^0}=\frac{b}{r}\left(1-\frac{2m}{r}\right). \tag{3.3.1}$$

式中 b 为瞄准参量. v^1 和 v^3 间有关系式

$$\tan\varphi=\frac{v^3}{v^1}=\left(\frac{r^2}{b^2}-1+\frac{2m}{r}\right)^{-1/2} \tag{3.3.2}$$

式中 φ 是光线与光源一观察者连线间的夹角. 由于速度的物理分量 v_r, v_φ 和上式中的 v_1, v_3 之间有关系式

$$v_r=v_1\sqrt{\frac{g^{11}}{-g_{00}}},\quad v_\varphi=v_3\sqrt{\frac{g_{33}}{-g_{00}}},$$

故 (3.3.2) 改写为

效应 59

$$(\tan\varphi)_m = \frac{v_\varphi}{v_r} = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{1/2}\left(\frac{r^2}{b^2} - 1 + \frac{2m}{r}\right)^{-1/2} \tag{3.3.3}$$

$\dfrac{b}{r}$ 只能算一定的值, 才能保证上式被开方数为正定的. 这意味着, 由引力源附近发射的光线, 只有限制在顶角为 2φ 的锥内才能到达无限远处的观察者. 锥外的光线将落在引力中心或被引力质量俘获 [见效应 (3.3.6)]. 在这个意义上, 引力源质量的引力作用限制了光线相对于矢径 (光源 — 观察者) 的掠射角.

2. 光线的引力俘获

根据广义相对论, 在 Schwarzschild 场中, 粒子轨道可能终止于引力中心. 在牛顿引力理论中, 这种轨道只能沿径向, 粒子撞在引力体上. 在广义相对论中, 守恒面积 $h < 4m$ 的所有试验粒子都可能被俘获. 当 $h = 4m$ 时轨道成为一个圆. 引力场俘获光子的情况是很有趣的. 由 Schwarzschild 场中零短程线的第一次积分得到

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x^0} = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)\left[1 - \frac{b^2}{r^2}\left(1 - \frac{2m}{r}\right)\right]^{1/2} \tag{3.3.4}$$

令 $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x^0} - 0$, 得到瞄准参量 b 和光线到引力中心最小距离 $r_{\min}$ 之间的关系

$$b = r_{\min}\left(1 - \frac{2m}{r_{\min}}\right)^{-1/2} \tag{3.3.5}$$

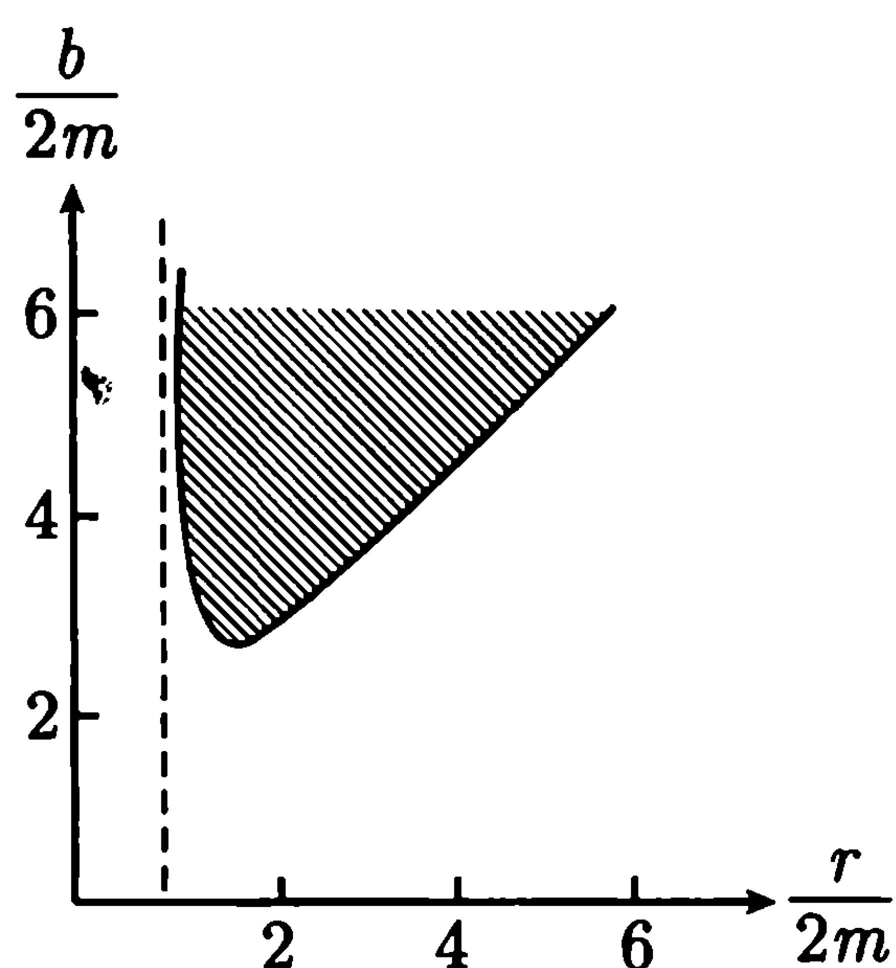


图 10-7

令 $\dfrac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}(r_{\min})} = 0$, 得到 $(r_{\min})_0 = 3m$, $b_0 = 3\sqrt{3}m$. 即当 $r_{\min} = 3m$ 时, 函数 $b(r_{\min})$ 有极小值 $b_0 = 3\sqrt{3}m$. 所以, 只有瞄准参量 $b > b_0$ 的那些光线才能到达无限远处的观察者, 而瞄准参量满足

效应 60

$$b < b_0 = 3\sqrt{3}m \tag{3.3.6}$$

的光线均被引力源俘获 (图 10-7). 当 $b = b_0$ 时光线闭合为圆. 这是广义相对论特有的效应. 由 (3.3.3) 可知, 当 $b < b_0$ 时限制光线的圆锥顶角大于 π, 光线不会到达无限远 (被引力中心俘获).

3.4　R-N 场中光子的轨道效应

在讨论光子轨道效应之前, 我们先讨论极端相对论粒子的轨道偏转效应.

1. 极端相对论粒子在 R−N 场中的轨道偏转效应

设 $k \ll m^2, (1-\beta^2) \ll 1$. 由 (2.1.7) 出发, 和得到 (3.1.2) 类似, 我们得到最大的附加反常 $\alpha_{\max}$ 和 f. 最大附加反常为

$$\alpha_{\max} = \frac{2m}{b} + \frac{\pi m^2}{b^2} - \frac{15}{4} - \frac{3}{4}\frac{\pi k}{b^2}, \tag{3.4.1}$$

离开直线的偏转角为

$$\theta_{m,k} = \theta_m - \frac{3}{4}\frac{\pi k}{b^2}. \tag{3.4.2}$$

式中 θ_m 为 Schwarzschild 场中的偏转角 (3.1.10). 因此, 源电荷参量 k 使极端相对论粒子轨道产生的偏转效应为

效应 61

$$\theta_k = -\frac{3}{4}\frac{\pi k}{b^2}. \tag{3.4.3}$$

由上式可见, 根据广义相对论, 电荷的引力作用使引力质量产生的轨道偏转角减小. 在所取的近似条件下, 效应 (3.4.3) 不含 β_0, 这表明此式也适用于光子的轨道. 下面我们单独研究光子的轨道偏转效应.

2. R−N 场中光子轨道的偏转

由 (2.9.1) 得到轨道微分方程, 当 $\varepsilon, h \to \infty$ 时为

$$\tilde{F}_{m,k}(u) = \frac{1}{b^2} - u^2 + 2mu^3 - ku^4. \tag{3.4.4}$$

不难导出准双曲线焦点参量和离心率的关系

$$p = \frac{b^2}{m}\left(1 + \frac{3k}{b^2}\right), \quad e = \frac{b}{m}\left(1 + \frac{5k}{2b^2}\right). \tag{3.4.5}$$

由 (2.9.3) 得到

$$\tilde{C} = 1 - \frac{2m}{p}(3 + e\cos\psi) + \frac{k}{p^2}(6 + 4e\cos\psi + e^2 + e^2\cos^2\psi). \tag{3.4.6}$$

由上两式和 (2.1.7) 立刻导出偏转角

效应 62

$$\tilde{\theta}_k = -\frac{3}{4}\frac{\pi k}{b^2}. \tag{3.4.7}$$

3. 对光线掠射角的限制

天体物理中对于外部观察者和黑洞附近观察者如何测得电磁信号的问题很感兴趣. 光线在引力场中掠射受到限制, 有些方向的电磁信号不可能被远处观察者观察到. Schwarzschild 场中的这一效应已在 §3.3 中讨论过. 关于致密天体 (中子星、

星系核、黑洞) 中可能含有电荷和磁单极的问题已有许多学者研究过. R-N 场源是含有电荷的球对称质量, 用获得双荷度规的方法很容易将这一度规推广到含大量磁单极的情况. 实际上, 结果只是将度规中的 $k = e^2$ 换为 $k = e^2 + q^2$, 式中 e 和 q 分别为电荷和磁荷.

与 §3.3(1) 的过程相似, 以 R-N 度规代替 Schwarzschild 度规, 与 (3.3.3) 对应地, 得到光线掠射角受到的限制:

效应 63

$$(\tan\varphi)_{m,k} = \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{k}{r^2}\right)^{1/2} \left(\frac{\gamma^2}{b^2} - 1 + \frac{2m}{r} - \frac{k}{r^2}\right)^{-1/2} \tag{3.4.8}$$

4. 光线的自闭合

在 R-N 场中, 由短程线方程的第一次积分得到

$$b = r_{\min} \left(1 - \frac{2m}{r_{\min}} + \frac{k}{r_{\min}^2}\right)^{-1/2} \tag{3.4.9}$$

这里, 函数 $b(r_{\min})$ 不但和 m 有关, 而且与 $\dfrac{k}{m^2}$ 有关. 这一关系表述于图中. 可以发现, 中性试验粒子在 R-N 场中不可能被引力俘获. 但是当 $k \gg m^2$ 时, 试验物体逐渐转到更深的轨道 (k 增大则 b 减小). 当 $b < 4m$ 时, 光线可以穿过面 $r = m$.

令 $\dfrac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}r_{\min}} = 0$, 得到 b 取极值的条件:

效应 64

$$r_{\min} = \frac{3m}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{8k}{9m^2}}\right). \tag{3.4.10}$$

将此式代入 (3.4.9) 便得到 b 的极限值. (3.4.10) 对应于 R-N 场中光子的两上圆轨道.

3.5 Kerr 场中极端相对论粒子和光子的轨道效应

1. 轨道偏转效应

在通常情况下,$a^2 \ll m^2 \ll b^2$, $1 - \beta_0^2 \ll 1$, 我们在这些近似条件下, 首先研究准双曲线轨道附加反常的一般情况. 由克尔度规出发, 按照 Schwarzschild 场中的计算序, 我们得到

$$\alpha_{\min} = \frac{2m}{b} + \frac{15}{4} - \frac{\pi m^2}{b^2}, \tag{3.5.1}$$

$$\theta_{m,a} \approx \theta_m - \frac{4am}{b^2}. \tag{3.5.2}$$

由此得到, Kerr 场参量 a 产生的极端相对论粒子轨道的偏转效应为

效应 65

$$\theta_a \approx -\frac{4am}{b^2} \tag{3.5.3}$$

与上一节中的情况相似, 在 (3.5.3) 中不含 β_0. 所以, 在同样近似条件下, 此式也可用于光子轨道的情况. 我们也可单独研究光子轨道. 设光子轨道在赤道面内, 只保留 a 的一次项, 由 (2.13.1) 得到

$$\tilde{F}_a(u) = \frac{1}{b^2} + \frac{4am}{b^3}u - \left[1 - \frac{8am^2}{b^3}\right]u^2 + 2m\left[1 + \frac{8am^2}{b^3}\right]u^3. \tag{3.5.4}$$

由此得到

$$p = \frac{b}{m}\left(1 + \frac{2a}{b}\right), \quad e = \frac{b}{m}\left(1 + \frac{2a}{b}\right), \tag{3.5.5}$$

$$\tilde{C} = 1 + \frac{8am^2}{b^3} - \frac{2m}{p}\left(1 + \frac{8am^2}{b^3}\right)(3 + e\cos\psi). \tag{3.5.6}$$

由这些式子直接得到

效应 66

$$\tilde{\theta}_a \approx -\frac{4am}{b^2}. \tag{3.5.7}$$

这一效应的特点是依赖于源质量的旋转方向及其与光子运动方向的相互取向; 如果光子轨道不在赤道面内, 还依赖于轨道面与赤道面的夹角. 特别是当光线平行于转轴传播时, 偏转角不依赖于 a 的一次项. 所有这些特点都包含在下面的表达式中:

$$\tilde{\theta}_a = \frac{4m}{b^2}\boldsymbol{a}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}. \tag{3.5.8}$$

式中 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 是轨道平面法线单位矢. 要用实验验证这一效应, 必须测出具有不同瞄准参量的光线的偏转角. 利用太阳遮住类星体的机会是最方便的, 因为人们已经作过这类观测 —— 测量类星体被太阳遮住前后所发出射线的偏转角.

2. 引力俘获效应

光子的引力俘获效应在 Kerr 场中有新的特点. 设光子轨道在赤道面内, 可导出瞄准距离 $b = b(r_{\min})$ 的严格表达式

$$b = \left(1 - \frac{2m}{r_{\min}}\right)^{-1}\left[\pm r_{\min}\sqrt{1 - \frac{2m}{r_{\min}} + \frac{a^2}{r_{\min}^2}} - \frac{2am}{r_{\min}}\right]. \tag{3.5.9}$$

绕着源转动方向顺行的光子轨道取上式中上边的符号, 逆行的取下边的符号. 令

$\dfrac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}r_{\min}}=0$, 保留 a 的一次项, 得到

$$(r_{\min})_{\pm}=\frac{3m}{2}\left[1+\sqrt{1\mp\frac{8a}{9m}}\right]. \tag{3.5.10}$$

由上式可知, 顺行光子在 $r=(r_{\min})_+$ 处被 Kerr 场引力俘获; 逆行光子在 $r=(r_{\min})_-$ 处被 Kerr 场引力俘获. 将 (3.5.10) 代入 (3.5.9) 可以得到光子被俘获的条件:

效应 67

$$b<b_0=2m\left[1+\sqrt{1\mp\frac{a}{m}}\right]. \tag{3.5.11}$$

由于顺行光子和逆行光子的俘获情况不同: $(b_0)_+\neq(b_0)_-$, 所以 Kerr 场中的引力俘获效应是各向异性的.

3. 光子轨道的扭转

效应 (3.5.7) 和 (3.5.8) 已指出, Kerr 场中在赤道面内的光子轨道会产生各向异性偏转. 光子在平面 $\varphi=\mathrm{const}$ 运动时, 轨道的偏转角与在 Schwarzschild 场中的相同. 可以证明, 如果光子开始沿着 $\boldsymbol{a}$ 的方向运动, 则在 Kerr 场中其轨道会扭转一个角度:

效应 68

$$(\Delta\varphi)_a=\frac{4am}{b^2}. \tag{3.5.12}$$

式中 φ 是在赤道面内的极化角. 仅在光子沿赤道运动时此效应才不存在. 这一效应与效应 (2.14.6) 类似.

3.6 其他引力场中的光子轨道效应

1. 质量四极矩产生的偏转效应

采用前面的推导程序, 由第三篇的度规 (1.8.22) 得到

$$\tilde{F}_\sigma(u)=\frac{1}{b^2}-u^2+2m\left(1+\frac{2m^2\sigma}{15b^2}\right)u^3+\frac{m^4\sigma}{b^2}u^4. \tag{3.6.1}$$

由此求得

$$p=\frac{b^2}{m}\left(1-\frac{2m^2\sigma}{15b^2}\right),\quad e=\frac{b}{m}\left(1-\frac{2m^2\sigma}{15b^2}\right), \tag{3.6.2}$$

$$\tilde{C}=1-\frac{2m}{p}\left(1+\frac{2m^2\sigma}{15b^2}\right)(3+e\cos\psi)-\frac{m^4\sigma}{b^2p^2}(6+4e\cos\psi+e^2+e^2\cos^2\psi). \tag{3.6.3}$$

代入 (2.1.7), 应用 (3.1.6) 得到附加反常 $\alpha_{\max}$, 进而得到 (当 $\theta=\pi/2$) 偏转角

效应 69

$$\theta_{\sigma,m}=\frac{8m^3\sigma}{15b^3}. \tag{3.6.4}$$

我们注意到, 由于度规 (1.8.22) 具有辐射对称性, 而不具有球对称性, 所以偏转角很强地依赖于轨道平面和赤道面的夹角, 这就是说, 光子轨道的偏转是各向异性的. 当取向角 θ 等于某一值 θ_0 时, 四极矩的贡献会消除.

2. 宇宙项产生的偏转效应

由度规 (1.2.13) 得到光子轨道微分方程

$$\tilde{F}_\lambda(u)=\frac{1}{b^2}+\frac{\lambda}{3}-u^2+2mu^3. \tag{3.6.5}$$

按前边的方法, 求得 p 和 e

$$p=\frac{b^2}{m}\left(1-\frac{\lambda b^2}{3}\right),\quad e=\frac{b}{m}\left(1-\frac{\lambda b^2}{6}\right),$$

$$\tilde{C}=1-\frac{2m}{p}(3+e\cos\psi). \tag{3.6.6}$$

最后积分, 得到宇宙因子 λ 对偏转角的贡献:

效应 70

$$\theta_\lambda=\frac{2}{3}mb\lambda. \tag{3.6.7}$$

由此可见, 宇宙因子的贡献随瞄准距离的增大而增大.

3. 引力波场中的偏转效应

可以证明, 在引力波场 [第一篇 (4.1.13)] 中等效的“折射系数”可写为

$$n=1+\frac{1}{2}p_{ij}\hat{e}^i\hat{e}^j. \tag{3.6.8}$$

式中 $\hat{e}$ 是沿光线传播方向的单位矢. 分量 p_{ij} 是时间的周期函数, 把引力场作为光的特殊“媒质”, 光线的两条渐近线间夹角可写为

$$\theta=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(\ln n)\mathrm{d}r. \tag{3.6.9}$$

弱引力的上述效应是极微小的, 所以人们设法将引力波场中的上述效应累积起来. 可在 $x^2=0$ 和 $x^2=l$ 处各处一面镜子, 设引力波治 x^2 轴方向传播, 则光线由坐标原点发出后将沿 x^1 和 x^3 轴偏转

$$x^1=-\frac{n\pi c}{\omega_g}\beta^2p_{22}\sin\Phi,$$

$$x^3 = \frac{2c}{\omega_g}\beta[1-(-1)^N]p_{23}(\cos\tilde{\Phi} - n\pi\sin\tilde{\Phi}). \tag{3.6.10}$$

式中 $\frac{1}{\omega_g}N\pi v = l$($N$ 是整数). 比较偶数 (N) 次反射, 发现沿 x^3 的移动抵消了, 沿 x^1 的移动相加. 因此, 选择适当的相位和频率 (使发生共振), 在两个镜子组成的系统中, 可以获得光线的累积偏移. 它的表达式为

效应 71

$$\Delta x^1 = -l\beta p_{22}\sin\Phi. \tag{3.6.11}$$

第 4 章 试验粒子和电磁信号的延迟效应

在一个大质量物体的引力场中, 电磁信号 (光) 通过一给定的距离所需要的时间, 广义相对论预言的值比牛顿理论预言的值要大, 这一效应称为时间延迟效应.

4.1 延迟时间表达式

1. 由不同步引起的粒子和电磁信号的延迟

在一般情况下, 任意间隔

$$ds^2 = dx^{(0)^2} - dl^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

中, $dx^{(0)}$ 和 dl 表示某一局部惯性系中的本征 (物理的) 时间元和距离元. 由同步条件 $dx^{(0)} = 0$, 即

$$g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dl^2 = 0, \tag{4.1.1}$$

解出 dx^0, 得到不同步坐标时

$$\begin{aligned} dx^0(dx^{(0)} = 0) &\equiv dx^0_{\text{des}} \\ &= -\frac{g_{0i}dx^i}{g_{00}} \pm \frac{1}{g_{00}}\sqrt{(g_{0i}g_{0j} - g_{00}g_{ij})\frac{dx^i dx^j}{g_{00}} + dl^2}. \end{aligned} \tag{4.1.2}$$

我们还可以给出 dx^0_{des} 的另一表达式:

$$dx^0_{\text{des}} = -\frac{u_i}{u_0} dx^i = -\frac{g_{i\mu}\dot{x}^\mu dx^i}{g_{0\lambda}\dot{x}^\lambda}. \tag{4.1.3}$$

式中 $u^\mu \equiv \dot{x}^\mu$ 是质点运动方程的解. 对于电磁信号, $dl \equiv d\tilde{l} = 0$, (4.1.2) 是信号传播时间, 其中包括广义相对论预言的延迟时间项. 当 $dl \neq 0$ 时, 对应于试验粒子的延迟时间.

假设信号在 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 平面内传播, 取类 Schwarzschild 坐标 $(x^0, r, \theta, \varphi)$. 这时有

$$g_{00}dx^{02} - g_{11}dr^2 - g_{33}d\varphi^2 - 2g_{03}dx^0 d\varphi = 0, \tag{4.1.4}$$

或者

$$g_{00} - g_{11}\left(\frac{dr}{dx^0}\right)^2 - g_{33}\left(\frac{d\varphi}{dx^0}\right) - 2g_{03}\frac{d\varphi}{dx^0} = 0. \tag{4.1.5}$$

零短程线的第一积分给出

$$\left(g_{00}-g_{03}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x^0}\right)x^0=\varepsilon,$$

$$\left(g_{33}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x^0}+g_{03}\right)x^0=h. \tag{4.1.6}$$

式中 $x^0\equiv\dfrac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}\lambda}$, λ 为沿着零短程线的某个参量 $(\lambda\neq s)$. 由此得到信号的传播时间

$$\begin{aligned}&x^0(\mathrm{d}s=0)\\&=\int_{\varphi 2}^{\varphi 2}\frac{\{g_{03}(r_0)+[g_{03}^2(r_0)+g_{00}(r_0)g_{33}(r_0)]^{1/2}\}g_{03}+g_{33}g_{00}}{g_{03}+(g_{03}^2+g_{00}g_{33})^{1/2}g_{00}-g_{03}g_{00}}d\varphi.\end{aligned} \tag{4.1.7}$$

式中 r_0 是光信号和引力中心的最小距离.

设辐射源位于 (r_1,ψ_1)

$$r_1=p(1+e\cos\psi_1)^{-1},\quad \psi_1=-\frac{\pi}{2}+\frac{1}{e}\left(\frac{p}{r_1}-1\right),$$

反辐射体位于 (r_2,ψ_2)

$$r_2=p(1+e\cos\psi_2)^{-1},\quad \psi_2=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{e}\left(\frac{p}{r_1}-1\right).$$

由此可以得到由于引力场中光线的弯曲所产生的时间差

$$\Delta x^0=\int_{\psi 1}^{\psi 2}\frac{[g_{03}+(g_{03}^2+g_{00}g_{33})^{1/2}]g_{03}+g_{32}g_{00}}{g_{03}+(g_{03}^2+g_{00}g_{33})^{1/2}g_{00}-g_{03}g_{00}}\times\frac{\mathrm{d}\psi}{\sqrt{\tilde{C}}}-(\Delta x^0)_{m=0}. \tag{4.1.8}$$

式中 $(\Delta x^0)_{m=0}$ 是无引力场时信号沿直线传播的时间. $\tilde{C}$ 即 (2.1.5)~(2.1.7) 中的 C 对于光子的极限情况 (3.1.7).

2. 试验粒子在 Schwarzschild 场中的延迟效应

在 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 的平面内, 代入 Schwarzschild 度规, 得到粒子运动方程的解

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x^0}=\frac{A}{\alpha^3\varepsilon},\quad \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x^0}=\frac{h}{\alpha^3\varepsilon r^2},\quad \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}=\frac{r^2A}{\alpha h}, \tag{4.1.9}$$

$$\alpha\equiv\left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1/2},\quad A=\alpha^2\varepsilon^2-1-\frac{h^2}{r^2}. \tag{4.1.10}$$

把 (4.1.9) 代入 (4.1.3), 得到试验粒子的延迟效应:

效应 72

$$\Delta x_{\mathrm{des}}^0=\int(\mathrm{d}x_{\mathrm{des}}^0)\quad(\mathrm{d}s=\mathrm{d}l\geqslant 0)$$

$$
\begin{aligned}
&= \int \left(\frac{\alpha^2\varepsilon}{h} - \frac{1}{\varepsilon h}\right) r^2 \mathrm{d}\varphi \\
&= \int \left(\frac{\alpha^2\varepsilon}{h} - \frac{1}{\varepsilon h}\right) \left[\frac{\alpha^2\varepsilon^2}{h^2} - \frac{1}{h^2} - \frac{1}{r^2}\right]^{-1/2} a\mathrm{d}r.
\end{aligned} \tag{4.1.11}
$$

由上式可见, $\Delta x^0_{\mathrm{des}}$ 可能大于零, 也可能小于零. 就是说, 超前和延迟都是可能的. 要在具体问题中确定了 ε 和 h 的值, 才能具体确定此效应的大小.

假设一试验粒子沿半径为 r 的圆周运动, 则有

$$
h(e=0) \approx \sqrt{mr}\left(1 + \frac{3m}{r}\right), \quad \varepsilon(e=0) \approx 1 - \frac{m}{2r}. \tag{4.1.12}
$$

将此式代入 (4.1.11), 并变换为对 ψ 的积分 $\left(\int_0^{2\pi}\right)$, 我们得到

效应 73

$$
\left(\frac{\Delta x^0_{\mathrm{des}}}{2\pi}\right)_{m,e=0} = \sqrt{mr}, \quad \frac{m^2}{r^2} = \beta_l^4 \ll 1. \tag{4.1.13}
$$

这一不同步时间和开普勒周期的比为

$$
\left(\frac{\Delta x^0_{\mathrm{des}}}{2\pi}\right) / T_0 = \frac{\sqrt{mr}}{1/\omega_0} = \frac{m}{r} = \beta_l^2. \tag{4.1.14}
$$

此式表明 Schwarzschild 场中的上述效应是极其微小的.

下面计算试验粒子沿准双曲线轨道运动时的不同步时间, 采用近似条件

$$
\frac{me^2}{r_0} \ll 1, \quad \beta^4 = \frac{v^4}{c^4} \ll 1. \tag{4.1.15}
$$

此时由 (4.1.3) 得到

效应 74

$$
\begin{aligned}
(\Delta x^0_{\mathrm{des}})_m &= -\int_0^p \frac{u_i \mathrm{d}x^i}{u_0} \\
&= \sqrt{mp}(\varPhi + e\,\mathrm{sh}\,\varPhi)(e^2-1)^{-1/2}.
\end{aligned} \tag{4.1.16}
$$

式中

$$
\varPhi \equiv \mathrm{arth}\sqrt{(e-1)/(e+1)}\tan\varphi.
$$

条件 (4.1.15) 要求轨道离心率很小. 当极端相对论粒子沿着离心率大的轨道运动时, 代替条件 (4.1.15) 有

$$
\frac{1}{e^2} \ll 1, \quad \beta^4 \approx 1 - \frac{2m}{r_0}. \tag{4.1.17}
$$

特殊地, 如果 $e = \dfrac{r_0}{m}$, 可以得到

$$\Delta x^0_{\text{des}} = -\int_{r_0}^{r} \frac{u_i \mathrm{d}x^i}{u_0} = \sqrt{r^2 - r_0^2} + (\Delta x^0_{\text{des}})_m. \tag{4.1.18}$$

其中最后一项即为不同步时间:

效应 75

$$(\Delta x^0_{\text{des}})_m = m\sqrt{r^2 - r_0^2}\left\{\frac{r_0 - r}{2r_0(r + r_0)} + 2[P(r) - P(r_0)]\right\}. \tag{4.1.19}$$

式中

$$P(r) \equiv \ln\left[\frac{1}{e} + \frac{r}{b}(1 - A_0)\right].$$

由上面三个效应可见, 在相对论速度不太大的情况下 [效应 (4.1.13) 和 (4.1.16)], 全部不同步时间都由广义相对论确定. 在极端相对论速度的情况下 [效应 (4.1.18)], 不同步时间由两项组成. (4.1.18) 的第一项是狭义相对论的, 第二项是广义相对论预言的超前时间.

4.2 Schwarzschild 场中电磁信号的延迟效应

本节中我们先从一般延迟式 (4.1.8) 出发, 给出电磁信号延迟时间的表达式, 然后再按 PPN 形式给出这一效应的表达式.

1. 电磁信号的不同步时间

设电磁信号自 Schwarzschild 场中的点 (r_1, φ_1) 传播到点 (r_2, φ_2). 信号的轨迹由轨道微分方程 $\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2 = 23.3\tilde{F}(u)$ 描述, 这里 $\tilde{F}(u)$ 与 (2.1.4) 对应, 只是代入极限情况 $\beta = 1$. 按前面的程序解关于 p 和 e 的方程组, 用 r_0 代替 b, 得到

$$p = \frac{r_0^2}{m}\left(1 + \frac{2m}{r_0} - \frac{4m^2}{r_0^2}\right),$$

$$e = \frac{r_0}{m}\left(1 + \frac{m}{r_0} - \frac{4m^2}{r_0^2}\right),$$

$$b = r_0\left(1 - \frac{2m}{r_0}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

将 Schwarzschild 度规代入 (4.1.8), 得到

$$\Delta x^0 = \int_{\psi 1}^{\psi 2} \frac{r^2}{r_0}\sqrt{1 - \frac{2m}{r_0}\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}}\frac{\mathrm{d}\psi}{\sqrt{\bar{C}}} - (\Delta x_0)_{m=0}. \tag{4.2.1}$$

将 $\tilde{C}$ 的表达式代入并积分, 保留 m 的一次项, 得到

$$\Delta x^0 = (r_1 + r_2) - \frac{r_0^2}{2}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) + 2m\left\{1 - \frac{r_0}{2}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) + \ln\frac{4r_1r_2}{r_0^2}\right\} - (\Delta x^0)_{m=0}. \tag{4.2.2}$$

式中前两项和最后一项都和 m 无关, 所以有

效应 76

$$(\Delta x^0)_m = 2m - mr_0\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) + 2m\ln\frac{4r_1r_2}{r_0^2}. \tag{4.2.3}$$

这样, 广义相对论预言, 光线和电磁信号在 Schwarzschild 场中传播都将发生延迟效应. 如果用水星作为雷达信号的反射体, 并设 $r_0 \approx R_\odot$, 忽略第二项, 得到

$$(\Delta x^0)_m = 4m\left\{1 + \ln\frac{4r_1r_2}{r_0^2}\right\} \approx 240\mu\text{s}(72\text{km}). \tag{4.2.4}$$

第一批实验观测以 20%的精度证实了理论预言. 后来不断提高测量精度, 在消除系统测量误差之后, 理论值和观测值符合的精确度达到 0.1%.

2. 时间延迟的后牛顿表示式

由 (3.2.16)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r_{p/\!/} = -(1+\gamma)U,$$

将 (3.2.19) 代入, 并积分, 得到

$$r_{p/\!/}(t) = -(1+\gamma)m\ln\frac{r(t) + \boldsymbol{r}(t)\cdot\hat{\boldsymbol{n}}}{r_e + \boldsymbol{r}_e\cdot\hat{\boldsymbol{n}}} \tag{4.2.5}$$

由 (3.2.14), 从发射点到观察点 $\boldsymbol{r}$ 光信号传播所经历坐标时间为

$$t - t_\varepsilon = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_\varepsilon| + (1+\gamma)m\ln\frac{r(t) + \boldsymbol{r}(t)\cdot\hat{\boldsymbol{n}}}{r_e + \boldsymbol{r}_e\cdot\hat{\boldsymbol{n}}}. \tag{4.2.6}$$

假设一信号由地球发射, 经 $\boldsymbol{r}_p$ 处的行星 (或飞船) 反射后回到地球, 整个过程所经历坐标时间为

效应 77

$$\Delta t = 2|\boldsymbol{r}_{地} - \boldsymbol{r}_p| + 2(1+\gamma)m\ln\frac{(\boldsymbol{r}_{地} + \boldsymbol{r}_{地}\cdot\hat{\boldsymbol{n}})(\boldsymbol{r}_p - \boldsymbol{r}_p\cdot\hat{\boldsymbol{n}})}{d^2} \tag{4.2.7}$$

式中 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 是返回时光子的方向. 严格说, 所经历时间应该用本征时间表示, 即由地球上的标准钟测定, 但这样并不改变上述结果. (4.2.7) 中右端后一项即为附加的时间延迟 $(\Delta t)_m$, 当行星和地球位于太阳的两侧时, $(\Delta t)_m$ 达最大值, 即当

$$\boldsymbol{r}_{地}\cdot\hat{\boldsymbol{n}} \approx r_{地}, \quad \boldsymbol{r}_p\cdot\hat{\boldsymbol{n}} \approx r_p, \quad d \approx R_\odot, \tag{4.2.8}$$

此时有

$$(\Delta t)_m = 2(1+\gamma)m\ln\left(\frac{4r_{\text{地}}r_p}{\mathrm{d}^2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}(1+\gamma)\left[240\mu\mathrm{s} - 20\mu\mathrm{s}\ln\left(\frac{\mathrm{d}}{R_\odot}\right)^2\left(\frac{a}{r_p}\right)\right]. \tag{4.2.9}$$

式中 a 是天文单位.

自 1964 年以来, 人们已经采用过多种反射体. 第一种是行星 (如水星、金星). 用这一方法的主要困难之一是不了解行星的地形, 这一因素会引起 5μs 的误差.

第二种反射体是人造卫星. 这里不存在地形问题, 而且飞船上的脉冲转发器可以让人们准确地知道飞船的位置.

由光线偏转实验和时间延迟实验, 得到的参量 $\frac{1}{2}(1+\gamma)$ 的误差都小于 0.2%. 各种非爱因斯坦引力理论, 利用各自的自由度调整其参量值或宇宙边界条件, 来满足这种限制. 为了使理论值与观测值的误差小于 0.1%, 标量引力理论中的参量 ω 要满足 $\omega > 500$.

4.3 其他场中的延迟效应

随着测量雷达信号传播时间的精度的不断提高, 人们期望能够测出其他引力参量对延迟效应的贡献. 其中包括引力电荷、宇宙因子项、源的角动量等.

1. R-N 场中的超前效应

由 R-N 度规代入轨道微分方程, 得到轨道参量

$$p = \frac{r_0^2}{m}\left(1+\frac{2m}{r_0}+\frac{2k}{r_0^2}\right),$$
$$e = \frac{r_0}{m}\left(1+\frac{m}{r_0}+\frac{2k}{r_0^2}\right). \tag{4.3.1}$$

代入 (4.1.8) 得

$$\Delta x^0 = \int_{\psi 1}^{\psi 2}\frac{r^2}{r_0}\sqrt{1-\frac{2m}{r_0}+\frac{k}{r_0}}\left(1-\frac{2m}{r}+\frac{k}{r^2}\right)^{-1}\times\frac{\mathrm{d}\psi}{\sqrt{\tilde{C}}} - (\Delta x^0)_{m=0}. \tag{4.3.2}$$

积分, 得到电磁信号自点 (r_1,ψ_1) 到点 (r_2,ψ_2) 的传播时间 (保留 m 和 k 的一阶项):

$$\Delta x^0 = (r_1+r_2) + 2m\left(1+\ln\frac{4r_1r_2}{r_0^2}\right) - \frac{3k}{2}\left[\frac{\pi}{r_0} - \left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)\right]. \tag{4.3.3}$$

与 (4.2.2) 比较可知, 引力电荷产生的时间延迟是

效应 78

$$(\Delta x^0)_k = -\frac{3\pi k}{2r_0} + \frac{3k}{2}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right). \tag{4.3.4}$$

此式表明, 场源电荷的引力作用减小了引力质量产生的效应. 甚至当比值 k/m 足够大时, 上式中的第一项可能引起信号的超前效应.

2. 宇宙项的贡献

将含 λ 项的球对称外部度规代入轨道运动微分方程, 经过类似的推导, 可以得到

$$\Delta x^0 = \int_{\psi 1}^{\psi 2} \frac{r^2}{r_0}\sqrt{1 - \frac{2m}{r_0} - \frac{\lambda r_0^2}{3}}\left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{\lambda r^2}{3}\right)^{-1} \times \left[1 + \frac{m}{r}(3 + e\cos\psi)\right]^{-1} \mathrm{d}\psi - (\Delta x^0)_{m=0}. \tag{4.3.5}$$

积分, 得到宇宙项对时间延迟的贡献:

效应 79

$$(\Delta x^0)_\lambda = \frac{\lambda r_0^2}{3}\left\{(r_1 + r_2) + \frac{r_0^2}{m}\left[1 + \frac{1}{2}\ln\frac{4r_1r_2}{r_0^2}\right] + \frac{r_1^3 + r_2^3}{3r_0^2}\right\}, \tag{4.3.6}$$

可见此效应随 r_0 的增大而增大.

3. 旋转质量源对延迟效应的贡献

旋转质量外部场的各向异性, 要影响电磁信号的延迟. 由 Kerr 度规出发, 经过类似前面几节的推导过程, 保留 a 的一阶项, 得到轨道参量

$$p = r_0(1 + e), \quad e = \frac{r_0}{m\left(1 + \dfrac{2a}{r_0}\right)}. \tag{4.3.7}$$

令 $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, 可以得到信号在赤道面内的传播时间

$$x^0 = (r_1 + r_2) + 2m - \frac{r_0^2}{2}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)\left(1 + \frac{2m}{r_0}\right) + 2m\ln\frac{4r_1r_2}{r_0^2} \mp \frac{8am}{r_0}. \tag{4.3.8}$$

其中比角动量 a 的贡献为

效应 80

$$(\Delta x^0)_a = \mp\frac{8am}{r_0}. \tag{4.3.9}$$

式中的正负号取决于信号相对于 a 的绕行方向, 顺行时取负号, 逆行时取正号. 这就是说, 对于顺行信号, 源的角动量使源质量产生的延迟减小; 对于逆行信号, 则

使其增大. 比角动量 a 对信号延迟产生的这一效应的效特殊性在于, 自一宇宙装置上发出的信号, 经太阳两侧到达地球时, 地球上观察者将发现这两个信号有不同的延迟时间. 因此, 无需测量每个信号的延迟时间, 只要测量两个信号到达的时间差. 这一测量已由两个空间站完成, 其中一个作为发射体, 另一个作为接收器, 测量时它们位于太阳的两侧. 测量结果和理论预言相符合.

第 5 章　引力加速效应

5.1　试验粒子的加速度

在牛顿力学中, 引力场中试验物体的加速度和引力之间的联系由运动方程确定. 场对物体的作用总表现为引力, 没有斥力. 在广义相对论中, 不仅运动方程复杂化了, 而且它们的解释也复杂化了. 比如试验物体在四维空-时中沿短程线运动, 有时看做是自由物体按惯性运动, 不涉及引力和加速度的概念. 但是当采用洛伦兹局部空间截面来研究物体运动时, 就又回到了加速度和力的概念. 这时三维加速度可写为

$$g^i = -\Gamma^i_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}s} = +\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{v^i}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{5.1.1}$$

速度 v^i 属于上述局部截面. 三维速度的大小由纯空间度规给出

$$v = \sqrt{\gamma_{ij}v^i v^j}, \tag{5.1.2}$$

$$\gamma_{ij} \equiv \frac{g_{0i}g_{0j}}{g_{00}} - g_{ij}. \tag{5.1.3}$$

加速度 (5.1.1) 可化为形式

$$\begin{aligned} g^i = \frac{1}{1-\beta^2}\Bigg[&-\frac{\Gamma^i_{00}}{g_{00}} - \frac{2}{\sqrt{g_{00}}}\left(\Gamma^i_{0k} - \frac{g_{0k}}{g_{00}}\Gamma^i_{00}\right)\frac{v^k}{c} \\ &- \left(\Gamma^i_{kj} - \frac{g_{0j}}{g_{00}}\Gamma^i_{0k} - \frac{g_{0k}}{g_{00}}\Gamma^i_{0j} + \frac{g_{0j}g_{0k}}{g_{00}^2}\Gamma^i_{00}\right)\frac{v^j}{c}\frac{v^k}{c}\Bigg]. \end{aligned} \tag{5.1.4}$$

三维加速度的大小也由纯空间度规 γ_{ij} 给出

$$g = \sqrt{\gamma_{ij}g^i g^j}. \tag{5.1.5}$$

如果试验粒子在给定的时刻相对于所选定的参考系静止 (随动参考系), 则有 $v^i = 0$, 加速度简化为

$$g^i(v^i = 0) = -\frac{\Gamma^i_{00}}{g_{00}}. \tag{5.1.6}$$

由 (5.1.4) 可以看出, 引力参量和试验物体参量对加速度都有贡献. 有的参量使试验物体受到吸引, 有的参量则可能使物体受到排斥, 这与牛顿吸力理论中的情况不同.

在非短程线运动的情况下, (5.1.4) 右端还应有非引力产生的附加的加速度.

5.2 Schwarzschild 场中的加速效应

1. $v^1 = 0$ 的情况

在随动系中 ($v^i = 0$), 将 Schwarzschild 度规代入, 得到试验粒子的加速效应:

效应 81

$$g_m = -\frac{m}{r^2}\bigg/\sqrt{1-\frac{2m}{r}}. \tag{5.2.1}$$

由于场的对称性, 加速度只有径向分量. 与牛顿加速度不同, 当 $r \to 2m$ 时, 加速度迅速增大. 在 Schwarzschild 半径附近, 这一效应会很明显.

将灵敏的重力差计安装在空间装置上, 原则上可记录效应 (5.2.1). 目前这种记录仪器可精确到 $10^{-8}\mathrm{m\cdot s^{-2}}$, 比地球引力场中的牛顿加速度小 10^9 倍.

2. $v^i \neq 0$ 的情况

设中性试验粒子沿径向运动, 即 $v^1 \neq 0, v^2 = v^3 = 0$. 这时将 Schwarzschild 度规代入 (5.1.4), 得到加速效应

效应 82

$$g_m^1 = \frac{1}{1-\beta^2}\left[-\frac{m}{r^2} + \frac{m}{r^2}\left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1}\left(\frac{v^1}{c}\right)^2\right]. \tag{5.2.2}$$

式中出现了与牛顿加速度符号相反的项. 当 $v \to c$ 时, 这一项会大于牛顿加速度.

如果在 (5.1.4) 中, 把对本征时的微商变为对坐标时的微商, 则 (5.2.2) 代之以下式:

效应 83

$$\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}x^{0^2}} = \frac{1}{1-\beta^2}\left[-\frac{m}{r^2}\left(1-\frac{2m}{r}\right) + \frac{3m}{r^2}\left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x^0}\right)^2\right]. \tag{5.2.3}$$

这是距场源无限远处标准钟测得的加速度. 只保留 m 的一次项时, 上式简化为

$$\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}x^{02}} \approx \frac{1}{1-\beta^2}\left[-\frac{m}{r^2} + \frac{3m}{r^2}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x^0}\right)^2\right]. \tag{5.2.4}$$

由此可知, 当 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}t \geqslant c/\sqrt{3}$ 时, 试验粒子不再受引力而受斥力. 所以, 远处观察者发现, 具有 $v^1 \geqslant c/\sqrt{3}$ 的试验粒子 (包括光子), 总是受到 Schwarzschild 场的斥力, 阻止其下落.

5.3 引力电荷产生的加速效应

1. 中性试验粒子受到引力推斥

将 R-N 度规 [第一篇 (1.3.9)] 代入 (5.1.6), 得到随动系中测得的加速度

效应 84

$$g_{m,k} = \left(\frac{m}{r^2} - \frac{k}{r^3}\right)\left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{k}{r^2}\right)^{-1/2} \tag{5.3.1}$$

将此式与 (5.2.1) 比较可以发现, 源电荷的引力作用减小了引力质量 m 产生的加速度, 即引力电荷 k 的引力作用是使中性试验粒子受到一种引力推斥作用. 当 $r < k/m$ 时, 推斥大于吸引; 当 $r = k/m$ 时有 $g = 0$. 因此, 试验粒子不到达场源, 而停滞在 $r = k/m$ 处. 可以证明, 在带电荷的场 (第一篇 1.5 节) 中, 试验物体将停滞在较大的距离上.

2. 试验电荷的加速度

在强引力场中, 由于引力和非引力的共同作用, 一些效应可能具有某些新的特点. 我们考查一个试验电荷在 R-N 场中的加速度. 此时在 (5.1.4) 右端应附加一项由库仑力产生的加速度. 取随动系, 得到试验电荷加速度的近似式:

效应 85

$$g_{m,k} = \frac{m}{r^2} - \frac{k}{r^3} \mp \frac{qQ}{\mu r^2 c^2}. \tag{5.3.2}$$

在上式中, 当 q 和 Q 同号时取上边的符号, 异号时取下边的符号. 由上式可见, 当 k/r^3 的值足够大时 (r 很小时可满足), 引力推斥作用可能大于引力吸引加上静电吸引作用.

5.4 Kerr 场中的加速效应

1. Kerr 场中加速度随位置的变化

我们选取随动坐标系, 将 Kerr 度规 [第三篇 (1.14.12)] 代入 (5.1.6), 得到试验粒子的加速度:

效应 86

$$g_{m,a} = \frac{m}{\Sigma^{3/2}(\Sigma - 2m)}\left[\Delta\left(2r^2 - \Sigma\right)^2 + r^2 a^4 \sin^2 2\theta\right]^{1/2}. \tag{5.4.1}$$

式中 $\Delta = r^2 - 2mr + a^2$, $\Sigma = r^2 + a^2\cos^2\theta$. g^i 中除了 g^1 以外, 还有横向分量 $g^2 \neq 0.g^1$, g^2 和 g 都与 r, θ 有关, 即依赖于试验物体的位置. 当 $\theta = 0$ 和 $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ 时有

$$g(\theta=0)\approx\frac{m}{r^2}\left(1-\frac{3a^2}{r}\right),$$
$$g\left(\theta=\frac{\pi}{2}\right)\approx\frac{m}{r^2}\left(1+\frac{a^2}{2r^2}\right). \tag{5.4.2}$$

此式表明, 当角 θ 很小时, 引力源的角动量会使牛顿加速度减小. 令 (4.1.1) 等于 (5.2.1), 可求出 a 的贡献为零的点 (r,θ).

2. 类科里奥利加速度

设试验粒子在赤道面内做圆运动, 在克尔度规中只保留 a 的一次项, 在 (5.1.4) 中略去 v^i 的二次项, 我们得到

效应 87

$$g_{m,a}=\frac{m/r^2}{\sqrt{1-2m/r}}\left[1\pm a\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau}/c\sqrt{1-2m/r}\right]\frac{1}{1-\beta^2} \tag{5.4.3}$$

粒子相对于 $\boldsymbol{a}$ 顺行时, 式中取正号, 逆行时取负号. 粒子顺行时, a 的贡献是附加的吸引; 粒子逆行时, a 的贡献是附加的推斥.

粒子不在赤道面内运动时, 附加的加速度和轨道面的取向有关. 当轨道平面通过源自转轴时, 附加的加速度等于零.

将 (5.1.4) 变到三维矢量时, g_0 具有柯里奥利加速度的形式. 因此将 (5.4.3) 称为类科里奥利加速度.

3. 试验自旋的加速效应

由 Papapetrou 方程出发, 与导出 (5.1.4) 的过程类似, 可以得到含试验自旋的加速度表达式. 当 $v^i=0$ 时, 表达式简化为

效应 88

$$g_{a,s}=-\nabla\left\{\frac{1}{r^s}[mr^2 s\cdot\boldsymbol{a}-3m(\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})]\right\} \tag{5.4.4}$$

由此可以看出, 自旋和场源角动量间的夹角可能影响加速度的符号. 二者平行时则吸引, 反平行时则推斥. 所以, 在旋转场源的引力场中, 两个反平行的试验自旋的加速度应是不同的. 为了显示出引力产生的自旋–自旋效应, 可以计算两个试验物体在实验室条件下的相互作用力.

5.5 其他引力场中的加速效应

1. 宇宙因子项的贡献

将含宇宙项的度规 [第一篇 (1.2.13)] 代入 (5.1.6), 设粒子沿径向落下, 则加速度只有径向分量. 加速度的大小为

效应 89

$$g_{m,\lambda}=\left(\frac{m}{r^2}-\frac{\lambda}{3}r\right)\left(1-\frac{2m}{r}-\frac{\lambda r^2}{3}\right)^{-1/2} \tag{5.5.1}$$

此式表明, 宇宙因子 λ 的作用是使试验粒子受一个附加的斥力. 当 $r=\left(\frac{3m}{\lambda}\right)^{1/3}$ 时, $g_{m,\lambda}=0$. 即在离引力源足够远处, 试验物体可能停滞.

2. 引力波场中的加速效应

由方程 (2.2.4) 可以证明, 在引力波场中两个试验物体的相对加速度为

效应 90

$$\Delta g^{\mu}=-R^{\mu}_{oio}d^{i}. \tag{5.5.2}$$

式中 d^i 为两物体间距离, d^i 远小于引力波的波长; 曲率张量是时间的周期函数. 因此, 两个试验物体间的距离在引力波场中将随时间周期变化.

3. 引力波对自转的影响

假设一质点组位于坐标系的空间原点附近, 以 r^{μ} 表示其中一个质点的位置矢量. 以 $\varepsilon_{\mu\alpha\beta\tau}r^{\beta}$ 乘 (2.2.3) 式, 得到

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\mu\alpha\beta\tau}r^{\beta}\frac{\delta}{\delta s}\frac{\mathrm{d}x^{\alpha}}{\mathrm{d}s}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\varepsilon_{\mu\alpha\beta\tau}r^{\beta}\frac{\mathrm{d}x^{\alpha}}{\mathrm{d}s}+\varepsilon_{\mu\alpha\beta\tau}r^{\beta}\Gamma^{\alpha}_{\lambda\sigma}v^{\lambda}v^{\sigma}\\&=\varepsilon_{\mu\alpha\beta\tau}r^{\beta}F^{\alpha}.\end{aligned} \tag{5.5.3}$$

这里用到了恒等式 $\varepsilon_{\mu\alpha\beta\tau}v^{\alpha}v^{\beta}=0, v^{\mu}$ 为世界线的切矢量. 设在原点的世界线上 $\Gamma^{\mu}_{\nu\tau}=0$, 则 (5.5.3) 可写为

$$\varepsilon_{\mu\alpha\beta\tau}r^{\beta}\frac{\delta}{\delta s}\frac{\mathrm{d}x^{\alpha}}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\varepsilon_{\mu\alpha\beta\tau}r^{\beta}\frac{\mathrm{d}x^{\alpha}}{\mathrm{d}s}+\varepsilon_{\mu\alpha\beta\tau}r^{\beta}\frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{\lambda\sigma}}{\partial x^{\delta}}v^{\lambda}v^{\sigma}r^{\delta}. \tag{5.5.4}$$

在所选择的坐标系中, $R^{\alpha}_{\lambda\sigma\delta}=\partial\Gamma^{\alpha}_{\lambda\delta}/\partial x^{\sigma}$, 由此可将式 (5.5.4) 改写为

$$\varepsilon_{\mu\alpha\beta\tau}r^{\beta}\frac{\delta}{\delta s}\frac{\mathrm{d}x^{\alpha}}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\varepsilon_{\mu\alpha\beta\tau}r^{\beta}\frac{\mathrm{d}x^{\alpha}}{\mathrm{d}s}-\varepsilon_{\mu\alpha\beta\tau}R^{\beta}_{\lambda\sigma\delta}v^{\lambda}v^{\delta}r^{\sigma}r^{\alpha}. \tag{5.5.5}$$

由 (5.5.5) 和 (5.5.3), 对所有质量取和, 得到

$$\sum\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\varepsilon_{\mu\alpha\beta\tau}r^{\beta}\frac{\mathrm{d}x^{\alpha}}{\mathrm{d}s}=\sum\varepsilon_{\mu\alpha\beta\tau}R^{\beta}_{\lambda\sigma\delta}v^{\lambda}v^{\delta}r^{\alpha}r^{\sigma}-\sum\varepsilon_{\mu\alpha\beta\tau}r^{\alpha}F^{\beta}. \tag{5.5.6}$$

如不存在非引力场的力 ($F^{\beta}=0$), 上式简化为

$$\sum\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\varepsilon_{\mu\alpha\beta\tau}r^{\beta}\frac{\mathrm{d}x^{\alpha}}{\mathrm{d}s}=\sum\varepsilon_{\mu\alpha\beta\tau}R^{\beta}_{o\sigma o}r^{\alpha}r^{\sigma}. \tag{5.5.7}$$

由上式可计算地球自转在引力波场中的无规则起伏. 设入射引力波具有连续谱, 计算结果为

效应 91

$$\langle(\Delta L)^2\rangle/L^2 \approx \frac{25\pi G}{\omega^2 c^3}S. \tag{5.5.8}$$

式中 $\langle(\Delta L)^2\rangle$ 是地球角动量的均方起伏, L 是自转角动量, S 是总引力波能流 ($\mathrm{erg}\cdot\mathrm{s}^{-1}\cdot\mathrm{cm}^{-2}$).

4. 引力波场中的谐振子

考虑引力波场中的两个单位质量的物体组成的振动系统. 引进参量 λ, 使每个物体的短程线对应一个 λ 的确定值. 取 (2.2.3) 对 λ 的协变导数, 得到

$$\frac{\delta^2 v^\mu}{\delta\lambda\delta s} = \frac{\delta F^\mu}{\delta\lambda}. \tag{5.5.9}$$

另一方面, 由直接计算得

$$\frac{\delta^2 v^\mu}{\delta s\delta\lambda} = \frac{\delta^2 v^\mu}{\delta\lambda\delta s} + R^\mu_{\alpha\beta\sigma}v^\alpha v^\beta\frac{\partial x^\sigma}{\partial\lambda}. \tag{5.5.10}$$

应用协变微分的对易关系 (5.5.10), 可将 (5.5.9) 写为

$$\frac{\delta^2 v^\mu}{\delta\lambda\delta s} = \frac{\delta^2 v^\mu}{\delta s\delta\lambda} - R^\mu_{\alpha\beta\sigma}v^\alpha v^\beta\frac{\partial x^\sigma}{\partial\lambda} = \frac{\delta F^\mu}{\delta\lambda}, \tag{5.5.11}$$

式中 $\dfrac{\partial x^\sigma}{\partial\lambda}$ 是与世界线正交的单位矢, 而四维速度 v^μ 是与世界线相切的单位矢. 将 $\dfrac{\partial x^\sigma}{\partial\lambda}$ 对 s 求协变导数, 得

$$\frac{\delta}{\delta s}\left(\frac{\partial x^\sigma}{\partial\lambda}\right) = \frac{\delta}{\delta\lambda}\left(\frac{\partial x^\sigma}{\partial s}\right) = \frac{\delta v^\sigma}{\delta\lambda}. \tag{5.5.12}$$

定义一无穷小矢量 n^μ

$$n^\mu \equiv \frac{\partial x^\mu}{\partial\lambda}\mathrm{d}\lambda. \tag{5.5.13}$$

由 (5.5.9)~(5.5.13) 得到

$$\frac{\delta^2 n^\mu}{\delta s^2} + R^\mu_{\alpha\beta\sigma}v^\alpha n^\beta v^\sigma = \frac{\delta F^\mu}{\delta\lambda}\mathrm{d}\lambda. \tag{5.5.14}$$

令

$$n^\mu = r^\mu + \xi^\mu. \tag{5.5.15}$$

式中 r^μ 的定义为 $\dfrac{\delta r^\mu}{\delta s} = 0$(对于所有的 s); 当 $R^\mu_{\alpha\beta\sigma} = 0$ 和振动的内阻尼很大时有 $r^\mu \to n^\mu$. 这样, (5.5.14) 可改写为

$$\frac{\delta^2\xi^\mu}{\delta s^2}+R^\mu_{\alpha\beta\sigma}v^\alpha v^\sigma(r^\beta+\xi^\beta)=f^\mu. \tag{5.5.16}$$

式中 f^μ 表示作用在两物体上的力 (非引力) 之差. 设 f^μ 由恢复力 $-k^\mu_\alpha\xi^\alpha$ 和阻尼力 $-A^\mu_\alpha(\delta\xi^\alpha/\ \delta s)$ 组成, 式中 k^μ_α 和 A^μ_α 是与弹性有关的张量. 我们可以把 (5.5.16) 写成

$$\frac{\delta^2\xi^\mu}{\delta s^2}+A^\mu_\alpha\frac{\delta\xi^\alpha}{\delta s}+k^\mu_\alpha\xi^\alpha=-R^\mu_{\alpha\beta\sigma}v^\alpha v^\sigma(r^\beta+\xi^\beta). \tag{5.5.17}$$

取系统质心的世界线为时间轴, 则振子自由下落. 选一坐标系, 使克里斯托费尔符号为零, 则 (5.5.17) 的近似式为

$$\frac{\mathrm{d}^2\xi^\mu}{\mathrm{d}t^2}+A^\mu_\alpha\frac{\mathrm{d}\xi^\alpha}{\mathrm{d}t}+k^\mu_\alpha\xi^\alpha=-R^\mu_{o\alpha o}r^\alpha. \tag{5.5.18}$$

此式表明, 谐振子的策动力是由引力场决定的黎曼张量. 设引力波为平面波, 并且 k^μ_α 和 A^μ_α 都只有一个分量 $k^1_1=k, A^1_1=A$; 取随动坐标 (笛卡儿系), 使谐振子沿 x^1 方向. 取 (5.5.18) 的傅里叶变换式, 得到

$$\xi^\mu(\omega)=R^\mu_{o\alpha o}(\omega)r^\alpha(\omega^2-i\omega A\delta^\mu_1-k\delta^\mu_1)^{-1}. \tag{5.5.19}$$

在共振条件下, 即当 $-\omega^2+k=0$ 时, 上式有一个极大值. 总耗散 $A=A_i+A_e$, 其中外耗散 A_e 对应的功率 P 可由辅助仪器接收. P 的表示式为

$$P=\frac{1}{2}\omega^2A_e\xi^2=\frac{A_e(R^\mu_{o\alpha o}r^\alpha)^2}{2(A_i+A_e)^2}. \tag{5.5.20}$$

当 $A_i=A_e$ 时 $P=P_{\max}$.

效应 92

$$P_{\max}=\frac{(R^\mu_{o\alpha o}r^\alpha)^2}{8A_i}. \tag{5.5.21}$$

5. CM 场中的加速效应

由电荷 (或磁荷) 和磁矩的引力场度规 [第一篇 (1.6.42)] 出发, 在一级近似下得到

$$\begin{aligned}
\varGamma^1_{00}&=\frac{1}{r^2}-\frac{2m^2}{r^3}-\frac{ke^2}{r^3}\left(1-\frac{3m}{r}\right)-\frac{2\alpha^2p^2}{r^5}\cos^2\theta.\\
\varGamma^2_{00}&=-\frac{\alpha^2p^2}{2r^6}\sin2\theta,\\
\varGamma^1_{11}&=\frac{m}{r^2}+\frac{2m^2}{r^3}-\frac{ke^2}{r^3}\left(1+\frac{3m}{r}\right)+\frac{\alpha^2p^2}{r^5}\cos^2\theta,\\
\varGamma^2_{11}&=\frac{1}{r^2}\left(1+\frac{4m}{r}\right)\frac{\alpha^2p^2}{2r^4}\sin2\theta.
\end{aligned} \tag{5.5.22}$$

代入 (5.1.4), 设试验粒子沿径向下落 ($v = v^1$, 设指向中心的方向为正), 得到

$$g^1 = \frac{1}{1-\beta^2}\left\{\left[\frac{m}{r^2} - \frac{2m^2}{r^3} - \frac{ke^2}{r^3}\left(1-\frac{3m}{r}\right) - \frac{2\alpha^2p^2}{r^5}\cos^2\theta\right] \times\left[1-\frac{2m}{r}+\frac{ke^2}{r^2}+\frac{\alpha^2p^2}{r^4}\cos^2\theta\right]^{-1} + \left[\frac{m}{r^2}+\frac{2m^2}{r^3} - \frac{ke^2}{r^3}\left(1-\frac{3m}{r}\right)+\frac{\alpha^2p^2}{r^5}\cos 2\theta\right]\frac{{v^1}^2}{c^2}\right\}, \tag{5.5.23}$$

$$g^2 = \frac{1}{1-\beta^2}\frac{\alpha^2p^2\sin 2\theta}{2r^6}\left\{\left(1-\frac{2m}{r}\right)-\left(1+\frac{4m}{r}\right)\frac{v'^2}{c^2}\right\} \tag{5.5.24}$$

大质量天体含电荷的量远小于 m, 但含磁荷的量可能很大 (Rubakov and Callan, 1982). 当 $ke^2 \approx m^2$ 时, $\alpha \approx 0$, 此时有

效应 93

$$g = \left(\frac{m}{r^2}-\frac{ke^2}{r^3}\right)\left(1-\frac{2m}{r}+\frac{ke^2}{r^2}\right)^{-1/2} \tag{5.5.25}$$

此式表明, 磁荷的引力作用是使源质量产生的加速度减小, 即右端小于 Schwarzschild 场中的加速度. 在 $r = r_c \equiv \dfrac{e^2}{c^2M}$ 处, 试验粒子的加速度等于零. 越过此界面后, 试验粒子所受的力由引力变为斥力. 这样, 试验粒子停滞在 $r = r_c$ 处, 不落向中心 $r = 0$.

对于缓慢落向天体的磁单极, 当 $m^2 \approx ke^2 (\alpha \approx 0)$ 时, 加速度的近似式可写为

效应 94

$$g = \frac{m}{r^2} - \frac{ke^2}{r^3} \mp \frac{e\tilde{q}}{\mu c^2 r^2}. \tag{5.5.26}$$

式中 $\tilde{q}$ 为磁单极磁荷. 当 e 和 $\tilde{q}$ 同号时上式最后一项取负号, 反之取正号. 在通常情况下, 第一项大于后两项, 磁单极受引力, 即使后一项取负号也如此. 但是当第二项的值大于第一项与第三项之和时 (这一条件在 e 足够大和 r 很小时可能满足), 磁单极仍可能不落向引力中心.

效应 95

磁矩 p 的作用. 由 (5.5.23) 可见, 磁矩 p 的引力作用是使径向加速度减小. 由 (5.5.24) 可知, 下落速度远小于光速的粒子 ($v^1 \ll c$), 横向加速度 g^2 的方向恒指向赤道面; 下落速度接近光速的粒子 ($v^1 \approx c$), g^2 恒指向两极. 这就是说, 落向这类天体的低速粒子将聚集于赤道面附近, 高速粒子将聚集于两极附近区域. 这样, 这类具有磁矩的天体的亮度将不均匀, 或者两极出现亮斑, 或者两极区较为暗弱.

5.6 时钟佯谬的严格讨论

我们把非惯性系中的时钟看作在引力场 [第三篇 (1.1.7)] 中自由下落的标准钟, 计算其运转速率, 从而严格地解决时钟佯谬问题.

如图 10-8 所示, 设钟 C_1 位于惯性系 $(XYZT)$ 的原点 O_1, 钟 C_2 于 $T=0$ 自 O_1 沿 X 轴以恒定加速度 g 运动到 A 点, 再以恒定速度 v 运动到 B 点, 然后以加速度 $-g$ 运动到 C 点; 改变速度的方向之后, 按相反的过程返回 O_1. 钟 C_1 和 C_2 的本征时间分别用 τ_1 和 τ_2 表示. 上述往返过程两钟记录的时间间隔分别为

$$\tau_1 = T = 2(T' + T'' + T''') = 2(2T' + T''), \tag{5.6.1}$$

$$\tau_2 = 2(\tau_2' + \tau_2'' + \tau_2''') = 2(2\tau_2' + \tau_2''). \tag{5.6.2}$$

式中 T', T'' 和 T''' 分别表示惯性系 S_1 中 C_1 所指示的钟 C_2 经过 O_1A, AB 和 BC 各段所经历时间; τ_2', τ_2'' 和 τ_2''' 分别表示钟 C_2 所指示的对应各段时间间隔.

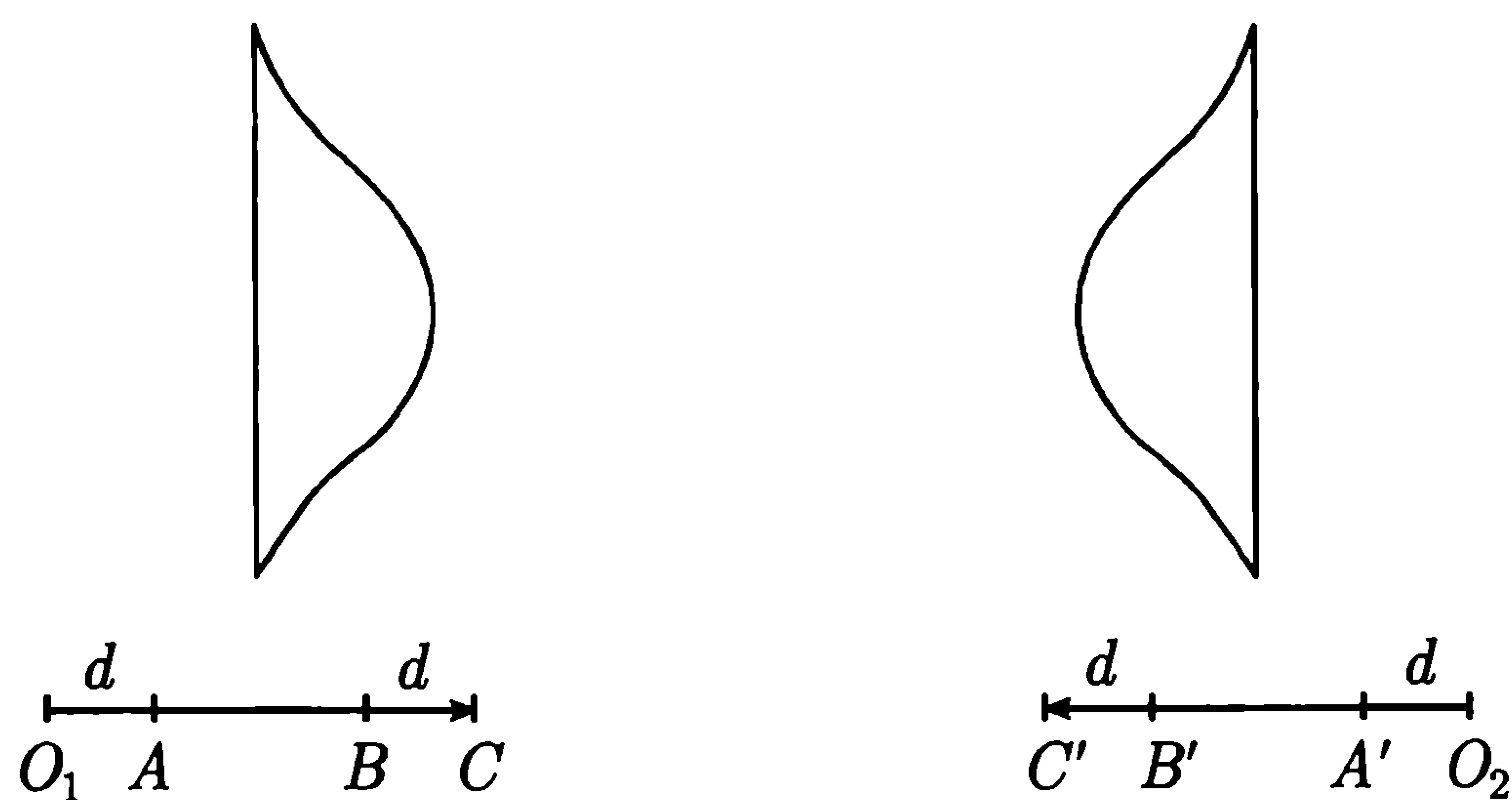


图 10-8

1. 在惯性系 S_1 中研究 C_2 的运动

对于 O_1A 段, 由狭义相对论有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T}\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right) = g, \quad u \equiv \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}T}. \tag{5.6.3}$$

设 $T=0$ 时 $u=0$, 积分得

$$\left.\frac{u}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right|_0^v = gT\Big|_0^{T'}, \tag{5.6.4}$$

由此得到

$$T' = \frac{v}{g\sqrt{1-v^2/c^2}}. \tag{5.6.5}$$

为了计算 τ_2', 只要根据延缓效应 $\mathrm{d}\tau_2 = \sqrt{1-u^2/c^2}\mathrm{d}T$, 将 (5.6.4) 中的 u 解出并代入此式积分

$$\tau_2' = \int_0^{T'} (1 + g^2T^2/c^2)^{-1/2} \mathrm{d}T = \frac{c}{g} \mathrm{sh}^{-1} \frac{gT'}{c},$$

将 (5.6.5) 代入, 得

$$\tau_2' = \frac{c}{g} \mathrm{th}^{-1} \left(\frac{v}{c}\right). \tag{5.6.6}$$

对于 AB 段, 显然有

$$\tau_2' = T'' \sqrt{1 - v^2/c^2}. \tag{5.6.7}$$

将 (5.6.5)~(5.6.7) 代入 (5.6.1) 和 (5.5.2), 得到

$$\frac{\tau_2}{\tau_1} = \frac{2(c/g)\mathrm{th}^{-1}(v/c) + (1 - v^2/c^2)^{1/2} T''}{2(v/g)(1 - v^2/c^2)^{-1/2} + T''} \tag{5.6.8}$$

为了下面的计算, 我们先给出两钟间最大距离 l 的表示式. 由 (5.6.4) 解出 u

$$u = \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}T} = \frac{gT}{\sqrt{1 + g^2T^2/c^2}},$$

积分 ($T = 0$ 时 $X = 0$) 得一双曲线 (图 10-8)

$$X = \frac{c^2}{g} \left[\left(1 + \frac{g^2T^2}{c^2} \right)^{1/2} - 1 \right].$$

将 (5.6.5) 代入, 得到图中的 d, 从而得到 l

$$l = 2d + T_v'' = \frac{2c^2}{g} \left\{ \left(1 + \frac{g^2}{c^2} T_2' \right)^{1/2} - 1 \right\} + T''v. \tag{5.6.9}$$

当两钟间距离最大时它们相对静止, 所以 S_1 系和 S_2 系测得同一个 l 值.

2. *在非惯性系 S_2 中的计算*

在第一段和第三段时间内, S_2 相对于惯性系 S_1 加速. 根据等效原理, 在 S_2 内存在引力场, 度规由第一篇 (1.1.10) 给出

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 + \frac{gx}{c} \right)^2 c^2 \mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2. \tag{5.6.10}$$

C_1 在这一引力场中沿短程线做自由下落运动, 短程线方程可写为

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}s^2} = -g \left(1 + \frac{gx}{c^2} \right) \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} \right)^2. \tag{5.6.11}$$

将 $\mathrm{d}y = \mathrm{d}z = 0$ 代入 (5.6.10) 得

$$\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} \right)^2 = \left[\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} \right)^2 + 1 \right] \Big/ c^2 \left(1 + \frac{gx}{c^2} \right)^2. \tag{5.6.12}$$

将此式代入 (5.6.11) 积分 $\left(t=0\text{时}s=0,\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}=0,x=x_0\right)$, 得到

$$x=\pm\left\{\frac{c^4}{g^2}\left(1+\frac{gx_0}{c^2}\right)^2-s^2\right\}^{1/2}\frac{c^2}{g} \tag{5.6.13}$$

将 (5.6.13) 代入 (5.6.12), 开方后将 ± 号放入 g 内, 得到

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}=\frac{c_2}{g(a^2-s^2)},\quad a=\frac{c^2}{g}\left(1+\frac{gx_0}{c^2}\right).$$

积分得

$$t=\frac{c}{g}\ln\frac{s+a}{s-a}=\frac{c}{g}\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{s}{a}\right),$$

即

$$s=a\mathrm{th}\frac{gt}{c}=\frac{c^2}{g}\left(1+\frac{gx_0}{c^2}\right)\mathrm{th}\frac{gt}{c}. \tag{5.6.14}$$

要计算在 O_2A 段 C_1 记录的时间, 只要在 (5.6.14) 中代入 $x_0=0,t=\tau_2'$, 并注意到 (5.6.6), 得

$$\tau_1'=\frac{s}{c}=\frac{v}{g}. \tag{5.6.15}$$

在 AB 段, 根据延缓效应, 注意到 (5.6.7), 有

$$\tau_1''=\tau_2''\sqrt{1-v^2/c^2}=T''(1-v^2/c^2). \tag{5.6.16}$$

在 BC 段, 在 (5.6.14) 中将 g 换成 $-g$, 代入 $x_0=l,t=\tau_2'''=\tau_2'$, 注意到 (5.6.6), 得到

$$\tau_1'''=\frac{s}{c}=\frac{v}{g}\left(1+\frac{gl}{c^2}\right). \tag{5.6.17}$$

由 (5.6.15)~(5.6.17) 和 (5.6.9), 得到

$$\tau_1=2(\tau_1'+\tau_1''+\tau_1''')=2\left\{T''+\frac{2v}{g}(1-v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}\right\}. \tag{5.6.18}$$

由 (5.6.18), (5.6.6) 和 (5.6.7) 最后得到

效应 96

$$\frac{\tau_2}{\tau_1}=\frac{2(c/g)\mathrm{th}^{-1}(v/c)-(1-v^2/c^2)^{\frac{1}{2}}T''}{2(v/g)(1-v^2/c^2)^{-1/2}+T''}. \tag{5.6.19}$$

非惯性系 S_2 中计算的结果 (5.6.19) 和惯性系 S_1 中计算的结果 (5.6.8) 完全相同, 等式右端总小于 1. 这一结果严格地解决了时钟 (双生子) 佯谬问题 —— 相对于惯性系经历了加速过程的时钟 C_2 发生了延缓. 或者说, 双生子中, 乘飞船去旅行的一个较留在地球上 (惯性系) 的一个年轻.

由严格等式 (5.6.19) 可知, 在一般情况下不能得到狭义相对论的结果

$$\tau^2 = \sqrt{1 - v^2/c^2}\tau_1. \tag{5.6.20}$$

要得到这一结果必须取某种近似条件. 为了与上式比较, 我们把 (5.6.19) 改写为

$$\frac{\tau_2}{\tau_1} = (1 - v^2/c^2)^{\frac{1}{2}} \frac{2(1 - v^2/c^2)^{-1/2}\mathrm{th}^{-1}(v/c) + gT''/c}{2(v/c)(1 - v^2/c^2)^{-1/2} + gT''/c} \tag{5.6.21}$$

有趣的是右端只含有两个参量: v/c 和 gT''/c. Moller(1955) 令 $g \to \infty$, 当然 (5.6.21) 就变成了 (5.6.20). 因此, Moller 的讨论属于 (5.6.21) 的特殊 (近似) 情况. 实际上不需要 Moller 近似条件这样强, 只要有

$$gT''/c \gg (1 - v^2/c^2)^{-1/2}\mathrm{th}^{-1}(v/c), \tag{5.6.22}$$

(5.6.21) 即成为 (5.6.20), 因为 $\mathrm{arth}(v/c) > v/c$, 所以此时 (5.6.21) 右端分子分母中的第一项均可略去.

实际上狭义相对论中诸方案都包含在 (5.6.21) 之中. 狭义相对论方案忽略加速和减速时间意味着 g 足够大或者 T'' 足够大, 使 (5.6.22) 成立.

如果 $T'' = 0, g \neq \infty$, 则上述诸方案都不成立, 此时仍可用 (5.6.21) 解决问题. 为了明显起见, 还可将此式写成级数形式. 注意到 $(1 - v^2/c^2)^{1/2} = 1 - v^2/2c^2 + \cdots$, (5.6.20) 可写为

$$\frac{\tau_2}{\tau_1} = 1 - \frac{1}{6}\frac{v^2}{c^2} + \cdots \tag{5.6.23}$$

此式对两个参考系是完全相同的, 而右端总小于 1.

第 6 章　引力场中的亏损效应

亏损的概念最早是由罗巴切夫斯基引入的, 当时的定义是: 非欧几里得几何中的量和欧几里得几何中对应量的差叫做亏损. 如三角形内角和的亏损、平行四边形的亏损等. 广义相对论中引入了许多量, 在一般情况下这些量和牛顿引力理论中的对应量是不同的. 我们把它们的差称为亏损. 计算广义相对论中一些最基本的量 (时间、长度、质量等) 的亏损是很有意义的, 因为它们不依赖于坐标系的选择. 在广义相对论中, 根据引力场方程和物体的运动方程计算的一些基本的物理量一般作为引力参量、试验参量和其他量的函数. 人们不仅要把这些量与它们的牛顿极限比较, 计算其亏损, 还要将它们在不同情况下的广义相对论值进行比较, 计算其亏损. 比如两邻点本征时的差也叫亏损. 所有这些亏损都属于引力场产生的效应.

6.1　Schwarzschild 场中的亏损效应

1. 恒星坐标周期的亏损

在广义相对论中描述轨道运动, 一方面与在牛顿引力理论中一样, 引入各种周期变化, 有反常周期、恒星周期等; 另一方面又和牛顿引力理论不同, 它们既可以按坐标时确定, 也可以按本征时确定. 对于 Schwarzschild 场中恒星坐标周期 x^0 的变化, 在 Schwarzschild 度规中代入 $\varphi=0,\varphi=2\pi$, 得到

$$T_\varphi=\frac{2\pi p^{3/2}}{\sqrt{mc^2(1-e^2)^3}}\left[1+\frac{3m}{p}(1-e^2)-\frac{3m}{p}(1-e^2)^{3/2}(1+e\cos\varPhi)^{-2}\right]. \tag{6.1.1}$$

式中 $\varPhi$ 是近日点的纬度, T_φ 表示恒星坐标周期. 由此式计算牛顿的开普勒周期, 从而得到周期亏损

效应 97

$$\begin{aligned}\Delta T_\varphi &\equiv T_\varphi(\varphi_1=0,\varphi_2=2\pi)-T_0\\ &=T_0\frac{3m}{p}[(1-e^2)-(1-e^2)^{3/2})(1+e\cos\varPhi)^{-2}].\end{aligned} \tag{6.1.2}$$

这一效应与 m/p 成正比. 按照现代技术对 m/p 的测量精度, 这一效应是可以显示出来的.

由 (6.1.2) 可知, 轨道离心率越大, 效应越明显.

2. 反常本征周期的亏损

假设在 Schwarzschild 场中有一试验物体 (卫星), 绕引力源做圆周运动. 另外有一个试验粒子沿另一圆轨道运动, 轨道中心相对于引力源的运动很小 (可以忽略). 设两轨道在同一平面内, 粒子在不同位置穿过卫星轨道. 相对于卫星轨道, 粒子完成一振动. 由 Schwarzschild 场中的短程线方程, 对于 r- 振动, 得到振动频率的表达式 (按本征时计)

$$\omega = \omega_0 \left[\left(1 - \frac{6m}{r_0}\right) \left(1 - \frac{3m}{r_0}\right) \right]^{1/2} \approx \omega_0 \left(1 - \frac{3m}{2r_0}\right). \tag{6.1.3}$$

与此式对应的反常周期为

$$T_\psi(\psi_1 = 0, \psi_2 = 2\pi) = T_0 \left(1 + \frac{3m}{2r_0}\right). \tag{6.1.4}$$

式中 r_0 是卫星轨道半径, 下标 ψ 指反常的量. 因此, r- 振动的反常本征周期亏损为

效应 98

$$\Delta T_\psi = T_\psi - T_0 = \frac{3m}{2r_0} T_0. \tag{6.1.5}$$

可以证明, θ- 振动和 φ- 振动的周期分别为

$$(T_\psi)_\theta = T_0 \left(1 - \frac{3m}{2r_0}\right), \quad (T_\psi)_\varphi = T_0 \left(1 + \frac{3m}{2r_0}\right),$$

周期亏损分别为

$$\Delta(T_\psi)_\theta = -\frac{3m}{2r_0} T_0, \quad \Delta(T_\psi)_\varphi = \frac{3m}{2r_0} T_0, \tag{6.1.6}$$

由此得

效应 99

$$(T_\psi)_\theta - (T_\psi)_\varphi = -\frac{3m}{r_0} T_0,$$

$$(T_\psi)_\theta - (T_\psi)_r = -\frac{3m}{r_0} T_0. \tag{6.1.7}$$

试验粒子轨道穿过卫星轨道的点的位移依赖于 $(T_\psi)_r$, $(T_\psi)_\theta$ 和 $(T_\psi)_\varphi$. 设地球引力场中卫星轨道半径为 $r = 7000\text{km}$, 当原始位移 $\sim 10\text{cm}$ 时, 广义相对论预言卫星上试验粒子的附加位移 $\sim 10^{-6}$.

3. 本征时间亏损

在广义相对论中, 本征时间是受引力场影响的. 因此, 区分开不同物体的本征

时是有意义的. 除了要区分广义相对论本征时和它的牛顿极限以外, 还要区分两个沿不同轨道的对应的两个本征时间. 在 Schwarzschild 场中, 假设一试验物体绕场源做圆周运动 (如地球的公转), 另一试验物体沿离心率 $e \neq 0$ 的椭圆轨道运动 (如火箭绕太阳运动), 第二个物体穿过第一物体的轨道 (图 10-9). 由 Schwarzschild 度规可以得到本征时间的近似式

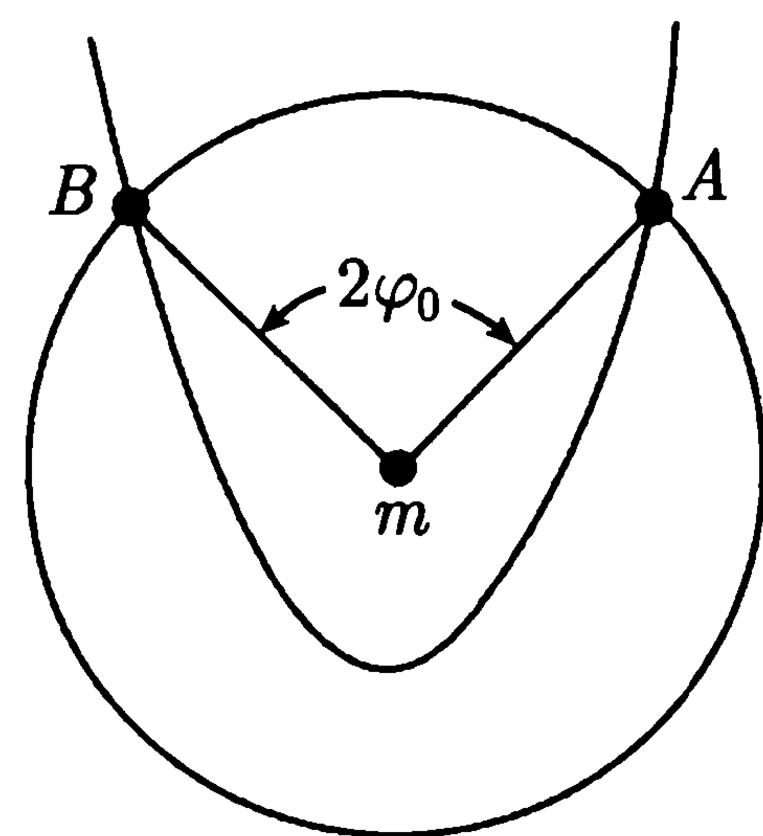


图 10-9

$$s = ct_0 - \frac{c}{2}\int_0^{t_0}\left(\frac{2m}{r}+\frac{v^2}{c^2}\right)\mathrm{d}t = (t_0 - \Delta t)c.$$

首先, 对于半径为 R 的圆轨道, 上式给出对牛顿时间的修正:

效应 100

$$(\Delta s)_{e=0} = \frac{3m}{2R}ct_0 = 3c\sqrt{\frac{m}{R}}\varphi_0,$$
$$t_0 = \frac{2\varphi_0}{\omega_0} = 2\varphi_0\left(\frac{R^3}{m}\right)^{1/2} \tag{6.1.8}$$

式中 φ_0 是物体相对于引力中心的角位移.

对于图中 AB 间的运动, 沿两个轨道本征时间的亏损为

效应 101

$$\Delta s = (\Delta s)_{e=0} - (\Delta s)_{e\neq 0}$$
$$= (\Delta s)_{e=0}\left[1 + \frac{1-e^2}{3(1-e\cos\varphi_0)} - \frac{4}{3}\frac{1-e\cos\varphi_0}{\varphi_0}\int_{\varphi_0}^{\pi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{1-e\cos\varphi}\right]. \tag{6.1.9}$$

当 $e=0$, $\varphi_0 = \dfrac{\pi}{2}$, 即两个轨道为同一个圆, 但两个试验物体绕行方向相反时, 由上式得 $\Delta s = 0$.

设火箭由地球上发射, 以 58 km·s^{-1} 速度沿一抛物线运动, 当它返回地球时已经过两周, 转过角度 $2\varphi_0 = 1.04\text{rad}$. 按上式计算, 火箭上的钟落后 0.19s. 本征时间亏损效应也为测量引力红移的实验所证实.

4. 试验自旋对时间亏损的贡献

引力频率是和时间亏损相联系的. 由 (1.3.11) 可知, 引力频率和相应的时间亏损不仅和场源参量有关, 而且和试验物体参量有关. 当试验自旋做轨道运动时, 其自旋起重要作用. 该物体的绕行运动本身也可以作为计时的钟. 设两个试验自旋在 Schwarzschild 场中沿同一圆轨道运动, 其方向相反: 一个与轨道角动量平行, 另一个反平行. 将 Schwarzschild 度规代入巴巴别特鲁运动方程, 第一次积分给出

$$\varepsilon = \left(1-\frac{2m}{r}\right)x^0 \pm \frac{m}{r}S\dot{\varphi},$$

$$h = r^2\dot{\varphi} \pm \left(1 - \frac{2m}{r}\right) S\dot{x}^0. \tag{6.1.10}$$

由此可得绕行角速度的近似式：

$$\dot{\varphi} = \omega_0 \left(1 + \frac{3m}{2r} \mp \frac{S}{\sqrt{mr}}\right), \tag{6.1.11}$$

代入 $g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 1$, 对圆轨道积分, 得到本征时间亏损：

效应 102

$$s = T_0 \left[1 - \frac{m}{r} + \omega_0^2 r^2 \left(1 + \frac{3m}{r} \mp \frac{2S}{\sqrt{mr}}\right)\right]. \tag{6.1.12}$$

此式表明本征时间亏损和试验自旋有关.

由 (6.1.11) 可见, 本征时间亏损的原因是两个试验自旋相遇点的移动：

效应 103

$$(\Delta\varphi)_{m,s} = \frac{4\pi S}{\sqrt{mr}}. \tag{6.1.13}$$

在人造地球卫星上安装两个反平行的陀螺, 可以测量这一引力效应.

5. 双星周期的亏损

Will(1976) 证明了, 在非守恒引力理论中, 双星系统的质心要向着近星点自加速, 加速度的大小为

$$\boldsymbol{a} = \frac{\pi m_1 m_2 (m_2 - m_1) e}{T m^{3/2} p^{3/2}} (\alpha_3 + \zeta_2) \hat{\boldsymbol{n}}_p. \tag{6.1.14}$$

式中 $m = m_1 + m_2$, $\hat{\boldsymbol{n}}_p$ 是质心到 m_1 轨道近星点的单位矢量. 由于多普勒频移, 这种轨道效应将使脉冲双星的脉冲周期和轨道周期发生亏损 (在地球上观测). 代入脉冲双星 PSR1913+16 的各数据, 得到久期亏损：

效应 104

$$\frac{\langle T \rangle}{T} \approx -2.5 \times 10^{-9} (\alpha_3 + \zeta_2) \frac{X(1-X)}{1+X^2} \left(\frac{m}{m_\odot}\right)^{2/3} \cdot \sin\varphi_0 \mathrm{a}^{-1}. \tag{6.1.15}$$

式中 $X = m_1/m_2; \varphi_0$ 为近星点进动角, 观测值为 $\varphi_0 \approx 4''.2\mathrm{a}^{-1}$.

6. 圆轨道振子振动次数的亏损

附加反常 (2.6.5) 产生的二次效应是振动次数的变化. 当 $\Omega^2/\omega_0^2 \gg 1$ 时, 假设远处观察者测得卫星在时间 t 内绕行 N 圈, 我们得到

效应 105

$$\Delta n_N \approx \frac{3}{2} \frac{m}{r_0} \frac{t}{T_0}, \quad t = NT, \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}. \tag{6.1.16}$$

令 $\Delta n=1$, 得到 $\Delta t=\frac{2}{3}\frac{r_0T}{m}$, $n=\frac{2r_0}{3m}$. 这就是说, 在时间 $\Delta t(\Delta n=1)$ 内, 即振动总次数为 $n(\Delta n=1)$ 时, 积累了一次附加振动. 假设在太阳的引力场中, $\Omega=100\text{Hz}$, 则积累一次附加振动需经历的总振动次数 $\sim 10^7$.

7. 轨道运动速度和位移的亏损

在球对称引力场中, 由于广义相对论和牛顿引力理论具有完全不同的场方程和试验粒子运动方程, 所以 Schwarzschild 场中运动物体的径向坐标变化、横向坐标变化和各速度分量都与牛顿理论不同. 相应的广义相对论应效应称位移 (坐标) 亏损和速度亏损 (**效应 106**). 由于这一效应的表达式太复杂, 这里只给出了径向坐标亏损和横向速度亏损的函数曲线 (图 10-10、图 10-11). 这一效应表明, 试验物体在球对称引力场中做轨道运动时, 广义相对论和牛顿理论给出的对应位置的不同和对应速度的不同. 由图可见, 当试验物体绕行 2 周时有

$$r_N\Delta\varphi\equiv r_N(\varphi_N-\varphi_{GR})=11000\text{km}.$$

Lass 和 Solloway(1969) 指出, 用无线电定位装置测出这一效应是完全可能的.

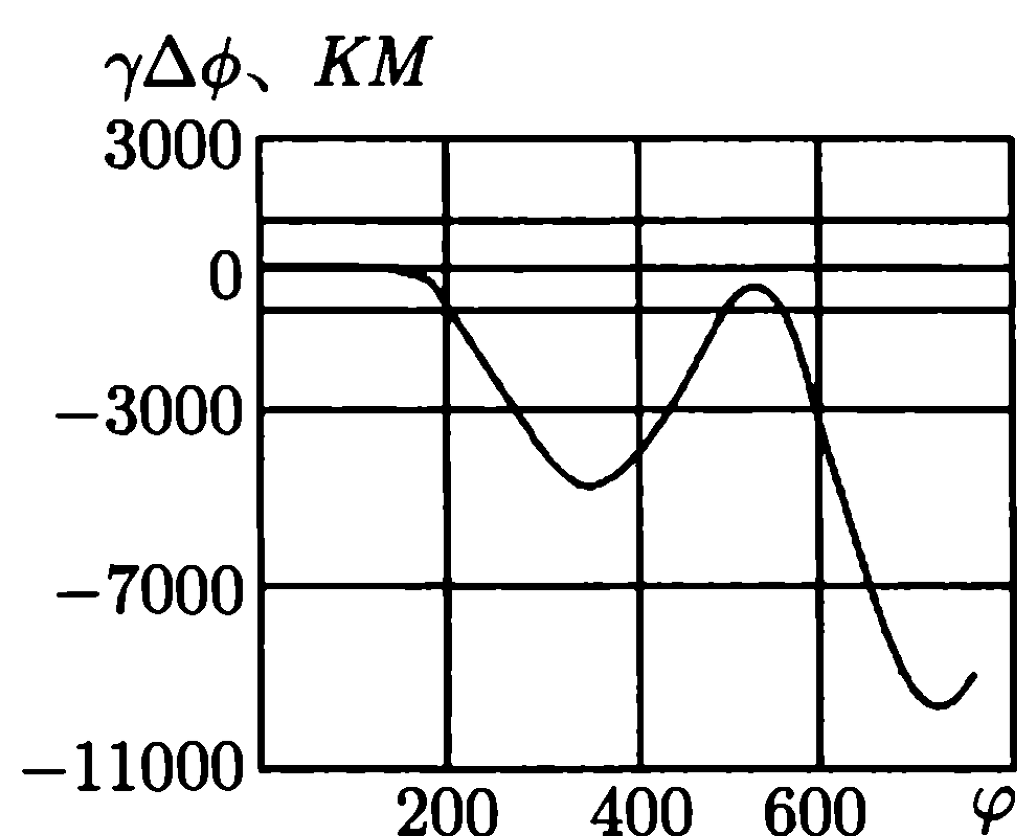


图 10-10

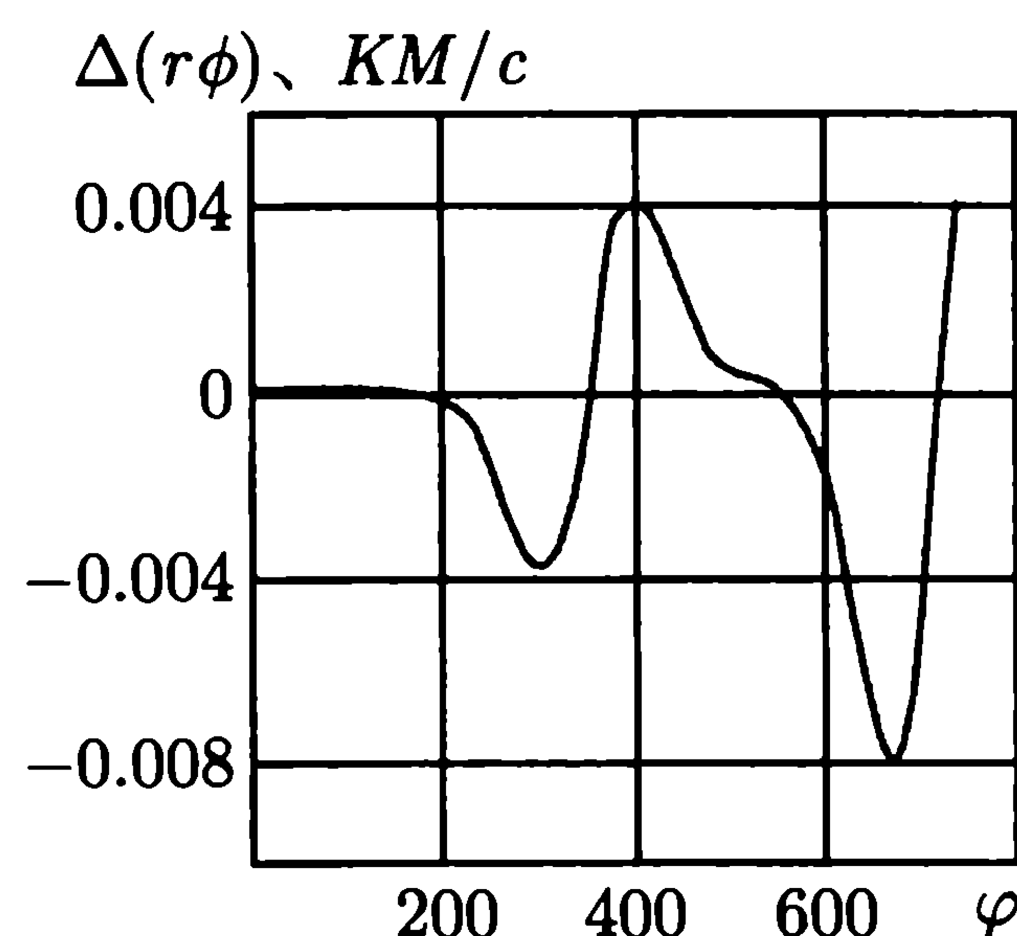


图 10-11

6.2 Kerr 场中的亏损效应

1. 本征反常周期的亏损

在 Kerr 场中, 存在与效应 (6.1.7) 对应的本征反常周期的亏损. 设卫星轨道在赤道面上, 解 Kerr 场中的运动方程, 保留 a 的一次项, 得到振动周期的表达式

$$T_r=T_\varphi=T_0\left(1+\frac{3m}{2r_0}\right)\left[1+\frac{4a}{r_0}\left(\frac{m}{r_0}\right)^{3/2}\right],$$

$$\varGamma_\theta=T_0\left(1-\frac{3m}{2r_0}\right)\left[1-\frac{4a}{r_0}\left(\frac{m}{r_0}\right)^{3/2}\right]. \tag{6.2.1}$$

这时与牛顿极限比较, 本征反常周期亏损为

效应 107

$$
\begin{aligned}
&\Delta T_r \equiv T_r - T_0 = T_0 \frac{3m}{2r_0}\left[1 + \frac{8a}{3m}\left(\frac{m}{r_0}\right)^{3/2} + \frac{4a}{r_0}\left(\frac{m}{r_0}\right)^{3/2}\right],\\
&\Delta T_\varphi = \Delta T_r,\\
&\Delta T_\theta \equiv T_\theta - T_0 = T_0 \frac{3m}{2r_0}\left[-1 - \frac{8a}{3m}\left(\frac{m}{r_0}\right)^{3/2} + \frac{4a}{r_0}\left(\frac{m}{r_0}\right)^{3/2}\right].
\end{aligned}
\tag{6.2.2}
$$

将 T_r 与 T_θ、T_φ 比较, 得到周期亏损的表达式

效应 108

$$
(\Delta T)_a \equiv T_\theta - T_r = T_\theta - T_\varphi = -\frac{8a}{r_0}\left(\frac{m}{r_0}\right)^{3/2} T_0. \tag{6.2.3}
$$

如果试验物体轨道不在赤道面内, 在一般情况下, 上述效应和轨道角动量与 $\boldsymbol{a}$ 的夹角有关.

2. *两个试验物体相遇点的移动*

由克尔场短程线方程的第一次积分可以得到, 沿圆轨道运行的周期依赖于粒子的绕行方向. 对于本征恒星周期有

$$
T_{\varphi\pm} = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{m}}\sqrt{1 - \frac{3m}{r} \mp \frac{2a}{r}\sqrt{\frac{m}{r}}}. \tag{6.2.4}
$$

因此, 本征恒星周期亏损为

效应 109

$$
(\Delta T_\varphi)_a = T_{\varphi+} - T_{\varphi-} = -\frac{a}{r}\sqrt{\frac{m}{r}} T_0. \tag{6.2.5}
$$

式中下标 φ 表示恒星的量, 与 (6.2.1) 中的反常周期不同.

相对于 $\boldsymbol{a}$, 顺行物体上的钟所指示的时刻要比逆行的早一些. 在地球的轨道上, 这一亏损为 0.65×10^{-3}s. 顺行粒子和逆行粒子的角速度是不同的, 由上述效应可以得到

$$
\omega_\pm = \pm\omega_0(1 \pm a\omega_0)^{-1}, \quad \omega_0 = \sqrt{m/r^3}. \tag{6.2.6}
$$

这就是说, 绕行方向相反的试验物体在相同的时间里通过不同的路程, 以角位移表示, 即

$$
\varphi_\pm = \pm\pi(1 \pm a\omega_N). \tag{6.2.7}
$$

因此, 在克尔场中, 两个沿同一圆轨道反向绕行的试验物体的相遇点将移动

效应 110

$$
(\Delta\varphi)_a = 2\pi a\sqrt{m/r^3}. \tag{6.2.8}
$$

位移以顺行方向为正.

6.3 引力波场中的亏损效应

1. 脉冲周期的亏损

如果在真空中, 经过相同的时间 Δt 发射电磁脉冲, 沿 $x^1 = x$ 方向传播. 在几何光学近似下, 脉冲沿零短程线传播, 且 $\mathrm{d}x^0 = \mathrm{d}x$. 在平面引力波场中, 此式变为 $\mathrm{d}x^0 = \left[1 - \frac{1}{2}p_{22}(t,x)\right]\mathrm{d}x$. 在时刻 t_1 和 t_2 发射的两个光脉冲通过相同的距离 $\mathrm{d}x$, 用了不同的时间间隔:

$$c\mathrm{d}\delta(t) = \frac{1}{2}[p_{22}(t_1,x) - p_{22}(t_2,x)]\mathrm{d}x,$$

式中 $\delta(t)$ 表示脉冲沿时间轴的移动. 如果假设引力波波源是一双星, 则两个脉冲达到观察者的周期变化 (亏损) 为

效应 111

$$\Delta T = \delta(t) = \frac{\pi\alpha\Delta t}{c\tau}\int_{-b_1}^{b_2}\frac{b^4 - b^2x}{(b^2+x)^{5/2}}\sin\left[2\omega t + 2\frac{\omega}{c}(x - \sqrt{x^2-b^2})\right]\mathrm{d}x. \qquad (6.3.1)$$

式中 $\alpha = \alpha(m_1, m_2, \tau), m_1$ 和 m_2 是双星的两个质量, $\tau = 2\pi/\omega$ 是双星周期. 当图 10-12 中的 $d = \lambda_{GV}$ 时, 此效应明显. 在光学近似下, 设 $m_1 \approx m_2 \approx 10^2 M_\odot, \tau \approx$ 10 天, 则脉冲周期的相对亏损是

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} \sim 10^{-14}.$$

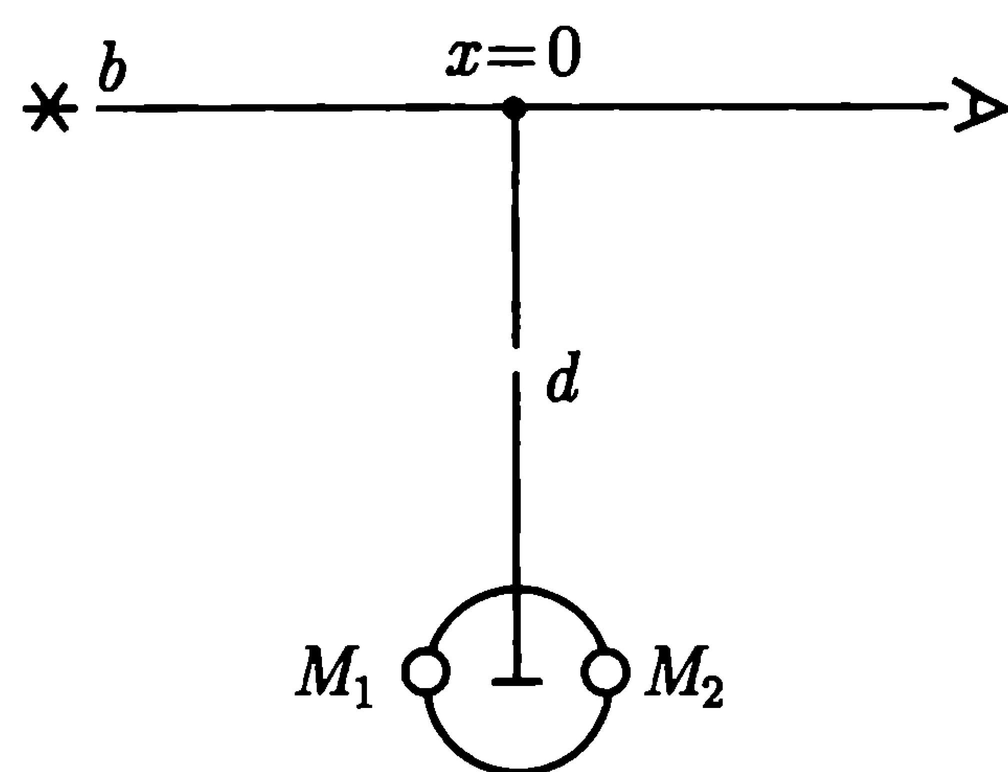


图 10-12

2. 干涉图样的周期性移动

充满引力辐射的空间可以看作折射率为 $n = 1 + \frac{1}{2}h_{\alpha\beta}n^\alpha n^\beta$ 的介质. 由于沿波的传播方向 $n = n_{//} = 1$, 沿垂直方向 $n = n_\perp = 1 + \frac{1}{2}p_{22}\cos 2\varphi + \frac{1}{2}p_{23}\sin 2\varphi$(Zeldovich and Novikov,1971), 于是就产生了长度亏损, 如果在引力波场中放置一个干涉仪, 使一个臂沿着波的传播方向, 则应产生光程差 $l(n_{//} - n_\perp)$. 假设引力波的周期远大于光线通过干涉仪的时间, 我们得到干涉图样的移动:

效应 112

$$\Delta l \approx \frac{1}{2}lp_{22}. \qquad (6.3.2)$$

取 $l = 10^3$cm, 观测时间为 1s, 则上述效应的大小为 $10^{-7} \sim 10^{-4}$. 现在, 许多实验中心根据上述效应来寻找引力辐射.

6.4　质量亏损效应

广义相对论预言, 当粒子由无引力区域结合成引力质量时, 质量的一部分要被辐射出去. 本节中, 我们将计算球对称球壳和固体球的质量亏损.

1. Schwarzschild 场中的质量亏损

由等效原理可知粒子的引力质量等于其惯性质量. 由于动能和势能可以转化为惯性质量, 所以也就可以转化为引力质量. Schwarzschild 场中的源质量 m 就包含有与引力场本身质量相应的自能. 把这一质量 m 和组成它的所有粒子都在无穷远处时所具有的质量进行比较, 便可求得上述质量亏损. 为此, 先求出引力场中一个试验粒子的质量和它在无限远处质量之间的关系式. 取 $c=G=1$ 的自然单位系.

试验粒子的质量亏损　Schwarzschild 场中短程线方程 ($\mu=0$ 分量) 的第一次积分为

$$\left(1-\frac{2M}{r}\right)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}=A, \tag{6.4.1}$$

式中 M 为场源质量, A 为一常量. 当 $r\to\infty$ 时度规应是闵可夫斯基的, $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\to A$. 在狭义相对论中, 静止质量为 m_0 的粒子, 相对论总能量表示为

$$m_0\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}=m. \tag{6.4.2}$$

与此类似, 我们可以这样解释 (6.4.1) 中的常量 $A:m_0A$ 是引力场中自由粒子的总能量, 其中包含静能、动能和引力势能. 这样, 在 Schwarzschild 场中, 静止质量为 m_0 的粒子的总能量可写为

$$E=\left(1-\frac{2M}{r}\right)m_0\left\{\left(1-\frac{2M}{r}\right)-\left[\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}r^2+r^2\dot{\theta}^2+r\sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right]\right\}^{-1/2} \tag{6.4.3}$$

粒子沿任一条短程线运动时, 保持总能量不变. 当这个粒子由无限远处移至 Schwarzschild 场内时, 在有心力作用下获得动能. 当粒子运动到场内某一点静止时, 这些动能便以热能和其他形式的能量辐射出去. 这一能量损失等于粒子静止质量的减少. 令 $\dot{r}=\dot{\theta}=\dot{\varphi}=0$, 得到

$$\bar{m}_0=\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{1/2}m_0,$$

或

效应 113

$$\Delta m = m_0(\sqrt{1-2M/r}-1). \tag{6.4.4}$$

式中 $\bar{m}_0$ 是粒子自无限远处运动至场中 r 处静止下来之后具有的静止质量, m_0 是它的惯性静质量. 在引力场中, 静止粒子的能量 $\bar{m}_0$ 由惯性静止质量 m_0 和引力势能两部分组成

$$\bar{m}_0 = m_0 + m_0\left[\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{1/2}-1\right]. \tag{6.4.5}$$

均匀球壳的质量亏损 设球壳半径为 a, 厚度可忽略, 质量为 M, 在它自己产生的引力场中. 考虑球壳表面上一质量元 $\mathrm{d}M$. 设它在无限远处时质量为 $\mathrm{d}M_0$ 则由 (6.4.4) 有

$$\mathrm{d}M_0 = \left(1-\frac{2M}{a}\right)^{-1/2}\mathrm{d}M \tag{6.4.6}$$

积分上式 $\left(\int_0^{M_0} \text{和} \int_0^{M}\right)$, 得到

效应 114

$$M = M_0 - \frac{M_0^2}{2a}. \tag{6.4.7}$$

式中 M_0 是组成球壳的物质分散在无限远处时的惯性静止质量, M 是这些物质形成球壳之后球壳的质量. 由上式可见, M_0 一定时, 壳半径 a 越小, 则有效引力质量 M 也越小. 当 $a = M_0$ 时, M 减至最小值

$$M_{\min} = \frac{1}{2}M_0. \tag{6.4.8}$$

另一方面, M 作为 M_0 的函数 $M(M_0)$ 有极大值. 令 $\dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}M_0} = 0$ 得 $M_0 = a$, 此时有

$$M_{\max} = \frac{a}{2}. \tag{6.4.9}$$

这时壳半径等于 Schwarzschild 半径. 所以, 能够辐射出去的最大质量是 $\dfrac{1}{2}M_0$.

效应 115 均匀固体球的质量亏损 设固体球的密度为 ρ_0, 半径为 a, 则式

$$M = \frac{4\pi}{3}\rho_0 a^3 \tag{6.4.10}$$

可作为 ρ_0 的定义. 设半径为 r 的球面上厚度为 $\mathrm{d}r$ 的一层质量元 $\mathrm{d}m$ 在无限远处时具有质量 $\mathrm{d}M_0$, 则由 (6.4.6) 得

$$\mathrm{d}M_0 = 4\pi r^2\rho_0\left(1-\frac{8\pi r^2\rho_0}{3}\right)^{-1/2}\mathrm{d}r. \tag{6.4.11}$$

积分 $\left(\int_0^{M_0} \text{和} \int_0^a\right)$, 得到

$$M_0 = 2\pi\rho_0\mu_0^3\left[\arcsin\frac{a}{\mu_0} - \frac{a}{\mu_0}\left(1-\frac{a^2}{\mu_0^2}\right)^{1/2}\right]. \tag{6.4.12}$$

式中 $\mu_0 \equiv \left(\frac{3}{8\pi\rho_0}\right)^{1/2}$. 上式也可由 Schwarzschild 内部解直接得到. 将 (6.4.10) 代入上式, 得到 M_0 和 M 之间的关系:

效应 116

$$M_0 = \frac{3a}{4}\left[\left(\frac{a}{2M}\right)^{1/2}\sin^{-1}\left(\frac{2M}{a}\right)^{1/2} - \left(1-\frac{2M}{a}\right)^{1/2}\right]. \tag{6.4.13}$$

由函数 (6.4.13) 的数值曲线可以得到均匀固体球的最大质量亏损 (或称束缚能).

效应 117

$$(\Delta M)_{\max} = 0.5756M_0. \tag{6.4.14}$$

2. R-N 场中的质量亏损

荷电试验粒子的质量亏损. 设场源质量为 M, 电荷为 Q, 试验粒子的质量为 m_0, 电荷为 e. 这一试验粒子在 R-N 场 [第一篇 (1.3.9)] 中的运动方程为

$$\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}s} = \Gamma^\mu_\alpha\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}s}\frac{e}{m_0}. \tag{6.4.15}$$

取 $\mu=0$ 有

$$F^0_\alpha\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}s}\frac{e}{m_0} = e\left(-\frac{\partial\phi}{\partial x^\alpha}\right)\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1}\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}s}. \tag{6.4.16}$$

式中 ϕ 为静电势. 由上式可得

$$F^0_\alpha\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}s}\frac{e}{m} = -e\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}s}. \tag{6.4.17}$$

将此式代入 (6.4.15), 得到第一积分

$$m_0\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right) + e\phi = A. \tag{6.4.18}$$

类似于由 (6.4.1) 到 (6.4.4) 的讨论, 可知 A 的含义为粒子在引力场中的总能量 $\bar{m}_0$, 再令 $\theta = \dot{r} = \dot{\varphi} = 0$, 求出 $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}$, 从而得到试验粒子 (m_0, e) 的质量亏损

效应 118

$$\Delta m = \bar{m}_0 - m_0 = m_0 \left[\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right)^{1/2} - 1 + \frac{e}{m_0} \varphi \right]. \qquad (6.4.19)$$

对 R-N 场中的中性试验粒子, 可在上式中令 $e = 0$. 这时得到中性粒子由无限远处移到引力电荷的场中时所发生的质量亏损 (Ivanitzkaya, 1979):

效应 119

$$(\Delta m)_{M,k} = m_0 \left(\sqrt{1 - \frac{2M}{r} + \frac{k}{r^2}} - 1 \right). \qquad (6.4.20)$$

这一效应可用来估计试验粒子落向引力源时引力辐射的能量.

下面计算荷电情况下球壳和球体的质量亏损. 为了简化计算步骤, 我们设 $Q/M = \alpha = \text{const}, e/m = \text{const}$. 这个假设的含义是, 在质量亏损过程中电荷也成正比地亏损.

均匀荷电球壳的质量亏损 与得到 (6.4.6) 的过程类似, 可以得到

$$\mathrm{d}M_0 = \left(1 - \frac{M}{a} \alpha^4 \right) \left(1 - \frac{2M}{a} + \frac{\alpha^2 M^2}{a^2} \right)^{-1/2} \mathrm{d}M. \qquad (6.4.21)$$

积分 $\left(\int_0^{M_0} \text{和} \int_0^{M} \right)$, 得到质量 M_0 和 M 的关系式:

效应 120

$$M_0 = \int_0^M \left(1 - \frac{M}{a} \alpha^4 \right) \left(1 - \frac{2M}{a} + \frac{\alpha^2 M^2}{a^2} \right)^{-1/2} \mathrm{d}M. \qquad (6.4.22)$$

均匀荷电固体球的质量亏损 设半径为 r 的球面上厚 $\mathrm{d}r$ 的一层质量元在无限远处的质量为 $\mathrm{d}M_0$, 球体质量密度为 ρ_0, 则由 (6.4.21) 有

$$\mathrm{d}M_0 = \left(1 - \frac{4\pi}{3} \rho_0 \alpha^4 r^2 \right) \left(1 - \frac{8\pi}{3} \rho_0 r^2 + \frac{16\pi^2}{9} \rho_0^2 \alpha^2 r^4 \right)^{-1/2} \cdot 4\pi \rho_0 r^2 \mathrm{d}r.$$

由此可以得到均匀荷电球体的质量 M_0 与 M 的关系式:

效应 121

$$M_0 = \int_0^a 4\pi \rho_0 \left(1 - \frac{4\pi}{3} \rho_0 \alpha^4 r^2 \right) \left(1 - \frac{8\pi}{3} \rho_0 r^2 + \frac{16\pi^2}{9} \rho_0^2 \alpha^2 r^4 \right)^{-1/2} r^2 \mathrm{d}r,$$

$$M = \frac{4\pi}{3} a^3 \rho_0, \quad Q = \alpha M. \qquad (6.4.23)$$

3. 宇宙因子对质量亏损的影响

由含宇宙项的度规 [第一篇 (1.2.13)] 出发, 与获得 (6.4.20) 类似, 可得到短程线方程的第一积分

$$\varepsilon = m_0 = \bar{m}_0\left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\lambda r^2}{3}\right), \tag{6.4.24}$$

与 (6.4.20) 对应, 得到试验粒子的质量亏损

效应 122

$$\Delta m = m_0\left(\sqrt{1 - \frac{2M}{r} - \frac{\lambda r^2}{3}} - 1\right). \tag{6.4.25}$$

第 7 章　其他引力效应

本章讨论几种类光学引力效应, 其中包括引力史塔克效应, 引力透镜效应和宇宙空间的光学各向同性效应等. 还有一些引力效应未列入本章, 分别在其他各篇中讨论, 如第五篇讨论引力坍缩放应和磁抵抗引力坍缩效应, 第六、七、八篇讨论了宇宙学效应.

7.1　类光学引力效应

有些广义相对论效应和物理学其他部分的一些效应很相似, 特别是与一些光学效应相似. 有时引力场代替电磁场, 可以产生类似的光学效应; 有时由于引力波对电磁波的作用, 在几何光学近似下产生一些引力光学效应. 特别是随着技术的发展, 用现代技术可能研究引力场中的电磁辐射, 这更加激发人们研究广义相对论中波动过程和光学现象的兴趣. 另一方面, 解决广义相对论中一些理论问题 (如能量问题) 时, 也经常采用与电动力学类比的办法, 注意二者之间的各种相似性. 本节将讨论一系列类光学引力效应, 与前几章中的许多部分一样, 一般只简略地给出主要结果.

1. Schwarzschild 场中的引力史塔克 (Stark) 效应

在电场的作用下光谱线会发生分裂 (频移), 这一效应称为史塔克效应. 对于线性史塔克效应, 谱线的频移和电场强度成正比. 人们曾经假设用引力场代替电场也能发生类似的效应, 并给出了 Schwarzschild 场中这一效应的表达式

效应 123

$$(\Delta\nu)_m = \frac{A_m}{r^2}\left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1/2} \tag{7.1.1}$$

式中 A 是比例系数. Polozov (1978) 用量子力学方法 (狄拉克方程) 研究了这一问题, 也得到了引力史塔克效应.

将 (7.1.1) 展开, 第一项在太阳的引力场中产生的效应为 $\sim 10^{-24}$, 比同样条件下的爱因斯坦引力红移要小得多. 当天体的质量 $M \approx M_\odot$, 半径 $R \approx 1.2\times 10^6$m 时, 引力斯塔克效应可增大到 10^{-15}, 这时才可能用现代技术测出来. 由 (7.1.1) 可以发现, 当 $r \to 2m$ 时, 此效应增大.

2. Schwarzschild 场中的引力切连科夫 (Cherenkov) 辐射

真空中匀速运动的荷电粒子不会发生辐射. 但是在介质中, 荷电粒子即使做匀

速运动, 只要其速度大于介质中光的相速度 $\frac{c}{n}$(n 为折射率), 就会产生一种特殊的辐射. 这种"超光速"荷电粒子产生的辐射称为切连科夫辐射. 这一辐射的频率依赖于介质的折射率 n. 由 Schwarzschild 场中的麦克斯韦协变方程可以得到

$$D = \frac{E}{\sqrt{g_{00}}}, \quad B = \frac{H}{\sqrt{g_{00}}},$$

即 Schwarzschild 场的折射率

$$n = (g_{00})^{-1/2} \approx 1 + \frac{m}{r} > 1. \tag{7.1.2}$$

按照相似性可以假设, 如果一个荷电粒子在 Schwarzschild 场中运动的速度大于 $\frac{c}{n}$, 应该有辐射. 这种引力切连科夫辐射的频率上限可以表示为

效应 124

$$(\omega)_m = \frac{pc}{\hbar}\sqrt{1 - \frac{2m}{r}}\frac{r}{m}\left(1 - \frac{c}{v}\sqrt{1 - \frac{2m}{r}}\right). \tag{7.1.3}$$

太阳表面 $n < 1.001$, 所以这一效应只可能在大质量恒星和星系核一类天体的引力场中显示出来.

3. 引力塞曼 (Seeman) 效应

在一定意义上, 旋转质量外部的引力场类似于磁场. 因此可以期望, Kerr 场中的一系列引力效应与磁场中的效应类似. Zeldovich(1965) 指出, Kerr 场中的电磁辐射存在引力塞曼效应. 如果在旋转场源的两极附近放置一个振荡器, 发出一束线偏振光, 则这一线偏振光将分解为两束圆偏振光的组合, 其频率分别为 $\omega_0 + \Omega$ 和 $\omega_0 - \Omega$, $\Omega \sim \frac{2m\omega}{r}$, ω 是场源旋转角速度. 因此远处观察者将发现光谱线的分离:

效应 125

$$(\Delta\omega)_a = 2\Omega = 4\frac{m}{r}\omega. \tag{7.1.4}$$

4. 引力萨亚克 (Saniak) 效应

当试验粒子在 Schwarzschild 场中沿圆轨道运动时, 延迟效应由 (4.1.13) 给出. 可以证明, 当试验粒子在克尔场中运动时, 延迟效应表示为

$$(\Delta x^0_{de})_\pm = 2\pi\left(\sqrt{mr} \pm \frac{am}{r}\right) = T_0\left(\frac{m}{r} \pm \frac{am\sqrt{m}}{r^2\sqrt{r}}\right).$$

式中正号对应于顺行粒子, 负号对应于逆行粒子 (相对于 $\boldsymbol{a}$). 于是在克尔场中存在延迟时间的相对亏损效应:

效应 126

$$\Delta x^0 \equiv (\Delta x^0_{de})_+ - (\Delta x^0_{de})_- = 4\pi\frac{am}{r}. \tag{7.1.5}$$

此式与粒子速度无关, 因此可推广到光子的运动. 这样, 当两束光波沿静止回路相向传播时, 效应 (7.1.5) 使两束光波产生相位差, 因此应该有干涉图样的移动. 这一现象可由萨亚克实验观测. 在 Schwarzschild 场中不存在这一效应.

5. 引力法拉第效应

根据克尔场中广义协变麦克斯韦方程的解可以证明电磁波的偏振面要发生旋转, 因此, 将有类似于法拉第效应的引力效应 (Pineault, 1977). 计算结果是, 偏振面绕 $\boldsymbol{a}$ 的方向旋转一个角度:

效应 127

$$(\Phi)_a = -\frac{2am}{B^2}. \tag{7.1.6}$$

式中 B 是非赤道轨道的瞄准参量.

6. 两束偏振光在克尔场中的分离

Volkov(1970) 曾断言, 在引力场中光线的偏振不影响它的偏转. 接着, Harwitt(1974) 提出了检验这一断言的实验. 实验结果表明, 在太阳的引力场中, 不同偏振的光线有不同的偏转.

Mashhoon(1974) 重新研究这一问题, 提出一个新的广义相对论效应. 他由 Kerr 场中的广义协变麦克斯韦方程得到, 右偏振和左偏振的光线沿场源转轴方向传播时会发生分离, 其偏转角之差为

效应 128

$$(\Delta\theta)_{a,m} = \theta_+ - \theta_- = Aa\lambda\frac{m}{b^3}. \tag{7.1.7}$$

式中 A 为常数 (量级为 1), λ 是波长. 在克尔黑洞附近, 频率为 4×10^8Hz 的辐射线, 此效应可达 $1'$ 左右.

7. 球对称引力透镜的焦点

考虑一束平行光线自无限远处射到引力体上, 由于光线经过引力场时要发生偏转, 所以具有相同瞄准距离的光线将被引力场会聚于一点. 这一效应首先是由 Zwicky(1937) 提出来的. 在球对称引力场中, 引力透镜的焦点与场源的距离为

效应 129

$$F = \frac{R^2}{8m}. \tag{7.1.8}$$

式中 R 是源半径, 光线与源的表面相切. 太阳引力场的这一“焦距”比太阳系的线度还大. 由于引力透镜的焦距太大, 所以只有以遥远的恒星作为透镜时才有可能观测到这一效应.

对类星体 (Quasar) 的观测为人们提供了检验效应 (7.1.8) 的新的可能性. 根据对 208 颗类星体的分析, 认为类星体 3C268.4 和 3C286 是检验引力透镜效应的最好的候选者.

8. 引力的亮度增大效应

当观察者通过引力透镜的焦点时, 他将发现明亮的光闪. 但是这一光闪不只是由于聚焦使光通量重新分布而造成的, 附加的引力效应也增强了辐射亮度. 按广义相对论计算, 增强系数为

效应 130

$$\mathrm{Amp} = \frac{I}{I_0} = \frac{I}{1-E^2}, \quad E \equiv \frac{4mr_a r_b}{b^2(r_a+r_b)}. \tag{7.1.9}$$

式中 I_0 是入射波的强度, r_a 和 r_b 分别为光源和观察者到引力中心的距离. 在 Schwarzschild 场中, 由于场的球对称性, 这一效应达最大值. 以 λ 表示入射线的波长, 此时效应可达到 $10\dfrac{m}{\lambda}$.

9. 引力透镜中的成像效应

效应 131

首先考虑引力质量就是光源这种“本征引力透镜”. 引力质量使它本身发出的光线弯曲, 由于发射体的引力场使这些光线聚焦, 所以恒星的一部分表面发出的光能到达位于透镜外阴影中的观察者 (图 10-13). 由于这一原因, 观察者看到的发射体的像比没有光线引力偏转时要大一些. 如果恒星半径接近它的引力半径, 由于本征引力透镜效应, 它的圆盘将增大 2.59 倍.

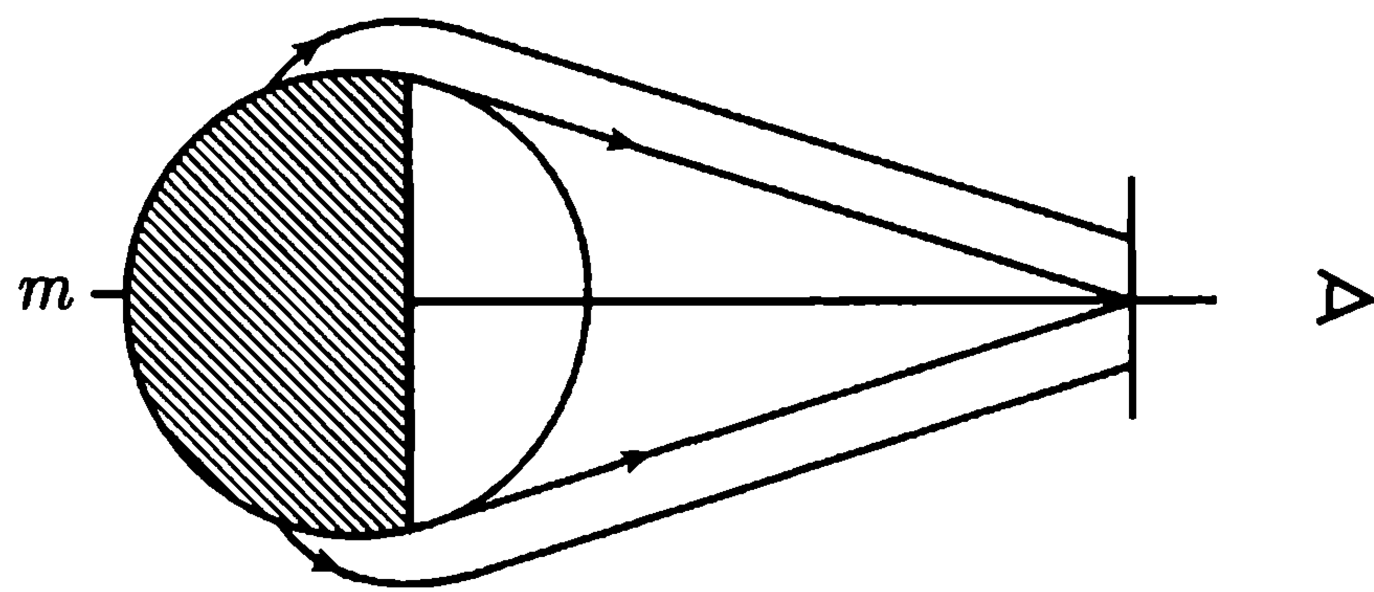


图 10-13

另一种情况是观察者和源的连线通过引力质量中心. 这时, 由于 Schwarzschild 场的引力透镜作用, 观察者将看到围绕引力质量的一个亮环, 其角半径为

效应 132

$$\varPhi = 2\sqrt{\frac{4m}{b}\cdot\frac{R}{r_1}}. \tag{7.1.10}$$

式中, R 是透镜半径, r_1 是观察者到透镜的距离.

10. 旋转引力透镜

克尔场中也存在引力的亮度增大效应. 克尔场与 Schwarzschild 场引力亮度增大系数之差为:

效应 133

$$\Delta A\mathrm{mp} = -\frac{4aE^2}{b(1-E^2)}. \tag{7.1.11}$$

这一效应中存在非对称性, 当光线传播方向和引力源转动方向一致时, 其亮度增大系数要大一些, 方向不一致通过引力源另一侧时的亮度增大系数要小一些, 这样的两条光线的偏转角也不相同. 所以当辐射源、引力透镜和观察者位于同一直线上时, 像位于这条直线之外.

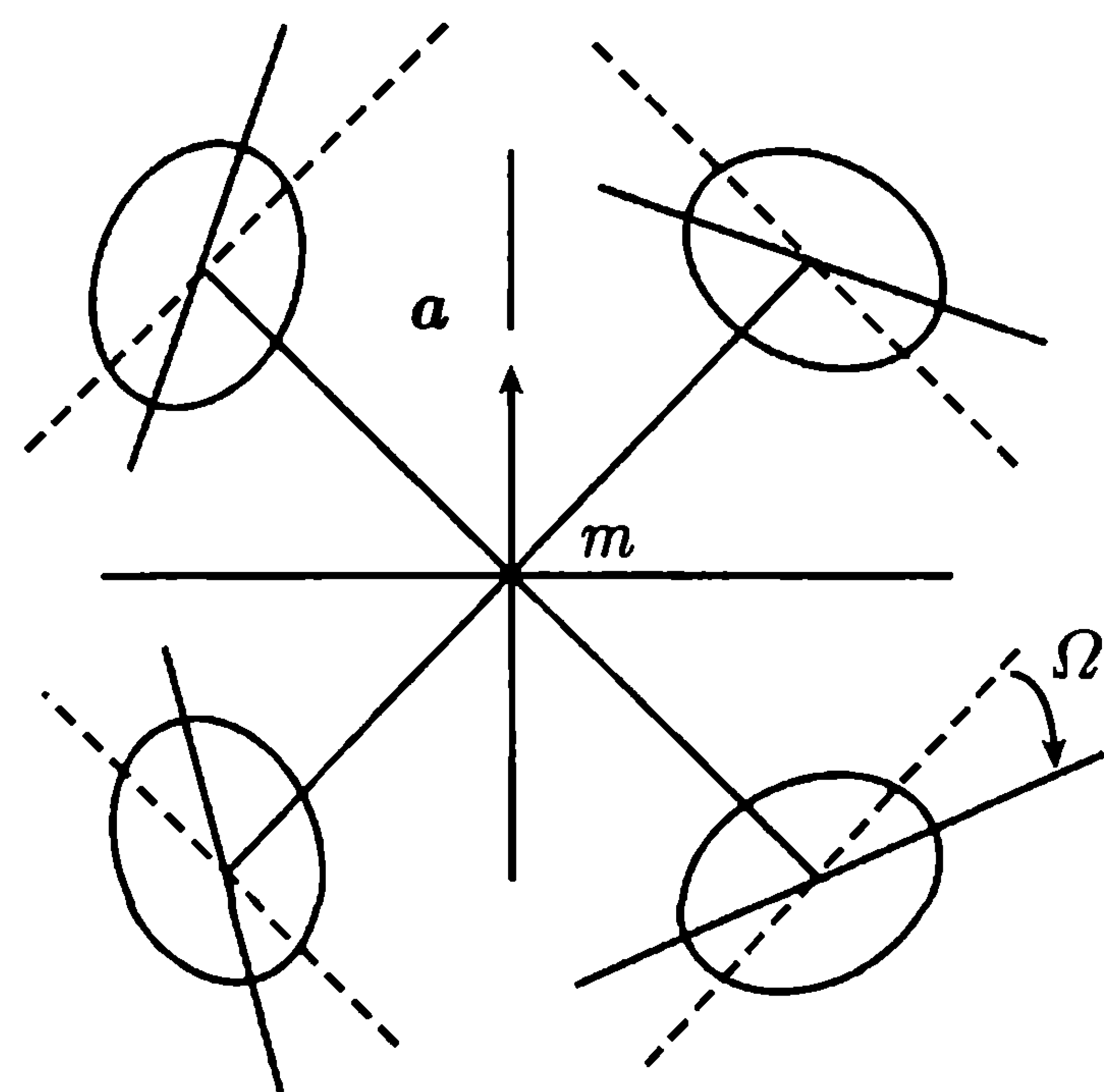


图 10-14

现在我们讨论光源移动位置时聚焦光束截面的变化. 在 Schwarzschild 引力透镜的情况下, 当光源移动位置时 (图 10-14), 聚焦光束的截面变为椭圆, 其长轴垂直于透镜中心和像的连线. 在克尔场中, 由于光子轨道的扭转效应 (3.4.12), 上述椭圆截面相对于它原来的位置要有一个转动. 转动方向取决于焦点相对于克尔场源转动轴的位置, 转动角的最大值为

效应 134

$$\Phi_{\max} = \frac{a}{b}. \tag{7.1.12}$$

当 $b = 200\mathrm{m}$, $a = 0.2\mathrm{m}$ 时, 上式给出的效应值约为 0.06°.

这一效应可以将旋转引力透镜和 Schwarzschild 引力透镜或外尔 (Will) 引力透镜区别开.

11. 电磁波在引力波场中的聚焦

如果平面引力波通过一粒子组或者一电磁波场, 则不同的粒子或电磁波波面的不同部分将获得不同的相对加速度. 所以这些粒子或电磁波波面的不同部分, 在离开引力波场时将具有相对速度. 波面之外的观察者将发现波面变成凹凸不平的了, 且在某一时刻"聚成一条线". 对于试验电磁波, 我们可以说它被聚焦了. 对于 δ 型引力波和 θ 型电磁波, 推导给出在波面上有

效应 135

$$\cos^2 Av = B^2u^2. \tag{7.1.13}$$

式中 u 和 v 表示落后 (或超前) 的位相, 参量 A 和 B 取决于引力波和电磁波的特性.

12. 引力–电磁共振

当引力波和电磁波相遇, 且频率和位相满足某些特定关系时, 这两种波的相互作用可能具有共振性质. 设一平面单色圆偏振引力波沿法向入射到环形振荡器上, 推导给出:

效应 136

$$\Delta\omega = -2\omega t\sqrt{\frac{2\pi GI}{c^3}}\cos(\alpha_1+\alpha_2)\sin(\alpha_2-\alpha_1). \tag{7.1.14}$$

式中 I 是引力波能流. $\Delta\omega$ 的最大值是

$$\Delta\omega_{\max} = \sqrt{\frac{2\pi GI}{c^3}}\omega t. \tag{7.1.15}$$

由于振幅随时间增大, 所以出现引力–电磁共振.

13. 引力波场中的闪烁现象

当光线通过引力波场时, 它的强度将发生变化. 计算给出, 光强度的相对变化量为

效应 137

$$\frac{\Delta A_0}{A_0} \approx -\frac{E_0\xi^2}{2L}\int_0^L u(1-u)[f^1(\alpha_4 t+\xi u)]^4 \mathrm{d}u. \tag{7.1.16}$$

式中 L 为自光源至观察者的距离, $\xi = \alpha_\mu v^\mu = \alpha_4(1-\cos\theta)$, θ 是光线方向和引力波传播方向的夹角. 由于这一效应的局部性质, 实验观测闪烁现象是非常困难的.

14. 电荷的附加制动

不均匀的引力场可以看成是折射率随位置变化的介质, 因此, 不均匀引力场中也应有电磁辐射“尾”. 这种“尾”是由“曲率反射”产生的, 变换到平直空–时便消失. “尾”可能显示各种不同的效应, 其中之一是引力场中电荷的制动效应. 在弯曲空–时中, 点电荷运动的非短程线方程 (De Witt, 1960) 可以写为

效应 138

$$\mu\left(\frac{\mathrm{d}^2x^\mu}{\mathrm{d}s}+\Gamma^\mu_{\sigma\lambda}\dot{x}^\sigma\dot{x}^\lambda\right) = f_1(F^{ij}_{\mu\nu}) + f_2(\dot{x}^\lambda, \dddot{x}^\mu) + q^2\dot{x}^\lambda\int_{-\infty}^{\tau} f^\mu_{\lambda\sigma'}\dot{x}^{\sigma'}\mathrm{d}x'. \tag{7.1.17}$$

式中右端第一项取决于外部电磁场, $F^{ij}_{\mu\nu}$ 是电磁场双矢量; 第二项是经典制动; 第三项是辐射尾引起的附加制动, $f^\mu_{\lambda\sigma'}$ 由背景度规确定. 对于荷电粒子在 Schwarzschild 场中沿椭圆轨道运动的情况, De Witt 计算了 (7.1.17) 右端第三项, 其中一部分产生轨道近日点的移动:

$$\frac{\Delta\alpha}{2\pi} = \frac{\tilde{k}}{mp}.$$

这一效应减弱了效应 (2.6.1).

15. Schwarzschild 场中的引力镜效应

光线在引力场中不仅能发生偏转, 而且还可能绕引力源转若干圈后偏转任意的角度. 由光源发出的光线在围绕场源转整数圈之后可能转回来, 形成一个光源的像 (图 10-15). 在黑洞的对称轴 OO' 附近应该可以观察到一个光环. 这样的光环是由远处恒星发出的光线经"引力镜""反射"形成的. "引力反射"的强度 I 取决于观察点与黑洞的距离 r 和与对称轴的距离 d, 其具体形式可近似表示为

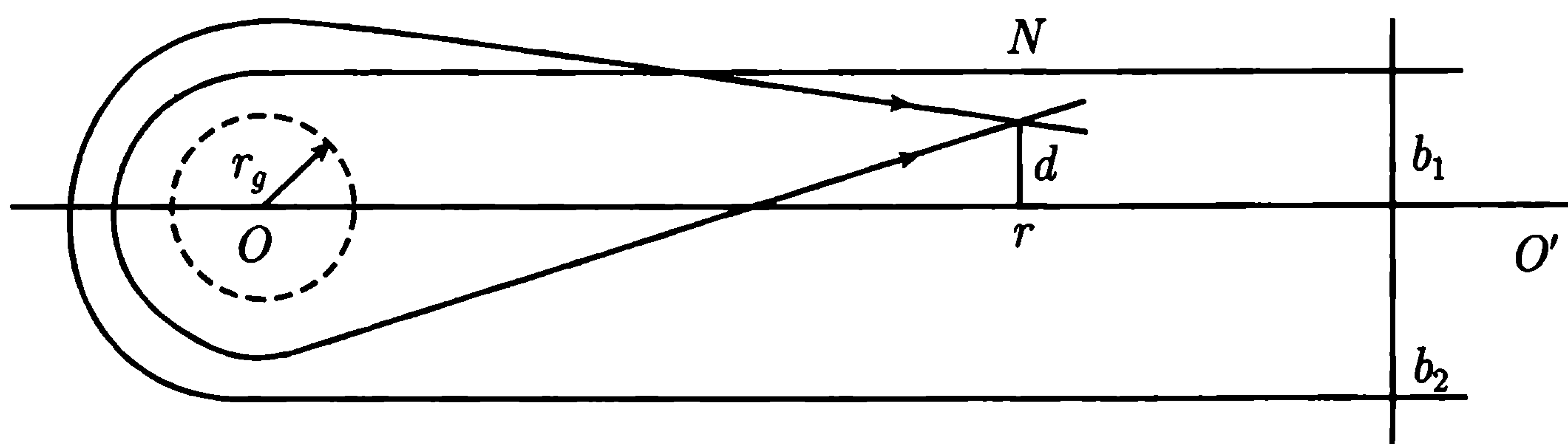


图 10-15

效应 139

$$I \approx 2A\frac{b_0^2}{r\mathrm{d}}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2}\sqrt{A}\mathrm{e}^{-n\pi}+A\mathrm{e}^{-2n\pi}\right)\mathrm{e}^{-2n\pi}\right\}I_0. \tag{7.1.18}$$

式中 I_0 是入射光 (远处恒星的光) 的强度, n 是光线绕质量源的圈数, $b_0=3\sqrt{3m}, A\approx 15.6$. 由于衍射, (7.1.18) 要损失 $d<d_0=\lambda rb^{-1}$ 区域的强度 $\bar{I}$, 这一区域内的强度为

$$\bar{I}=2A\frac{b_0^3}{\lambda r^2}\sum_{n=1}^{N}\left(1-\frac{1}{2}\sqrt{A}\mathrm{e}^{-n\pi}+A\mathrm{e}^{-2n\pi}\right)\mathrm{e}^{-2n\pi}. \tag{7.1.19}$$

当 b_0, λ 和 r 取某一确定值时, 光环的亮度可能超过入射到引力源的光强 I_0. 这一现象在大质量致密天体附近可能发生. 如果太阳光射向一远处的黑洞, 假设黑洞质量 $m=3\times10^{-8}M_\odot$, 与太阳距离 $r=10^4pc$, 波长 $\lambda=10^{-4}\mathrm{cm}$, 则地球上观测到的光环光强 $I\approx 10I_0$.

16. Schwarzschild 场中光环的时间分离效应

式 (7.1.18) 和 (7.1.19) 描述入射光线环绕引力源 n 圈之后叠加的结果, 不同的圈数 n 对应于光信号不同的绕行时间. 如果光信号是一短脉冲, 到达点 N 时应有一定量的延迟. 于是将观测到光环的时间分离现象. 由 3.3 节中 (2) 可知, 当 $b\to b_0=3\sqrt{3}\mathrm{m}$ 时, 光信号沿一半径为 3m 的圆绕行, 角速度 $\omega=\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x^0}=\dfrac{2}{3}\Big/\sqrt{3}r_g$. 由此可以得到光信号每绕一圈的分离时间表示为

效应 140

$$(T)_m=\frac{2\pi}{\omega}=3\sqrt{3}\pi r_g. \tag{7.1.20}$$

根据 (7.1.20), 测量光环的分离时间便可确定黑洞的引力半径. 这一效应原则上可以测量, 因为即使对于可坍缩的最小恒星 ($r_g \approx 6\text{km}$), 效应 (7.1.20) 的大小也达到约 $3 \times 10^{-4}\text{s}$. 可以用强脉冲发生器或脉冲星作为光信号源. 以 ΔT 表示脉冲延续时间, T 表示信号源周期, 须满足条件

$$\Delta T \ll (T)_m \ll T.$$

7.2　宇宙空间的光学各向同性效应

人们通过观测反射星云的偏振光现象, 能够以极高的精确度 (10^{-26}) 证明宇宙空间的光学各向同性, 这相当于以同样高的精确度证明了等效原理应用于电磁现象的正确性 (强等效原理). 本节将从广义相对论的电磁场方程出发, 详细讨论这一效应.

1. 宇宙空间的光学各向同性现象

观测反射星云反射到地球上的光的偏振情况, 表明宇宙空间是光学各向同性的, 反射星云和地球相距宇宙距离 ($l \sim 10^{21}\text{cm}$), 只要有极微小的双折射效应, 在地球上便可观察到, 精确度为.

$$\Delta n \sim 10^{-26}. \tag{7.2.1}$$

实际观测的零结果表明等效原理是适用于电磁现象的. 在 (2) 中将证明, 虽然 10^{-26} 量级对于检验量子电动力学中的磁场使真空产生双折射的现象是远远不够的 (要达到 10^{-42}), 但是对于检验等效原理是足够精确的.

如果等效原理不成立, 由于引力场的张量性质, 会使得在引力场中传播的光线发生双折射现象 (与在晶体中一样). 相对于引力场张量不同的主方向, 不同偏振的光的传播速度是不同的. 如果等效原理成立, 这一现象就不会发生. 根据强等效原理, 在自由下落的参考系中引力场不存在, 不能产生引力双折射现象; 而双折射现象的存在与否是不依赖于参考系的选择的, 所以在一般情况下引力双折射现象应该不存在. 显然, 要证明这个结论必须用到广义协变的麦克斯韦方程.

把引力场作为介质, 经典电动力学中的塔姆 (Tamm) 张量 $S^{\mu\nu\tau\lambda}$ 在引力场中可以写为

$$S_{GR}^{\mu\nu\tau\lambda} = \sqrt{-g}g^{\mu\tau}g^{\nu\lambda}. \tag{7.2.2}$$

这时可以证明, 广义相对论麦克斯韦方程可以写成运动介质电动力学方程 (无引力场) 的形式

$$(S_{GR}^{\mu\nu\tau\lambda}F_{\tau\lambda})_{,\nu} = 0, \quad \varepsilon^{\mu\nu\tau\lambda}F_{\tau\lambda,\nu} = 0. \tag{7.2.3}$$

在时轴正交系中 ($g_{0i}=0$), 方程 (7.2.3) 可以改写成“ε-μ 形式”, 并且由 (7.2.2) 得到张量 ε 和 μ 的关系

$$\varepsilon_{GR}=\mu_{GR}. \tag{7.2.4}$$

从而证明了不应该存在双折射现象. 当 $g_{0i}\neq 0$ 时, 同样可以得出这一结论, 只是更加麻烦一些.

2. 引力双折射的计算

现在我们研究 Δn 应该小到什么程度才算验证了强等效原理. 我们假定强等效原理不成立, 它和某一个真实的原理有一偏离; 这一偏离引起引力势的偏离为一阶小量, 引起原子质量亏损的偏离为一阶小量 (即核子动能的偏离为一阶小理). 这时, 物体引力质量和惯性质量之比 m_g/m_I 对于不同物体的差值应具有量级

$$\Delta\left(\frac{m_g}{m_I}\right)\sim\frac{v^2}{c^2}U. \tag{7.2.5}$$

式中 v 是内部特征速度, U 为引力势. 在地球周围, 太阳引力势 $U\sim 10^{-8}$, 而 $v^2/c^2\sim 10^{-3}$, 从而有

$$\Delta\left(\frac{m_g}{m_I}\right)\sim 10^{-11}. \tag{7.2.6}$$

假设有引力双折射效应, 则 Δn 应该和 ∇U 同量级, 或者

$$\Delta n\sim U^2. \tag{7.2.7}$$

在地球附近 ($U\sim 10^{-8}$), $\Delta n\sim 10^{-16}$, 比 (7.2.1) 大很多. 按照地球轨道直径的量级 (3×10^{13}cm), 相应的光程差 $\sim 3\times 10^{-3}$cm, 比光波的波长大很多. 因此, 如果强等效原理不成立, 是一定会观察到双折射现象的.

现在我们进行仔细的计算. 假定强等效原理不成立, 存在引力双折射, 广义相对论麦克斯韦方程只对 U 精确到一阶小量成立. 令

$$g_{\mu\nu}=h_{\mu\nu}+\eta_{\mu\nu},\quad \eta_{\mu\nu}=\mathrm{diag}(1,-1,-1,-1) \tag{7.2.8}$$

精确到 $h_{\mu\nu}$ 的二阶项, 简化广义协变麦克斯韦方程. 这时 (7.2.3) 的形式不变, (7.2.2) 变为

$$S^{\mu\nu\tau\lambda}=\eta^{\mu\tau}\eta^{\nu\lambda}\left(1+\frac{1}{2}h\right)-h^{\nu\lambda}\eta^{\mu\tau}-h^{\mu\tau}\eta^{\nu\lambda}. \tag{7.2.9}$$

这里和下边的指标的升降均由 $\eta^{\mu\nu}$ 进行, 当 $h_{0i}=0$ 时, 将张量 $S^{\mu\nu\tau\lambda}_{GR}$ 按 $h_{\mu\nu}$ 展开. 由于张量 ε_{GR} 和 μ^{-1}_{GR} 的分量可以表示为 $S^{\mu\gamma\tau\lambda}_{GR}$ 的线性组合, 所以张量 ε_{GR} 和 μ^{-1}_{GR} 也可以按 $h_{\mu\nu}$ 展开. 这时应有下面形式 (张量形式) 的关系式

$$\varepsilon=\mu+O(h^2_{\mu\nu}). \tag{7.2.10}$$

因此, 如果 $h_{0i}=0$, 而 h_{ij} 是空间各向异性的, 就可以断定张量 ε 和 μ 之差为 $h_{\mu\nu}$ 的二阶小量, 因而引力双折射的量级也为二阶小量. 当 $h_{0i}\neq 0$ 时, 自然也可以有同样结论.

由于方程组 (7.2.3) 和 (7.2.9) 不是广义协变的, 它们和坐标系有关. 为了完整起见, 还应假定某些坐标条件. 但是我们的目的只是研究引力双折射的大小, 所以只需选择这样的坐标系, 使 (7.2.3) 和 (7.2.9) 导致双折射的最小值.

在 (7.2.3) 中作代换

$$F_{\mu\nu}(x)=f_{\mu\nu}(x)\exp[\mathrm{i}\xi(x)],$$

然后按惯用的几何光学方法计算. 与晶体光学一样, 波 $F_{\mu\nu}(x)$ 分解成两个线偏振波 $F^{\mathrm{I}}_{\mu\nu}(x)$ 和 $F^{\mathrm{II}}_{\mu\nu}(x)$, 各自具有自己的位相 $(\xi^{\mathrm{I}}\xi^{\mathrm{II}})$ 和振幅 $(f^{\mathrm{I}}_{\mu\gamma},f^{\mathrm{II}}_{\mu\gamma}$. 忽略 $h_{\mu\nu}$ 的高阶项, 使 x^3 轴平行于波矢量, 得到两个波的折射率之差 Δn

$$\begin{aligned}(\Delta n)^2=&\frac{1}{4}[(h_{22}-h_{11})(h_{00}+h_{33}+2h_{03})+(h_{10}+h_{13})^2-(h_{20}-h_{23})^2]^2\\&+[h_{12}(h_{00}+h_{33}+2h_{03})-(h_{01}+h_{13})(h_{20}+h_{23})]^2.\end{aligned}\tag{7.2.11}$$

将上式对波矢量的所有方向取平均, 得到

效应 141

$$(\Delta n^2)=\frac{1}{5}(A_{mn}A_{mn}+B_{mn}B_{mn}).\tag{7.2.12}$$

式中

$$\begin{aligned}&A_{mn}\equiv\chi_{00}\chi_{mn}-h_{0m}h_{0n}+\frac{1}{3}\delta_{mn}(h_{0p}h_{0p})-\frac{1}{3}\chi_{mp}\chi_{pn}-\frac{1}{3}\varepsilon_{mpq}\varepsilon_{nij}\chi_{pi}\chi_{qj},\\&B_{mn}\equiv h_{0p}(\varepsilon_{pqm}\chi_{qn}+\varepsilon_{pqn}\chi_{qm}),\end{aligned}\tag{7.2.13}$$

$$\begin{aligned}&\chi_{00}\equiv h_{00}+\frac{1}{3}h_{mm}=g_{00}+\frac{1}{3}g_{mm},\\&\chi_{ij}\equiv h_{ij}-\frac{1}{3}\delta_{ij}h_{mm}=g_{ij}-\frac{1}{3}\delta_{ij}g_{mm}.\end{aligned}\tag{7.2.14}$$

χ_{ij} 是张量势的空间 (各向异性) 分量.

如果用 Schwarzschild 度规代入 (7.2.12)~(7.2.14), 可得

$$\langle\Delta n^2\rangle=\frac{2}{15}\left(\frac{2m}{r}\right)^4+O\left[\left(\frac{2m}{r}\right)^5\right].\tag{7.2.15}$$

此式与我们估计的量级 (7.2.7) 相符合.

综上所述, 如果强等效原理不成立, 就会存在引力双折射, 其量级为 (7.2.15) 或 (7.2.7), 在地球表面 $\Delta n\sim 10^{-16}$. 可是精确至 10^{-26} 的测量结果断定没有双折射现象, 因此证明了强等效原理成立.

附录　黎曼几何和张量分析

F.1　坐 标 变 换

在 Minkowski 空–时中, 一组坐标确定一个四维矢量. 两个坐标系之间的变换为 Lorentz 变换. 在一般的 Riemann 空–时中, 任何四个独立的变量 $x^\mu(\mu=0,1,2,3)$ 都可取作这一四维空–时中的坐标. 与 Minkowski 空–时不同, 黎曼空–时中的一组坐标不能确定一个四维矢量, 只能确定 Riemann 空–时中的一个点.

设坐标系 x^μ 和坐标系 x'^μ 之间存在着下面的变换式

$$x'^\mu = x'^\mu(x^\nu), \tag{F.1.1}$$

只要 Jacobian

$$J(x'^\mu/x^\nu) \neq 0, \tag{F.1.2}$$

四个函数 $x'^\mu = x'^\mu(x^\nu)$ 就是独立的, 且存在逆变换

$$x^\mu = x^\mu(x'^\nu). \tag{F.1.3}$$

在 Riemann 空–时中任一点, 引入坐标系 (x^μ) 和 (x'^μ), 在坐标系 (x^μ) 中可以确定一个矢量 $\mathrm{d}x^\mu$. 设同一矢量在另一坐标系 (x'^μ) 中表示为 $\mathrm{d}x'^\mu$, 而两坐标系之间的变换为 (F.1.1)~(F.1.3). 此时有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}x'^\mu &= a^{\mu'}_\nu \mathrm{d}x^\nu, \quad a^{\mu'}_\nu \equiv \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu},\\ \mathrm{d}x^\mu &= a^\mu_{\nu'} \mathrm{d}x'^\nu, \quad a^\mu_{\nu'} \equiv \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}.\end{aligned} \tag{F.1.4}$$

按爱因斯坦惯例, $A_\mu B^\mu \equiv \sum\limits_\mu A_\mu B^\mu$, 省略取和号 $\sum$. 如无特殊声明, 希腊字母取值 $0,1,2,3$; 拉丁字母取值 $1,2,3$.

由 (F.1.4) 可得

$$\mathrm{d}x^\alpha = a^\alpha_{\mu'} a^{\mu'}_\beta \mathrm{d}x^\beta,$$

故

$$a^\alpha_{\mu'} a^{\mu'}_\beta = \delta^\alpha_\beta; \tag{F.1.5}$$

同样可得

$$a^{\mu'}_{\alpha} a^{\alpha}_{\nu'} = \delta^{\mu}_{\nu}. \tag{F.1.6}$$

式中 δ^{α}_{β} 是 Kronecker 符号. 如果 $a^{\mu'}_{\nu}$ 看作矩阵, 则 $a^{\nu}_{\beta'}$ 就是它的逆矩阵. 因此, 变换的 Jacobian 满足

$$|a| \cdot |a'| = 1. \tag{F.1.7}$$

1. 逆变矢量

如果有 4 个函数 A^{μ} 的集合, 在坐标变换下 A^{μ} 和 $\mathrm{d}x^{\mu}$ 一样变换

$$A'^{\mu} = a^{\mu'}_{\nu} A^{\nu}, \tag{F.1.8}$$

则集合 A^{μ} 称为**逆变矢量**, A^{μ} 和 A'^{μ} 分别称为逆变矢量在两个坐标系中的分量.

2. 标量

如果量 $\phi(x^{\mu})$ 在坐标变换下按下式变换:

$$\phi(x^{\mu}) = \phi'(x'^{\mu}), \tag{F.1.9}$$

则量 $\phi(x^{\mu})$ 称为**标量**, 或**不变量**. 由上式可得

$$\frac{\partial \phi'}{\partial x'^{\mu}} = a^{\nu}_{\mu'} \frac{\partial \phi}{\partial x^{\nu}}. \tag{F.1.10}$$

3. 协变矢量

由 (F.1.10) 可知, 算符 $\dfrac{\partial}{\partial x^{\mu}}$ 的变换规律为

$$\frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} = a^{\nu}_{\mu'} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}, \tag{F.1.11}$$

如果有四个函数 A_{μ} 的集合, 在坐标变换下 A_{μ} 按 (F.1.11) 式变换

$$A'_{\mu} = a^{\nu}_{\mu'} A_{\nu}, \tag{F.1.12}$$

则集合 A_{μ} 称为**协变矢量**. A_{μ} 和 A'_{ν} 分别称为在两个坐标系中协变矢量的分量. 显然, 标量函数的梯度 $\dfrac{\partial \phi}{\partial x^{\mu}}$ 是协变矢量.

F.2　张　　量

如果有 16 个函数的集合 $T_{\mu\nu}$ 和 $T^{\mu\nu}$ 在坐标变换下按下式变换:

$$T'_{\alpha\beta} = a^{\mu}_{\alpha'} a^{\nu}_{\beta'} T_{\mu\nu}, \quad T'^{\alpha\beta} = a^{\alpha'}_{\mu} a^{\beta'}_{\nu} T^{\mu\nu}, \tag{F.2.1}$$

则称集合 $T_{\mu\nu}$ 为**二阶协变张量**, $T^{\mu\nu}$ 为**二阶逆变张量**.

类似地, 如果有 16 个函数 T^{ν}_{μ} 组成的集合, T^{ν}_{μ} 在坐标变换下按下式变换:

$$T'^{\alpha}_{\beta} = a^{\alpha'}_{\nu} a^{\mu}_{\beta'} T^{\nu}_{\mu}, \tag{F.2.2}$$

则称集合 T^{ν}_{μ} 为**二阶混合张量**. 混合张量 T^{ν}_{μ} 是一阶协变一阶逆变的. 高阶张量的定义可由上面的定义推广得到. 如果有一组函数 $T^{\tau\lambda\cdots}_{\mu\nu\cdots}$ 组成的集合, $T^{\tau\lambda\cdots}_{\mu\nu\cdots}$ 按下式变换:

$$T'^{\gamma\delta\cdots}_{\alpha\beta\cdots} = a^{\gamma'}_{\tau} a^{\delta'}_{\lambda} \cdots a^{\mu}_{\alpha'} a^{\nu}_{\beta'} \cdots T^{\tau\lambda\cdots}_{\mu\nu\cdots}, \tag{F.2.3}$$

则称集合 $T^{\tau\lambda\cdots}_{\mu\nu\cdots}$ 为 $(m+n)$ 阶张量, 其中 m 阶逆变和 n 阶协变. 这一张量具有 4^{m+n} 个分量.

1. 张量代数

对张量所施加的运算分为代数运算和微分运算, 相应的两部分数学内容分别称为张量代数和张量分析. 这里先讨论张量代数.

(1) 同类张量的线性组合, 在同一点确定一个新的同类张量. 例如, 如果 $A_{\alpha\beta}$ 和 $B_{\alpha\beta}$ 是两个二阶协变张量, 则它们的线性组合确定一个新的二阶协变张量

$$T_{\alpha\beta} = aA_{\alpha\beta} + bB_{\alpha\beta}. \tag{F.2.4}$$

式中 a 和 b 是两个标量. 很容易证明 $T_{\alpha\beta}$ 为二阶协变张量

$$\begin{aligned} T'_{\alpha\beta} &= aA'_{\alpha\beta} + bB'_{\alpha\beta} \\ &= aa^{\mu}_{\alpha'} a^{\nu}_{\beta'} A_{\mu\nu} + ba^{\mu}_{\alpha'} a^{\nu}_{\beta'} B_{\mu\nu} \\ &= a^{\mu}_{\alpha'} a^{\nu}_{\beta'} T_{\mu\nu}. \end{aligned}$$

对于任意阶张量均可类似地证明.

(2) 一个 m 阶张量和一个 n 阶张量的并积, 在同一点产生一个新的 $(m+n)$ 阶张量. 例如, 一个二阶协变张量和一个逆变矢量的并积产生一个新的张量

$$T^{\gamma}_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta} B^{\gamma}, \tag{F.2.5}$$

在坐标变换下有

$$\begin{aligned} T'^{\gamma}_{\alpha\beta} &= A'_{\alpha\beta} B'^{\gamma} = a^{\mu}_{\alpha'} a^{\nu}_{\beta'} A_{\mu\nu} a^{\gamma'}_{\rho} B^{\rho} \\ &= a^{\mu}_{\alpha'} a^{\nu}_{\beta'} a^{\gamma'}_{\rho} T^{\rho}_{\mu\nu}, \end{aligned}$$

因此, $T^{\gamma}_{\alpha\beta}$ 为 3 阶混合张量.

(3) 一个 n 阶混合张量进行缩并 (contraction), 可以产生一个新的 $(n-2)$ 阶张量. 所谓缩并, 即一个协变指标和一个逆变指标按四个值取和. 例如, 一个四阶混合张量缩并后产生一个新的张量:

$$T_{\alpha\beta} = T^{\mu}_{\alpha\mu\beta}. \tag{F.2.6}$$

由于在坐标变换下有

$$\begin{aligned} T'_{\alpha\beta} &= T'^{\mu}_{\alpha\mu\beta} \\ &= a^{\mu'}_{\rho} a^{\gamma}_{\alpha'} a^{\sigma}_{\mu'} a^{\delta}_{\beta'} T^{\rho}_{\gamma\sigma\delta} \\ &= \delta^{\sigma}_{\rho} a^{\gamma}_{\alpha'} a^{\delta}_{\beta'} T^{\rho}_{\gamma\sigma\delta} \\ &= a^{\gamma}_{\alpha'} a^{\delta}_{\beta'} T_{\gamma\delta}, \end{aligned}$$

因此, $T_{\alpha\beta}$ 是二阶协变张量.

二阶混合张量 T^{α}_{β} 缩并后得到的标量 T^{α}_{α} 称为张量 T^{α}_{β} 的**迹**(trace). 一个逆变矢量 A^{α} 和一个协变矢量 B_{β} 的并积, 缩并后得到的标量 $A^{\alpha}B_{\alpha}$ 称为二矢量的**标量积**. $A^{\alpha}B_{\alpha}$ 是标量, 这一点可直接证明:

$$A'^{\alpha}B'_{\alpha} = a^{\alpha'}_{\mu} a^{\nu}_{\alpha'} A^{\mu} B_{\nu} = \delta^{\nu}_{\mu} A^{\mu} B_{\nu} = A^{\mu} B_{\mu}. \tag{F.2.7}$$

反之, 如果知道量 $A^{\mu}B_{\mu}$ 是标量, 且知道其中一个 (如 A^{μ}) 是矢量, 则可断定另一个 (B_{μ}) 为矢量.

Kronecker 符号 δ^{α}_{β} 在弯曲空–时中和在平直空–时中一样定义:

$$\delta^{\alpha}_{\beta} = \begin{cases} 0, & \alpha \neq \beta \\ 1, & \alpha = \beta \end{cases} \tag{F.2.8}$$

Kronecker 符号可以作为一个混合张量的分量, 而且在坐标变换下保持不变:

$$\delta'^{\alpha}_{\beta} = a^{\alpha'}_{\mu} a^{\nu}_{\beta'} \delta'^{\mu}_{\nu} = \delta'^{\alpha}_{\beta}. \tag{F.2.9}$$

2. 张量的对称性

张量的对称性和反对称性是张量的重要性质. 如果交换张量的两个协变指标 (或两个逆变指标) 时张量的数值不变, 则称这个张量对这两个指标是**对称的**. 如果交换上述两个指标时张量的值改变正负号, 则称这个张量对这两个指标是**反对称的**.

张量的对称性在坐标变换下是不变的. 设坐标系 x^{μ} 中有

$$T^{\cdots}_{\alpha\cdot\beta\cdots} = T^{\cdots}_{\beta\cdot\alpha\cdots}, \tag{F.2.10}$$

$$A^{\cdots}_{\alpha\cdot\beta\cdots} = -A^{\cdots}_{\beta\cdot\alpha\cdots}, \tag{F.2.11}$$

则在坐标系 x'^{μ} 中有

$$
\begin{aligned}
T'^{\cdots}_{\alpha\cdot\beta\cdots} &= T'^{\cdots}_{\beta\cdot\alpha\cdots}, \\
A'^{\cdots}_{\alpha\cdot\beta\cdots} &= -A'^{\cdots}_{\beta\cdot\alpha\cdots},
\end{aligned} \tag{F.2.12}
$$

对于两个逆变指标的对称性, 与此类似.

任何一个二阶协变张量均可写成一个对称部分和一个反对称部分之和:

$$T_{\alpha\beta} = T_{(\alpha\beta)} + T_{[\alpha\beta]},$$

式中

$$T_{(\alpha\beta)} \equiv \frac{1}{2}(T_{\alpha\beta} + T_{\beta\alpha}), \tag{F.2.13}$$

$$T_{[\alpha\beta]} \equiv \frac{1}{2}(T_{\alpha\beta} - T_{\beta\alpha}). \tag{F.2.14}$$

二阶逆变张量的情况与此类似. 对二阶张量的对称性和反对称性的讨论可以推广到高阶张量. 例如, 由三阶张量 $T_{\alpha\beta\gamma}$ 可以构成一个全对称张量

$$T_{(\alpha\beta\gamma)} \equiv \frac{1}{3!}(T_{\alpha\beta\gamma} + T_{\beta\gamma\alpha} + T_{\gamma\alpha\beta} + T_{\beta\alpha\gamma} + T_{\alpha\gamma\beta} + T_{\gamma\beta\alpha}). \tag{F.2.15}$$

这一张量 $T_{(\alpha\beta\gamma)}$ 对于任意两个指标都是对称的. 同时, 还可构成一个全反对称张量

$$T_{[\alpha\beta\gamma]} \equiv \frac{1}{3!}(T_{\alpha\beta\gamma} + T_{\beta\gamma\alpha} + T_{\gamma\alpha\beta} - T_{\beta\alpha\gamma} - T_{\alpha\gamma\beta} - T_{\gamma\beta\alpha}). \tag{F.2.16}$$

这一张量 $T_{[\alpha\beta\gamma]}$ 对于任意两个指标都是反对称的. 逆变张量的情况与此类似.

如果张量 $S_{\alpha\beta\gamma}$ 是全对称的, 则有

$$S_{(\alpha\beta\gamma)} = S_{\alpha\beta\gamma}, \tag{F.2.17}$$

如果张量 $A_{\alpha\beta\gamma}$ 是全反对称的, 则有

$$A_{[\alpha\beta\gamma]} = A_{\alpha\beta\gamma}. \tag{F.2.18}$$

上面由已知 3 阶张量构成全对称张量和全反对称张量的方法可以推广到高阶张量. 对于高于 4 阶的张量, 按上述方法构成的全反对称张量等于零. 因此, 全反对称张量的最高阶数是 4. 以 $A_{\alpha\beta\gamma\delta}$ 表示 4 阶全反对称张量, 它的不等于零的分量都是由 A_{0123} 将其脚标重新排列构成的, 这就是说, $A_{\alpha\beta\gamma\delta}$ 的所有不等于零的分量只能等于 A_{0123} 或者 $-A_{0123}$. 4 阶全反对称张量只有一个独立分量, 好像一个标量. 这样的张量常称为**赝标量**.

3 阶全反对称张量 $A_{\alpha\beta\gamma}$ 只有 4 个独立分量: A_{023}、A_{031}、A_{012}、A_{123}, 好像一个矢量, 这样的张量常称为**赝矢量**.

3. 度规张量

微分几何中一个基本概念是流形, 一群元素组成的集合, 如果集合中每一元素可以和 n 个连续可微函数一一对应, 则此集合构成一个 n 维微分流形. 如果流形中定义一个不变量 (长度或度规)

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu, \tag{F.2.19}$$

则流形便成为度量空间, 此空间称为 Riemann 空间. $g_{\mu\nu}$ 称为**度规张量**. 我们可以把 $g_{\mu\nu}$ 写成对称部分和反对称部分之和:

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(s)} + g_{\mu\nu}^{(A)},$$

其中

$$g_{\mu\nu}^{(s)} = g_{\nu\mu}^{(s)}, \quad g_{\mu\nu}^{(A)} = -g_{\nu\mu}^{(A)}.$$

于是有

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu = g_{\mu\nu}^{(s)}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu.$$

其中 $g_{\mu\nu}^{(A)}$ 对 $\mathrm{d}s^2$ 无贡献. 因此, 对于 Riemann 几何, 总可以认为 $g_{\mu\nu}$ 是对称的.

不难证明 $g_{\mu\nu}$ 是一个二阶协变张量. 由 (F.2.19) 有

$$g'_{\mu\nu}\mathrm{d}x'^\mu \mathrm{d}x'^\nu = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu.$$

而

$$\mathrm{d}x^\mu = a^\mu_{\rho'}\mathrm{d}x'^\rho, \quad \mathrm{d}x^\nu = a^\nu_{\sigma'}\mathrm{d}x'^\sigma,$$

于是得到

$$\begin{aligned} g'_{\mu\nu}\mathrm{d}x'^\mu \mathrm{d}x'^\nu &= g_{\mu\nu}a^\mu_{\rho'}a^\nu_{\sigma'}\mathrm{d}x'^\rho \mathrm{d}x'^\sigma \\ &= g_{\rho\sigma}a^\rho_{\mu'}a^\sigma_{\nu'}\mathrm{d}x'^\mu \mathrm{d}x'^\nu. \end{aligned}$$

所以

$$g'_{\mu\nu} = a^\rho_{\mu'}a^\sigma_{\nu'}g_{\rho\sigma},$$

即 $g_{\mu\nu}$ 为二阶协变张量.

由于 $g \neq 0$, 所以矩阵 $g^{\mu\nu}$ 的逆一定存在. 我们定义 $g^{\mu\nu}$ 为 $g_{\mu\nu}$ 的逆:

$$g^{\mu\nu}g_{\nu\tau} \equiv \delta^\nu_\tau \equiv g^\nu_\tau, \tag{F.2.20}$$

或者

$$g^{\mu\nu} \equiv \frac{\Delta^{\mu\nu}}{g} \equiv g^{\nu\mu}.$$

式中 $\Delta^{\mu\nu}$ 是元素 $g_{\mu\nu}$ 的余子式. 容易证明, $g^{\mu\nu}$ 为二阶逆变张量. 令 $A_\mu = g_{\mu\nu}dx^\nu$, 则有

$$A_\mu g^{\mu\lambda} = g_{\mu\nu}g^{\mu\lambda}\mathrm{d}x^\nu = \delta_\nu^\lambda \mathrm{d}x^\nu = \mathrm{d}x^\lambda,$$

类似地有

$$A'_\tau g'^{\tau\lambda} = \mathrm{d}x'^\lambda.$$

又因为

$$A'_\tau = a^\mu_{\tau'}A_\mu, \quad \mathrm{d}x'^\lambda = a^{\lambda'}_\nu \mathrm{d}x^\nu = a^{\lambda'}_\nu g^{\mu\nu}A_\mu,$$

于是有

$$a^\mu_{\tau'}g'^{\tau\lambda}A_\mu = a^{\lambda'}_\nu g^{\mu\nu}A_\mu,$$

由 A_μ 的任意性得

$$a^\mu_{\tau'}g'^{\tau\lambda} = a^{\lambda'}_\nu g^{\mu\nu},$$

即

$$g'^{\tau\lambda} = a^{\tau'}_\mu a^{\lambda'}_\nu g^{\mu\nu},$$

所以 $g^{\mu\nu}$ 是二阶逆变张量.

根据 (F.2.20), 可以用度规张量来升 (降) 任一张量的指标:

$$T^\nu_\rho g'^{\rho\mu} = T^{\nu\mu}, \quad T^{\alpha\beta}g_{\alpha\mu} = T^\beta_\mu.$$

因此, 两个矢量的标量积可表示为

$$A_\alpha B^\alpha = g_{\alpha\beta}A^\alpha B^\beta.$$

4. 纯空间度规

在 Minkowski 空间中, 两事件间的空间距离 (长度) 通常表示为

$$\mathrm{d}l^2 = \mathrm{d}X^{1^2} + \mathrm{d}X^{2^2} + \mathrm{d}X^{3^2} \equiv \mathrm{d}X^i\mathrm{d}X^i, \tag{F.2.21}$$

X^i 为一直角坐标的空间分量. 在弯曲空间中, 取坐标系 x^μ, 度规为 $g_{\mu\nu}$, 二事件的纯空间距离 (长度) 也只能用同样方法定义, 这样才具有测量的意义. 即在给定点建立一个局部洛伦兹系 X^μ, 使 X^0 平行于 x^0, 于是有

$$\frac{\partial X^i}{\partial x^0}=0, \qquad \frac{\partial X^0}{\partial x^0}\neq 0.$$

对于两个事件, 按 (F.2.21) 定义纯空间距离

$$\mathrm{d}l^2=\mathrm{d}X^i\mathrm{d}X^i=\frac{\partial X^i}{\partial x^\mu}\frac{\partial X^i}{\partial x^\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu, \tag{F.2.22}$$

由度规张量的变换式 $g^{\mu\nu}=\dfrac{\partial X^\alpha}{\partial x^\mu}\dfrac{\partial X^\beta}{\partial x^\nu}\eta_{\alpha\beta}$ ($\eta_{\alpha\beta}$ 为 Minkowski 度规张量) 得到

$$\begin{aligned} g_{jk}&=\frac{\partial X^0}{\partial x^j}\frac{\partial X^0}{\partial x^k}-\frac{\partial X^i}{\partial x^j}\frac{\partial X^i}{\partial x^k},\\ g_{00}&=\frac{\partial X^0}{\partial x^0}\frac{\partial X^0}{\partial x^0},\quad g_{0j}=\frac{\partial X^0}{\partial x^0}\frac{\partial X^0}{\partial x^j}. \end{aligned}$$

将上式代入 (F.2.22), 得到

$$\mathrm{d}l^2=\gamma_{jk}\mathrm{d}x^j\mathrm{d}x^k, \tag{F.2.23}$$

式中

$$\gamma_{jk}=\frac{g_{0j}g_{0k}}{g_{00}}-g_{jk}, \tag{F.2.24}$$

称为**纯空间度规**.

5. 空–时坐标分离定理

自惯性系 $X^\mu=(cT,\ X^i)$ 变换至任意坐标系 $x^\mu=x^\mu(X^\nu)$, 设 Jacobian 不为零. 欲使坐标 x^μ 中的 x^0 表示时间坐标, x^i 表示空间坐标, 其充分且必要条件是

$$g_{00}>0,\quad \begin{vmatrix} g_{00} & g_{01}\\ g_{10} & g_{11}\end{vmatrix}<0,$$

$$\begin{vmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02}\\ g_{10} & g_{11} & g_{12}\\ g_{20} & g_{21} & g_{22}\end{vmatrix}>0,\quad g<0. \tag{F.2.25}$$

证明　由 (F.2.23) 根据高等数学中二次型 $\mathrm{d}l^2=\gamma_{jk}\mathrm{d}x^j\mathrm{d}x^k$ 正定的充要条件, 直接得到

$$\gamma_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{vmatrix} > 0,$$

$$\begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{vmatrix} > 0. \tag{F.2.26}$$

将此式代入 (F.2.24), 便得到 (F.2.25) 中的后三个不等式. 为了证明 $g_{00} > 0$, 我们考虑 $x^\mu = x^\mu(X^\nu)$ 系中一个空间固定点 $P(x^i = \text{const})$ 对惯性系 X^μ 的速度 v^i, 注意到 $\mathrm{d}x^i = 0$, 有

$$v^i = \frac{\mathrm{d}X^i}{\mathrm{d}T} = c\frac{\partial X^i}{\partial x^0}\Big/\frac{\partial X^0}{\partial x^0}, \tag{F.2.27}$$

而

$$1 > \frac{v^i v^i}{c^2} = \frac{\partial X^i}{\partial x^0}\frac{\partial X^i}{\partial x^0}\Big/\frac{\partial X^0}{\partial x^0}\frac{\partial X^0}{\partial x^0},$$

代入度规张量的变换式, 注意到 $\mathrm{d}x^i = 0$, 得到

$$\begin{aligned} g_{00} &= \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^0}\frac{\partial X^\beta}{\partial x^0}\eta_{\alpha\beta} \\ &= \frac{\partial X^0}{\partial x^0}\frac{\partial X^0}{\partial x^0} - \frac{\partial X^i}{\partial x^0}\frac{\partial X^i}{\partial x^0} > 0. \end{aligned}$$

式中 $\eta_{\alpha\beta} = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$, 是闵可夫斯基空间的度规张量.

当 $g_{i0} = 0$(时间轴与空间轴正交) 时, 由 (F.2.26) 可得

$$g_{ii} < 0, \quad \begin{vmatrix} g_{ii} & g_{ik} \\ g_{ki} & g_{kk} \end{vmatrix} > 0,$$

$$\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} < 0.$$

至此, 定理已证毕.

在闵可夫斯基空间中, 间隔可写为

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^{0^2} - \mathrm{d}x^{1^2} - \mathrm{d}x^{2^2} - \mathrm{d}x^{3^2}, \tag{F.2.28}$$

度规张量

$$[\eta_{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

此时我们说度规的符号为 $(+,-,-,-)$ 或者说号差为 (-2). 黎曼空间度规是闵可夫斯基空间度规的推广, 仍可类似地选取度规张量的符号, 即 $(+,-,-,-)$, 或者号差为 (-2). 按照 ds^2 的符号, 可把间隔分为三类

$\mathrm{d}s^2 > 0$ (类时间隔)

$\mathrm{d}s^2 = 0$ (零间隔)

$\mathrm{d}s^2 < 0$ (类空间隔)

F.3 张量密度

如果一个集合 $\mathscr{A}_{\nu\cdots}^{\mu\cdots}$ 在坐标变换 (F.1.1) 下按下式变换:

$$\mathscr{A}'^{\mu\cdots}_{\nu\cdots} = \widetilde{a}^w a_\beta^{\mu'} \cdots a_{\nu'}^\alpha \cdots \mathscr{A}_{\alpha\cdots}^{\beta\cdots}, \tag{F.3.1}$$

则集合 $\mathscr{A}_{\nu\cdots}^{\mu\cdots}$ 叫做张量密度, 式中 $\widetilde{a}$ 为坐标变换的雅克比行列式:

$$\widetilde{a} = J\left(\frac{x^\mu}{x'^\nu}\right) = \mathrm{det} a_{\nu'}^\mu,$$

w 是一个正的或负的整数, 叫做张量密度的**权**. 可见张量密度的变换规律和张量的只差一个因子 $\widetilde{a}^w$, 前面讲的张量是张量密度的特殊情况 (权为零).

一阶张量密度叫做**矢量密度**, 零阶张量密度叫做**标量密度**.

标量密度的一个例子是二阶张量 $T_{\alpha\beta}$ 的行列式, 由 $T_{\mu\nu}$ 的变换式

$$T'_{\mu\nu} = a_{\mu'}^\alpha a_{\nu'}^\beta T_{\alpha\beta} \tag{F.3.2}$$

可以得到

$$\mathrm{det} T'_{\mu\nu} = \widetilde{a}^2 \mathrm{det} T_{\alpha\beta}, \tag{F.3.3}$$

因此, 二阶协变张量的行列式是权为 2 的标量密度.

将 (F.3.3) 用于度规张量 $g_{\mu\nu}$, 在坐标变换下有

$$g' = \widetilde{a}^2 g. \tag{F.3.4}$$

另一方面, 对于四维体元 d^4x, 在坐标变换下按雅可比的定义有

$$\mathrm{d}^4x' = a\mathrm{d}^4x, \tag{F.3.5}$$

由 (F.3.4) 和 (F.3.5) 可知有

$$\sqrt{-g'}\mathrm{d}^4x' = \sqrt{-g}\mathrm{d}^4x. \tag{F.3.6}$$

所以, $\mathrm{d}\Sigma=\sqrt{-g}\mathrm{d}^4x$ 是**四维标量体元**.

由 (F.3.4) 可得

$$\widetilde{a}=\left(\frac{-g'}{-g}\right)^{1/2},$$

于是 (F.3.1) 可写为

$$(-g')^{-\frac{w}{2}}\mathscr{A}'^{\mu\cdots}_{\nu\cdots}=(-g)^{-\frac{w}{2}}a^{\mu'}_{\alpha}a^{\beta}_{\nu'}\mathscr{A}^{\alpha\cdots}_{\beta\cdots},\tag{F.3.7}$$

由此可见, 张量密度乘以 $(-g)^{-w/2}$ 即量 $(-g)^{-w/2}\mathscr{A}^{\beta\cdots}_{\alpha\cdots}$, 具有和普通张量 $\mathscr{A}^{\beta\cdots}_{\alpha\cdots}$ 相同的变换规律. 这就是说, 权为 w 的张量密度乘以因子 $(-g)^{-w/2}$ 就变为权是零的张量密度, 换言之, 一个张量, 乘以 $(-g)^{-w/2}$ 就成为权为 w 的张量密度. 特殊地, 张量乘以 $\sqrt{-g}$, 就是权为 1 的张量密度.

可以证明, 用度规张量升降张量密度的指标时不改变它的权.

Levi-Civita 张量密度 $\varepsilon_{\mu\nu\tau\lambda}$ 在计算中是经常用到的, 它的定义是: $\varepsilon_{0123}=1$, 若四个指标中有两个相同则等于 0, 交换任意两个指标时则改变符号. 下面我们证明 $\varepsilon_{\mu\nu\tau\lambda}$ 是张量密度. 任一张量 $T_{\mu\nu}$ 的行列式 T 按定义可写为

$$T\varepsilon_{\mu\nu\tau\lambda}=\varepsilon_{\alpha\beta\delta\sigma}T_{\alpha\mu}T_{\beta\nu}T_{\delta\tau}T_{\sigma\lambda},\tag{F.3.8}$$

由 (F.3.8), (F.3.2) 和 (F.3.3) 得到

$$\varepsilon'_{\mu\nu\tau\lambda}=(\widetilde{a})^{-1}a^{\alpha}_{\mu'}a^{\beta}_{\nu'}a^{\delta}_{\tau'}a^{\sigma}_{\lambda'}\varepsilon_{\alpha\beta\delta\sigma},\tag{F.3.9}$$

即 $\varepsilon_{\mu\nu\tau\lambda}$ 是权为 -1 的张量密度.

$\varepsilon^{\mu\nu\tau\lambda}$ 定义为

$$\varepsilon^{\mu\nu\tau\lambda}=(-g)g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}g^{\tau\delta}g^{\lambda\sigma}\varepsilon_{\alpha\beta\delta\sigma},\tag{F.3.10}$$

同样可以证明 $\varepsilon^{\mu\nu\tau\lambda}$ 是权为 $+1$ 的张量密度. 它的分量 $\varepsilon^{0123}=-1$.

张量密度 $\varepsilon_{\mu\nu\tau\lambda}$ 和 $\varepsilon^{\mu\nu\tau\lambda}$ 有一个很有用的性质, 它们的分量在坐标变换下保持不变: $\varepsilon'^{0123}=\varepsilon^{0123},\cdots,\varepsilon'_{0123}=\varepsilon_{0123},\cdots$, 根据 (F.3.8) 很容易证明这一点.

我们还可以用 Levi-Civita 张量密度定义两个张量

$$\begin{aligned}\epsilon^{\mu\nu\tau\lambda}&\equiv(-g)^{-1/2}\varepsilon^{\mu\nu\tau\lambda},\\ \epsilon_{\mu\nu\tau\lambda}&\equiv(-g)^{1/2}\varepsilon_{\mu\nu\tau\lambda}.\end{aligned}\tag{F.3.11}$$

根据 g 的变换式可直接证明它们是张量. 通常用这两个张量定义对偶张量. 设 $F^{\mu\nu}$ 和 $F_{\mu\nu}$ 是反对称张量, 则张量

$$\widetilde{F}^{\mu\nu}\equiv\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\tag{F.3.12}$$

叫做 $F_{\alpha\beta}$ 的**对偶张量**. 同样有

$$\widetilde{F}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\alpha\beta} \tag{F.3.13}$$

F.4　联络和克里斯托费尔符号

由度规张量 $g_{\mu\nu}$ 和 $g^{\mu\nu}$ 可以构成两个函数

$$\Gamma_{\mu\nu\tau} \equiv \frac{1}{2}(g_{\mu\nu,\ \tau} + g_{\mu\tau,\ \nu} - g_{\nu\tau,\ \mu}), \tag{F.4.1}$$

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\tau} = g^{\mu\lambda}\Gamma_{\lambda\nu\tau} = \frac{1}{2}(g_{\lambda\nu,\ \tau} + g_{\lambda\tau,\ \nu} - g_{\nu\tau,\ \lambda}), \tag{F.4.2}$$

式中符号“, ”表示普通微商：$A_{,\ \alpha} \equiv \partial A/\partial x^{\alpha}$. 函数 $\Gamma_{\lambda\nu\tau}$ 叫做第一类克里斯托费尔符号, $\Gamma^{\mu}_{\nu\tau}$ 叫做第二类克里斯托费尔符号, 由定义可知, 它们对指标 $\nu\tau$ 是对称的. 由上二式还可得到

$$g_{\alpha\beta,\ \rho} = \Gamma_{\alpha\beta\rho} + \Gamma_{\beta\alpha\rho} = g_{\alpha\lambda}\Gamma^{\alpha}_{\beta\rho} + g_{\beta\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\alpha\rho}. \tag{F.4.3}$$

在黎曼几何中, 克里斯托费尔符号 $\Gamma^{\mu}_{\nu\tau}$ 就是仿射联络. 通常把克里斯托费尔符号计作 $\{\mu,\nu\tau\}$ 和 $\{^{\mu}_{\nu\tau}\}$. 在非黎曼几何中, $\Gamma^{\mu}_{\nu\tau}$ 表示仿射联络, 它对于指标 $\nu\tau$ 是非对称的, 因此在非黎曼几何中, $\Gamma^{\mu}_{\nu\tau}$ 不等于克里斯托费尔符号 $\{^{\mu}_{\nu\tau}\}$, $\Gamma^{\mu}_{\nu\tau} \neq \Gamma^{\mu}_{\tau\nu}$, 量 $\Gamma^{\mu}_{[\nu,\tau]} \neq 0$, 称为**空–时挠率**. 在黎曼几何中, 空–时是无挠的. 下面我们限于黎曼几何的情况, 因此认为仿射联络 $\Gamma^{\mu}_{\nu\tau}$ 就是克里斯托费尔符号 $\{^{\mu}_{\nu\tau}\}$.

在 n 维空间中, $\Gamma^{\mu}_{\nu\tau}$ 有 $n^2(n+1)/2$ 个独立分量, 在我们所研究的四维空–时中有 40 个独立分量.

由定义 (F.4.1) 和 (F.4.2), 可以得到克里斯托费尔符号的变换式

$$\Gamma'_{\mu\nu\tau} = a^{\alpha}_{\mu'}a^{\beta}_{\nu'}a^{\delta}_{\tau'}\Gamma_{\alpha\beta\delta} + a^{\alpha}_{\mu'}\frac{\partial^2 x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}\partial x'^{\tau}}g_{\alpha\beta}, \tag{F.4.4}$$

$$\Gamma'^{\mu}_{\nu\tau} = a^{\mu'}_{\alpha}a^{\beta}_{\nu'}a^{\delta}_{\tau'}\Gamma^{\alpha}_{\beta\delta} + a^{\mu}_{\beta}\frac{\partial^2 x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}\partial x'^{\tau}}. \tag{F.4.5}$$

证明　按定义有

$$\begin{aligned}
\Gamma'_{\mu\nu\tau} &= \frac{1}{2}(g'_{\mu\nu,\ \tau} + g'_{\mu\tau,\ \nu} - g'_{\nu\tau,\ \mu}) \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x'^{\tau}}(a^{\sigma}_{\mu'}a^{\beta}_{\nu'}g_{\beta\sigma}) + \frac{\partial}{\partial x'^{\nu}}(a^{\beta}_{\mu'}a^{\sigma}_{\tau'}g_{\beta\sigma}) - \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}}(a^{\beta}_{\nu'}a^{\sigma}_{\tau'}g_{\beta\sigma})\right] \\
&= \frac{1}{2}\left(a^{\beta}_{\mu'}a^{\sigma}_{\nu'}\frac{\partial g_{\beta\sigma}}{\partial x'^{\tau}} + a^{\beta}_{\mu'}a^{\sigma}_{\tau'}\frac{\partial g_{\beta\sigma}}{\partial x'^{\nu}} - a^{\beta}_{\nu'}a^{\sigma}_{\tau'}\frac{\partial g_{\beta\sigma}}{\partial x'^{\mu}}\right)
\end{aligned}$$

$$
+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x'^{\tau}}(a^{\beta}_{\mu'}a^{\sigma}_{\nu'})+\frac{\partial}{\partial x'^{\nu}}(a^{\beta}_{\mu'}a^{\sigma}_{\tau'})-\frac{\partial}{\partial x'^{\mu}}(a^{\beta}_{\nu'}a^{\sigma}_{\tau'})\right]g_{\beta\sigma}. \tag{F.4.6}
$$

上式右端第一项给出

$$
\frac{1}{2}(a^{\beta}_{\mu'}a^{\sigma}_{\nu'}a^{\rho}_{\tau'}+a^{\beta}_{\mu'}a^{\sigma}_{\tau'}a^{\rho}_{\nu'}-a^{\beta}_{\nu'}a^{\sigma}_{\tau'}a^{\rho}_{\mu'})\frac{\partial g_{\beta\sigma}}{\partial x^{\rho}},
$$

最后这个表达式经过交换指标, 可写为

$$
\frac{1}{2}a^{\rho}_{\mu'}a^{\beta}_{\nu'}a^{\sigma}_{\tau'}\left(\frac{\partial g_{\rho\beta}}{\partial x^{\sigma}}+\frac{\partial g_{\sigma\rho}}{\partial x^{\beta}}-\frac{\partial g_{\sigma\beta}}{\partial x^{\rho}}\right)=a^{\rho}_{\mu'}a^{\beta}_{\nu'}a^{\sigma}_{\tau'}\Gamma_{\rho\beta\sigma}. \tag{F.4.7}
$$

式 (F.4.6) 右端第二项为

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left(a^{\sigma}_{\nu'}\frac{\partial^2 x^{\beta}}{\partial x'^{\tau}\partial x'^{\mu}}+a^{\beta}_{\mu'}\frac{\partial^2 x^{\sigma}}{\partial x'^{\tau}\partial x'^{\nu}}+a^{\sigma}_{\tau'}\frac{\partial^2 x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}\partial x'^{\mu}}\right.\\
&\left.+a^{\beta}_{\mu'}\frac{\partial^2 x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}\partial x'^{\tau}}-a^{\sigma}_{\tau'}\frac{\partial^2 x^{\beta}}{\partial x'^{\mu}\partial x'^{\nu}}-a^{\beta}_{\nu'}\frac{\partial^2 x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu}\partial x'^{\tau}}\right)g_{\beta\sigma}=a^{\beta}_{\mu'}\frac{\partial^2 x^{\sigma}}{\partial x'^{\tau}\partial x'^{\nu}}g_{\beta\sigma},
\end{aligned} \tag{F.4.8}
$$

将 (F.4.7) 和 (F.4.8) 代入 (F.4.6), 便得到 (F.4.4).

对于第二类克里斯托费尔符号, 按定义有

$$
\begin{aligned}
\Gamma'^{\mu}_{\nu\tau}&=g'^{\mu\sigma}\Gamma'_{\sigma\nu\tau}\\
&=a^{\mu'}_{\alpha}a^{\sigma'}_{\beta}g^{\alpha\beta}\left(a^{\delta}_{\sigma'}a^{\lambda}_{\nu'}a^{\rho}_{\tau'}\Gamma_{\delta\lambda\rho}+a^{\delta}_{\sigma'}\frac{\partial^2 x^{\lambda}}{\partial x'^{\nu}\partial x'^{\tau}}g_{\delta\lambda}\right)\\
&=a^{\mu'}_{\alpha}\delta^{\beta'}_{\delta}g^{\alpha\delta}a^{\lambda}_{\nu'}a^{\sigma}_{\tau'}\Gamma_{\beta\lambda\sigma}+a^{\mu'}_{\beta}\delta^{\alpha'}_{\lambda}g^{\beta\lambda}\frac{\partial^2 x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}\partial x'^{\tau}}g_{\alpha\sigma}\\
&=a^{\mu'}_{\alpha}a^{\beta}_{\nu'}a^{\delta}_{\tau'}\Gamma^{\alpha}_{\beta\delta}+a^{\mu}_{\beta}\frac{\partial^2 x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}\partial x'^{\tau}}.
\end{aligned} \tag{F.4.9}
$$

由 (F.4.4) 和 (F.4.5) 可见, 克里斯托费尔符号不是张量.

F.5 协 变 微 分

本节中我们研究如何将微分运算推广到黎曼空间.

1. 矢量的协变微分

设坐标 x^{μ} 系中有一个逆变矢量 A^{μ}, 它在 x'^{μ} 系中为 A'^{ν}, 我们有变换式

$$
A^{\mu}=a^{\mu}_{\nu'}A'^{\nu},\quad a^{\mu}_{\nu'}\equiv\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}}\ . \tag{F.5.1}
$$

将上式对 x^{β} 微分, 得到

$$
\frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\beta}}=a^{\mu}_{\nu'}a^{\rho'}_{\beta}\frac{\partial A'^{\nu}}{\partial x'^{\rho}}+a^{\rho'}_{\beta}\frac{\partial^2 x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}\partial x'^{\rho}}A'^{\nu}. \tag{F.5.2}
$$

由 (F.1.9) 式可知, 标量的导数是一个黎曼空间中的协变矢量. 由上式可以发现, 一个矢量的普通导数在黎曼空间中不是一个二阶张量. 我们设法构成一种微分运算, 使得一个矢量的导数为一个二阶张量, 从而将普通微分运算推广到黎曼空间. 自然, 这种新的微分运算中的导数, 当空间趋于平直时, 应该等于普通导数.

由克里斯托费尔符号的变换法则可以得到

$$\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\nu \partial x'^\rho} = \Gamma'^\beta_{\rho\nu} a^\mu_{\beta'} - a^\sigma_{\rho'} a^\beta_{\nu'} \Gamma'^\mu_{\sigma\beta}, \tag{F.5.3}$$

代入 (F.5.2) 得

$$\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\beta} = a^\mu_{\sigma'} a^{\rho'}_\beta \left(\frac{\partial A'^\sigma}{\partial x'^\rho} + \Gamma'^\sigma_{\rho\nu} A'^\nu \right) - a^\sigma_{\nu'} \Gamma^\mu_{\beta\sigma} A'^\nu. \tag{F.5.4}$$

此式最后一项可用 (F.5.1) 简化为

$$a^\sigma_{\nu'} \Gamma^\mu_{\beta\sigma} A'^\nu = \Gamma^\mu_{\beta\sigma} A^\sigma. \tag{F.5.5}$$

由 (F.5.2)~(F.5.5) 得到

$$\left(\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\beta} + \Gamma^\mu_{\beta\sigma} A^\sigma \right) = a^\mu_{\sigma'} a^{\rho'}_\beta \left(\frac{\partial A'^{\sigma'}}{\partial x'^\rho} + \Gamma'^\sigma_{\rho\nu} A'^\nu \right). \tag{F.5.6}$$

我们构成了一个二阶张量 $(A^\mu{}_{,\,\beta} + \Gamma^\mu_{\beta\lambda} A^\lambda)$, 称为**矢量 A'^μ 的协变导数**, 记作

$$A^\mu{}_{;\,\beta} \equiv \nabla_\beta A^\mu \equiv A^\mu{}_{,\,\beta} + \Gamma^\mu_{\beta\lambda} A^\lambda. \tag{F.5.7}$$

这样, (F.5.6) 表示为

$$A^\mu{}_{;\,\beta} = a^\mu_{\sigma'} a^{\rho'}_\beta A'^\sigma{}_{;\,\rho}. \tag{F.5.8}$$

当空间趋于平直时, $\Gamma^\mu_{\beta\lambda} = 0$, $A^\mu{}_{;\,\beta} = A^\mu{}_{,\,\beta}$. 协变导数由两项组成, 第一项为普通导数; 第二项纯粹是由于空间的弯曲引起的, 对应于矢量 A^μ 由 x^α 点平移至 $x^\alpha + dx^\alpha$ 点所产生的变化 (在平直空间中这一变化等于零).

用 $a^\beta_{\tau'} a^{\nu'}_\mu$ 乘 (F.5.8) 式, 我们得到

$$A'^\nu{}_{;\,\tau} = a^\beta_{\tau'} a^{\nu'}_\mu A^\mu{}_{;\,\beta}. \tag{F.5.9}$$

由 (F.5.8) 和 (F.5.9) 可知, 逆变矢量的协变导数为二阶混合张量. 类似地可以定义协变矢量 A_μ 的协变导数

$$A_{\mu;\,\beta} \equiv \nabla_\beta A_\mu \equiv A_{\mu,\,\beta} - \Gamma^\sigma_{\beta\mu} A_\sigma. \tag{F.5.10}$$

同样可以导出 $A_{\mu;\,\beta}$ 的变换式

$$A'_{\mu;\,\beta} = a^{\sigma}_{\mu'} a^{\lambda}_{\beta'} A_{\sigma;\,\lambda}, \tag{F.5.11}$$

$$A_{\mu;\,\beta} = a^{\sigma'}_{\mu} a^{\lambda'}_{\beta} A'_{\sigma;\,\lambda}, \tag{F.5.12}$$

即协变矢量的协变导数为二阶协变张量.

2. 张量的协变微分

上述协变微分的概念可以推广到任意阶张量

$$\begin{aligned}
&\Gamma^{\mu\nu\cdots}_{\ \ ;\,\beta} = \Gamma^{\mu\nu\cdots}_{\ \ ,\,\beta} + \Gamma^{\mu}_{\beta\lambda}\Gamma^{\lambda\nu\cdots} + \Gamma^{\nu}_{\beta\lambda}\Gamma^{\mu\lambda\cdots} + \cdots, \\
&\Gamma_{\mu\nu\cdots;\,\beta} = \Gamma_{\mu\nu\cdots,\,\beta} - \Gamma^{\lambda}_{\beta\mu}\Gamma_{\lambda\nu\cdots} - \Gamma^{\lambda}_{\beta\nu}\Gamma_{\lambda\mu\cdots} - \cdots, \\
&\Gamma^{\mu\cdots}_{\nu\cdots;\,\beta} = \Gamma^{\mu\cdots}_{\nu\cdots,\,\beta} + \Gamma^{\mu}_{\beta\lambda}\Gamma^{\lambda\cdots}_{\nu\cdots} + \cdots - \Gamma^{\lambda}_{\beta\nu}\Gamma^{\mu\cdots}_{\lambda\cdots} - \cdots.
\end{aligned} \tag{F.5.13}$$

协变微分法则与普通微分法则相同. 例如

$$(A_{\mu\nu}B^{\tau})_{;\,\sigma} = A_{\mu\nu;\,\sigma}B^{\tau} + A_{\mu\nu}B^{\tau}_{;\,\sigma}, \tag{F.5.14}$$

$$(A_{\mu}B^{\mu})_{;\,\sigma} = A_{\mu;\,\sigma}B^{\mu} + A_{\mu}B^{\mu}_{;\,\sigma} = (A_{\mu}B^{\mu})_{,\,\sigma}. \tag{F.5.15}$$

3. 张量密度的协变微分

设 $\mathscr{A}^{\mu}$ 是权为 w 的逆变矢量密度

$$\mathscr{A}^{\mu} = (-g)^{w/2}A^{\mu}, \tag{F.5.16}$$

则 $(-g)^{-w/2}\mathscr{A}^{\mu} = A^{\mu}$ 是逆变矢量, 于是有变换关系

$$(-g)^{-w/2}\mathscr{A}^{\mu} = a^{\mu}_{\nu'}(-g')^{-w/2}\mathscr{A}'^{\nu}. \tag{F.5.17}$$

取上式的偏导数, 与前面导出 A^{μ} 的协变导数的过程类似, 我们得到矢量密度 $\mathscr{A}^{\mu}$ 的协变导数的表达式

$$\mathscr{A}^{\mu}_{;\,\alpha} = \mathscr{A}^{\mu}_{,\,\alpha} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\lambda}\mathscr{A}^{\lambda} - w\Gamma^{\lambda}_{\alpha\lambda}\mathscr{A}^{\mu}. \tag{F.5.18}$$

用同样的方法可以得到张量密度的协变导数. 例如, 权为 w 的二阶逆变张量密度 $\mathscr{T}^{\mu\nu}$ 的协变导数为

$$\mathscr{T}^{\mu\nu}_{;\,\alpha} = \mathscr{T}^{\mu\nu}_{,\,\alpha} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\lambda}\mathscr{T}^{\lambda\nu} + \Gamma^{\nu}_{\alpha\lambda}\mathscr{T}^{\mu\lambda} - w\Gamma^{\lambda}_{\lambda\alpha}\mathscr{T}^{\mu\nu}. \tag{F.5.19}$$

由此可得权为 +1 的二阶逆变张量密度的协变散度

$$\mathscr{T}^{\mu\nu}_{;\,\nu} = \mathscr{T}^{\mu\nu}_{,\,\nu} + \Gamma^{\mu}_{\lambda\sigma}\mathscr{T}^{\lambda\sigma}. \tag{F.5.20}$$

4. 一些有用的公式和推导方法

(1) 度规张量的协变导数等于零

$$g^{\mu\nu}_{;\,\tau}=0,\quad g_{\mu\nu;\,\tau}=0,\quad g_{;\,\tau}=0. \tag{F.5.21}$$

由协变导数和克里斯托费尔符号的定义式可以直接证明上式.

(2) Kronecker 符号 (δ 张量) 的协变导数等于零

$$\delta^{\mu}_{\nu;\,\tau}=\delta^{\mu}_{\nu,\,\tau}+\Gamma^{\mu}_{\tau\alpha}\delta^{\alpha}_{\nu}-\Gamma^{\alpha}_{\tau\nu}\delta^{\mu}_{\alpha}=\Gamma^{\mu}_{\tau\nu}-\Gamma^{\mu}_{\tau\nu}=0. \tag{F.5.22}$$

(3) 标量函数的协变导数等于普通偏导数

$$\phi_{;\,\mu}=\phi_{,\,\mu}. \tag{F.5.23}$$

(4) 协变导数指标和其他张量指标同样用 $g^{\mu\nu}$ 和 $g_{\mu\nu}$ 升降:

$$\begin{aligned}&g^{\mu\alpha}A_{\mu;\,\nu}=A^{\alpha}_{;\,\nu},\quad g^{\mu\alpha}A_{\nu;\,\alpha}=A_{\nu}^{;\,\mu},\\&g^{\lambda\alpha}T^{\mu}_{\nu;\,\alpha}=T^{\mu;\,\lambda}_{\nu},\quad g_{\alpha\tau}T^{\mu;\,\alpha}_{\nu}=T^{\mu}_{\nu;\,\tau}.\end{aligned} \tag{F.5.24}$$

(5) $\Gamma^{\mu}_{\alpha\mu}=g^{\mu\nu}\Gamma_{\nu\alpha\mu}=\dfrac{1}{2}g^{\mu\nu}g_{\mu\nu,\alpha}+\dfrac{1}{2}g^{\mu\nu}(g_{\nu\alpha,\mu}-g_{\mu\alpha,\nu})=\dfrac{1}{2}g^{\mu\nu}g_{\mu\nu,\alpha}.$　　(F.5.25)

下面我们将 $\Gamma^{\mu}_{\alpha\mu}$ 用另一个形式给出. 由行列式的展开规则可得

$$\frac{\partial g}{\partial g^{\mu\nu}}=\varDelta^{\mu\nu}. \tag{F.5.26}$$

式中 $\varDelta^{\mu\nu}$ 是行列式 g 中元素 $g_{\mu\nu}$ 的余子式. 根据求行列式的逆的规则和逆变度规张量 $g^{\mu\nu}$ 的定义, (F.5.26) 可写为

$$\frac{\partial g}{\partial g^{\mu\nu}}=gg^{\mu\nu}, \tag{F.5.27}$$

从而有

$$\mathrm{d}g=gg^{\mu\nu}\mathrm{d}g_{\mu\nu}=-gg_{\mu\nu}\mathrm{d}g^{\mu\nu}.$$

后一等式由 $\mathrm{d}(g_{\mu\nu}g^{\mu\nu})=0$ 得到. 由上式可得

$$g_{,\,\alpha}=gg^{\mu\nu}g_{\mu\nu,\,\alpha}=-gg_{\mu\nu}g^{\mu\nu}_{,\,\alpha}. \tag{F.5.28}$$

将 (F.5.28) 代入 (F.5.25) 得

$$\Gamma^{\mu}_{\alpha\mu}=-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}g^{\mu\nu}_{,\,\alpha}=\frac{1}{2g}g_{,\,\alpha}=(\ln\sqrt{-g})_{,\,\alpha}. \tag{F.5.29}$$

(6) 由 (F.5.29) 可将矢量的协变散度 $A^{\mu}_{;\,\mu}$ 写为

$$A^{\mu}_{;\,\mu} = A^{\mu}_{,\,\mu} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\mu}A^{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{-g}}(A^{\mu}\sqrt{-g})_{,\,\mu}. \tag{F.5.30}$$

(7) 由 (F.5.29) 可将二阶张量的协变散度写为

$$T^{\mu\nu}_{;\,\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}(T^{\mu\nu}\sqrt{-g})_{,\,\nu} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta}, \tag{F.5.31}$$

$$T^{\nu}_{\mu;\,\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}(T^{\nu}_{\mu}\sqrt{-g})_{,\,\nu} - \Gamma^{\nu}_{\mu\alpha}T^{\alpha}_{\nu}. \tag{F.5.32}$$

如果张量 $F^{\mu\nu}$ 是反对称的, 由 (F.5.31) 得到

$$F^{\mu\nu}_{;\,\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}(F^{\mu\nu}\sqrt{-g})_{,\,\nu}. \tag{F.5.33}$$

如果是 $S^{\mu\nu}$ 对称的, 则由 (F.5.32) 得到

$$S^{\nu}_{\mu;\,\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}(S^{\nu}_{\mu}\sqrt{-g})_{,\,\nu} - \frac{1}{2}S^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta,\,\mu}. \tag{F.5.34}$$

(8) 矢量 A_{μ} 的**旋度**. 由协变导数的定义可得:

$$A_{\mu;\,\nu} - A_{\nu;\,\mu} = A_{\mu,\,\nu} - A_{\nu,\,\mu}. \tag{F.5.35}$$

此式表明, $A_{\mu;\,\nu} = A_{\nu;\,\mu}$ 的充分且必要条件是 $A_{\mu} = \phi_{,\,\mu}$, 式中 ϕ 为 x^{ν} 的一个标量函数.

(9) 如果 $F_{\mu\nu}$ 是反对称的, 则有

$$F_{\mu\nu;\,\tau} + F_{\nu\tau;\,\mu} + F_{\tau\mu;\,\nu} = F_{\mu\nu,\,\tau} + F_{\nu\tau,\,\mu} + F_{\tau\mu,\,\nu}. \tag{F.5.36}$$

如果 $F_{\mu\nu}$ 是某一矢量 A_{μ} 的旋度

$$F_{\mu\nu} = A_{\mu;\,\nu} - A_{\nu;\,\mu}, \tag{F.5.37}$$

则有

$$F_{\mu\nu;\,\tau} + F_{\nu\tau;\,\mu} + F_{\tau\mu;\,\nu} = 0. \tag{F.5.38}$$

以上诸式均可由协变导数的定义和克里斯托费尔符号的对称性予以证明.

(10) 式 (F.5.28) 可以用 $F_{\mu\nu}$ 的对偶张量 (F.3.12) 表示

$$\widetilde{F}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}, \quad \widetilde{F}^{\mu\nu}_{;\,\nu} = 0. \tag{F.5.39}$$

(11) 由定义可直接证明

$$\varepsilon_{\alpha\beta\delta\sigma;\,\mu} = 0, \quad \varepsilon^{\alpha\beta\delta\sigma}_{;\,\mu} = 0. \tag{F.5.40}$$

F.6　短程线坐标系

根据克里斯托费尔符号的变换性质 (F.4.5), 可以证明一个定理: 在空间中一点 p 总可以选择一个坐标系, 使得克里斯托费尔符号的所有分量在 p 点都等于零. 这一坐标系叫做**短程线坐标系**.

下面我们证明这一定理. 假设在某一坐标系 x^μ 中, 在给定点 p 克里斯托费尔符号不等于零, 引入坐标变换

$$x'^\mu = x^\mu - x_p^\mu + \frac{1}{2}\Gamma^\mu_{\alpha\beta}(p)(x^\alpha - x_p^\alpha)(x^\beta - x_p^\beta), \tag{F.6.1}$$

式中标记 p 表示在给定点 p 的值, 此式给出 $x_p'^\mu = 0$. 对于一般的变换系数有

$$a^{\mu'}_\sigma a^\sigma_{\nu'} = \delta^\mu_\nu\ , \quad (a^{\mu'}_\sigma a^\sigma_{\nu'})_{,\ \tau'} = 0,$$

即

$$a^{\mu'}_{\sigma,\ \tau'} a^\sigma_{\nu'} = -a^\sigma_{\nu',\ \tau'} a^{\mu'}_\sigma,$$

由此得

$$a^{\mu'}_{\sigma,\ \lambda} a^\sigma_{\nu'} a^\lambda_{\tau'} = \frac{\partial}{\partial x^\lambda} a^{\mu'}_\sigma \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\tau} a^\sigma_{\nu'} = a^{\mu'}_{\sigma,\ \tau'} a^\sigma_{\nu'} = -a^\sigma_{\nu',\ \tau'} a^{\mu'}_\sigma . \tag{F.6.2}$$

克里斯托费尔符号的变换式为 (F.4.5):

$$\Gamma'^\mu_{\nu\tau} = a^{\mu'}_\lambda a^\sigma_{\nu'} a^\rho_{\tau'} \Gamma^\lambda_{\sigma\rho} - a^{\mu'}_{\sigma,\ \lambda} a^\sigma_{\nu'} a^\lambda_{\tau'}. \tag{F.6.3}$$

把 (F.6.2) 代入 (F.6.3), 得到

$$\Gamma'^\mu_{\nu\tau} = a^{\mu'}_\lambda (a^\lambda_{\nu',\tau'} + a^\sigma_{\nu'} a^\rho_{\tau'} \Gamma^\lambda_{\sigma\rho}). \tag{F.6.4}$$

(F.6.1) 对 x'^ν 求偏微商, 得到

$$a^\mu_{\nu'} + \Gamma^\mu_{\sigma\rho}(p) a^\sigma_{\nu'} (x^\rho - x^\rho_p) = \delta^\mu_\nu. \tag{F.6.5}$$

此式再对 x'^τ 求偏微商, 然后代入点 p 的值, 得到

$$a^\mu_{\nu',\tau'} + \Gamma^\mu_{\sigma\rho}(p) a^\sigma_{\nu'} a^\rho_{\tau'} = 0. \tag{F.6.6}$$

将 (F.6.6) 代入 (F.6.4), 得到 $\Gamma'^\mu_{\nu\tau}(p) = 0$. 定理证毕.

根据广义相对论中的等效原理, 引力场的局部动力学效应与惯性力场等效, 而引力场就是度规张量场. 因此, 在引力场中一点 p 可以和惯性力场中一样引入一坐标变换, 变至“自由落下”参考系 x'^μ. 在 x'^μ 系中, 引力场不存在, 空–时是平直的. 这一参考系叫做**局部惯性系**. 这就是上述短程线坐标系的物理意义.

F.7 曲率张量

1. 黎曼曲率张量的定义

在平直空间中有 $A^{\mu}_{,\,\nu\tau}=A^{\mu}_{,\,\tau\nu}$, 在黎曼空间的一般情况下 $A^{\mu}_{;\,\nu\tau}\neq A^{\mu}_{;\,\tau\nu}$, 式中 $A^{\mu}_{;\,\nu\tau}\equiv A^{\mu}_{;\,\tau;\,\nu}$. 我们计算上述两个张量的差, 这个差表明空间的弯曲性质.

由 (F.5.7) 可得

$$\begin{aligned}A^{\mu}_{;\,\nu\tau}&=(A^{\mu}_{;\,\nu})_{;\,\tau}+\Gamma^{\mu}_{\alpha\tau}A^{\alpha}_{;\,\nu}-\Gamma^{\alpha}_{\nu\tau}A^{\mu}_{;\,\alpha}\\&=A^{\mu}_{,\,\nu\tau}+\Gamma^{\mu}_{\alpha\nu,\,\tau}A^{\alpha}+\Gamma^{\mu}_{\alpha\nu}A^{\alpha}_{,\,\tau}+\Gamma^{\mu}_{\alpha\tau}(A^{\alpha}_{,\,\nu}+\Gamma^{\alpha}_{\lambda\nu}A^{\lambda})-\Gamma^{\alpha}_{\nu\tau}A^{\mu}_{;\,\alpha}\,,\end{aligned}\quad\text{(F.7.1)}$$

$$A^{\mu}_{;\,\tau\nu}=A^{\mu}_{,\,\tau\nu}+\Gamma^{\mu}_{\alpha\tau,\,\nu}A^{\alpha}+\Gamma^{\mu}_{\alpha\tau}A^{\alpha}_{,\,\nu}+\Gamma^{\mu}_{\alpha\nu}(A^{\alpha}_{,\,\tau}+\Gamma^{\alpha}_{\lambda\tau}A^{\lambda})-\Gamma^{\alpha}_{\tau\nu}A^{\mu}_{;\,\alpha}\,.\quad\text{(F.7.2)}$$

由此得到

$$A^{\mu}_{;\,\nu\tau}-A^{\mu}_{;\,\tau\nu}=-R^{\mu}_{\alpha\nu\tau}A^{\alpha}\,.\quad\text{(F.7.3)}$$

式中

$$R^{\mu}_{\alpha\nu\tau}\equiv\Gamma^{\mu}_{\alpha\tau,\,\nu}-\Gamma^{\mu}_{\alpha\nu,\,\tau}+\Gamma^{\mu}_{\lambda\nu}\Gamma^{\lambda}_{\alpha\tau}-\Gamma^{\mu}_{\lambda\tau}\Gamma^{\lambda}_{\alpha\nu},\quad\text{(F.7.4)}$$

称为**黎曼曲率张量**, 可以直接证明它符合张量的变换法则. 同样, 对于协变矢量有

$$A_{\mu;\nu\tau}-A_{\mu;\tau\nu}=R^{\alpha}_{\mu\nu\tau}A_{\alpha}.\quad\text{(F.7.5)}$$

可以证明, $R^{\mu}_{\nu\tau\lambda}$ 是仅依赖于联络及其一阶导数且对一阶导数为线性的唯一一个四阶张量.

对于一平直空间区域, 因为度规张量 $g_{\mu\nu}$ 为常数, 所以曲率张量等于零. 如果在这一区域进行坐标变换, 由于 $R^{\mu}_{\alpha\tau\lambda}$ 的张量性质, 变换后, 它的所有分量仍等于零. 由此得出结论: 空间为平直的必要条件是曲率张量的所有分量 $R^{\mu}_{\alpha\nu\tau}$ 等于零. 反之, 如果 $R^{\mu}_{\alpha\nu\tau}$ 处处为零, 则由 (F.7.3) 可知 $A^{\mu}_{;\nu\tau}=A^{\mu}_{;\tau\nu}$, 所有的克里斯托费尔符号 $\Gamma^{\mu}_{\nu\tau}$ 处处为零, 度规张量 $g_{\mu\nu}$ 的所有一阶导数也处处为零. 因此, 空间为平直的充分且必要条件是曲率张量的所有分量 $R^{\mu}_{\alpha\tau\nu}$ 处处等于零.

将 (F.4.1)、(F.4.2) 代入 (F.7.4)、(F.7.5), 得到 $R_{\mu\nu\tau\lambda}$ 的另一表达式

$$\begin{aligned}R_{\mu\nu\tau\lambda}&=g_{\alpha\mu}R^{\alpha}_{\nu\tau\lambda}\\&=\frac{1}{2}(g_{\mu\lambda,\,\nu\tau}+g_{\nu\tau,\,\mu\lambda}-g_{\mu\tau,\,\nu\lambda}-g_{\nu\lambda,\,\mu\tau})\\&\quad+g_{\alpha\beta}(\Gamma^{\alpha}_{\nu\tau}\Gamma^{\beta}_{\mu\lambda}-\Gamma^{\alpha}_{\nu\lambda}\Gamma^{\beta}_{\mu\tau}).\end{aligned}\quad\text{(F.7.6)}$$

2. 曲率张量的性质

(1) 对称性质. 由定义式 (F.7.4) 和 (F.7.5) 可以直接得到曲率张量的下列对称性质: 对于前后两对指标对称, 即

$$R_{\mu\nu\tau\lambda} = R_{\tau\lambda\mu\nu}, \quad R^{\mu}_{\cdot\nu\tau\lambda} = R_{\tau\lambda\cdot\nu}^{\ \ \mu}. \tag{F.7.7}$$

对于前两个指标反对称, 即

$$R_{\mu\nu\tau\lambda} = -R_{\nu\mu\tau\lambda}, \quad R^{\mu}_{\cdot\nu\tau\lambda} = -R_{\nu\cdot\tau\lambda}^{\ \mu}. \tag{F.7.8}$$

对于后两个指标反对称, 即

$$R_{\mu\nu\tau\lambda} = -R_{\mu\nu\lambda\tau}, \quad R^{\mu}_{\nu\tau\lambda} = -R^{\mu}_{\nu\lambda\tau}. \tag{F.7.9}$$

(2) 里奇 (Ricci) 恒等式. 由 (F.7.6)~(F.7.9) 可以证明, 对于曲率张量的后三个指标轮换取和, 结果等于零, 即

$$R^{\mu}{}_{\nu\tau\lambda} + R^{\mu}{}_{\lambda\nu\tau} + R^{\mu}{}_{\tau\lambda\nu} = 0. \tag{F.7.10}$$

(3) 比安基 (Bianchi) 恒等式. 由 F.6 节可以证明一个重要的微分恒等式

$$R^{\mu}_{\nu\tau\lambda;\ \alpha} + R^{\mu}_{\nu\alpha\tau;\ \lambda} + R^{\mu}_{\nu\lambda\alpha;\ \tau} = 0. \tag{F.7.11}$$

这一等式的证明很简单, 在空间中某一点 p 引入短程线坐标系, 则在 p 点克里斯托费尔符号等于零, 于是由 (F.7.4) 得到

$$R^{\mu}_{\nu\tau\lambda;\ \alpha} = \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda;\ \tau\alpha} - \Gamma^{\mu}_{\nu\tau;\ \lambda\alpha}. \tag{F.7.12}$$

由此得到 (F.7.11). 此式左端为张量, 只要它在某一坐标系中所有分量都为零, 则在任意坐标系中它的所有分量自然也为零; 即 (F.7.11) 对任意坐标系均成立. 此式称为**比安基恒等式**.

3. 里奇张量

对曲率张量降阶而构成的二阶张量

$$R_{\mu\nu} \equiv R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu} = \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu;\ \alpha} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha;\ \nu} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha} \tag{F.7.13}$$

称为**里奇张量**. 由定义式可知, 里奇张量是对称的:

$$R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}. \tag{F.7.14}$$

对里奇张量降阶, 构成的标量

$$R \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

称为**曲率标量**.

将 (F.7.11) 缩并, 得到

$$R^{\lambda}_{\nu\tau\lambda;\ \alpha} + R^{\lambda}_{\nu\alpha\tau;\ \lambda} + R^{\lambda}_{\nu\lambda\alpha;\ \tau} = 0, \tag{F.7.15}$$

即

$$R_{\nu\alpha;\tau} - R_{\nu\tau;\alpha} + R^{\lambda}_{\nu\alpha\tau;\lambda} = 0,$$

乘以 $g^{\nu\alpha}$ 并注意 $g^{\nu\alpha}_{;\tau} = 0$, 得到

$$R_{;\tau} - R^{\alpha}_{\tau;\alpha} - R^{\lambda}_{\tau;\lambda} = 0,$$

即

$$\left(R^{\nu}_{\tau} - \frac{1}{2}\delta^{\nu}_{\tau} R\right)_{;\nu} = 0,$$

或者写为

$$G^{\mu\nu}_{;\nu} = \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R\right)_{;\nu} = 0. \tag{F.7.16}$$

式中

$$G^{\mu\nu} \equiv R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \tag{F.7.17}$$

称为**爱因斯坦张量**.

张量

$$S_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{4} R g_{\mu\nu} \tag{F.7.18}$$

称为**零迹里奇张量**. 容易证明它的迹等于零:

$$S = g^{\mu\nu} S_{\mu\nu} = 0. \tag{F.7.19}$$

式 (F.7.16) 是由比安基恒等式导出的唯一的协变微分守恒定律. 由于 $G^{\mu\nu} = G^{\nu\mu}$, 加上 (F.7.16) 的限制, 实际上 $G^{\mu\nu}$ 只有 6 个独立分量.

F.8 短 程 线

在黎曼空间中, 连接空间两个给定点的曲线长度表示为

$$I=\int \mathrm{d}s=\int (g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^{\mu}\mathrm{d}x^{\nu})^{\frac{1}{2}}$$
$$=\int (g_{\mu\nu}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu})^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\lambda. \tag{F.8.1}$$

满足条件

$$\delta I=\delta\int (g_{\mu\nu}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu})^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\lambda=0 \tag{F.8.2}$$

的曲线称为**短程线**, 即黎曼空间中连接两个给定点的最短的线. 式中 $\dot{x}^{\mu}\equiv\dfrac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}\lambda}$, λ 为沿着曲线的某一参量. (F.8.2) 对应的拉格朗日函数为

$$L=(g_{\mu\nu}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu})^{\frac{1}{2}}, \tag{F.8.3}$$

取 $\lambda=s(\mathrm{d}s\neq 0)$, 则沿短程线有 $L=1$. 此时由 (F.8.2) 导致的拉格朗日方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{\mu}}-\frac{\partial L}{\partial x^{\mu}}=0 \tag{F.8.4}$$

给出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(g_{\mu\tau}\dot{x}^{\tau})=\frac{1}{2}g_{\nu\tau;\ \mu}\dot{x}^{\nu}\dot{x}^{\tau}. \tag{F.8.5}$$

此即**短程线方程**.

短程线方程还可以写成较为对称的形式. 把 (F.8.5) 改写为

$$g_{\mu\tau}\ddot{x}^{\tau}+g_{\mu\tau,\ \nu}\dot{x}^{\nu}\dot{x}^{\tau}=\frac{1}{2}g_{\nu\tau,\ \mu}\dot{x}^{\nu}\dot{x}^{\tau},$$

式中 $\ddot{x}^{\tau}\equiv\dfrac{\mathrm{d}^2x^{\tau}}{\mathrm{d}s^2}$. 上式即

$$g_{\mu\nu}\ddot{x}^{\tau}+\frac{1}{2}(2g_{\mu\tau,\ \nu}-g_{\nu\tau,\ \mu})\dot{x}^{\nu}\dot{x}^{\tau}=0. \tag{F.8.6}$$

注意到

$$2g_{\mu\tau,\ \nu}\dot{x}^{\nu}\dot{x}^{\tau}=(g_{\mu\nu,\ \tau}+g_{\mu\tau,\ \nu})\dot{x}^{\nu}\dot{x}^{\tau},$$

(F.8.6) 可改写为

$$g_{\mu\tau}\ddot{x}^{\tau}+\Gamma_{\mu\nu\tau}\dot{x}^{\nu}\dot{x}^{\tau}=0, \tag{F.8.7}$$

或乘以 $g^{\mu\alpha}$, 得到

$$\frac{\mathrm{d}^2x^{\alpha}}{\mathrm{d}s^2}+\Gamma^{\alpha}_{\nu\tau}\frac{\mathrm{d}x^{\nu}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^{\tau}}{\mathrm{d}s}=0. \tag{F.8.8}$$

这就是常见的较为对称的短程线方程. 引入切矢量 u^μ, 还可以将短程线方程写为另外的形式. 切矢量 u^μ 定义为

$$u^\mu \equiv \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s}. \tag{F.8.9}$$

由定义有

$$u^\mu u_\mu = g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}s^2} = 1. \tag{F.8.10}$$

短程线方程 (F.8.8) 可改写为

$$u^\rho u^\alpha_{;\,\rho} = \frac{\mathrm{d}u^\alpha}{\mathrm{d}s} + \Gamma^\alpha_{\nu\tau}u^\nu u^\tau = 0. \tag{F.8.11}$$

在惯性系 X^μ 中, 自由粒子的运动方程为欧几里得直线, 即闵可夫斯基空间中的短程线

$$\delta\int \mathrm{d}s = \delta\int (\eta_{\mu\nu}X^\mu X^\nu)^{1/2}\mathrm{d}\lambda = 0,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\eta_{\mu\tau}\dot{X}^\tau) = \frac{1}{2}\eta_{\nu\tau,\,\mu}\dot{X}^\nu\dot{X}^\tau.$$

按广义相对性原理, 变换到加速系 x^μ 中, 自由粒子运动方程应该是广义协变的, 即为 (F.8.5) 式. 根据等效原理, 加速场即引力场, 因此引力场中的自由粒子的运动方程也应具有形式 (F.8.5). 这就是说, 引力场中的**自由粒子沿短程线运动**. 在黎曼空间中, 满足条件

$$\delta\int \mathrm{d}s = 0, \quad \mathrm{d}s^2 = 0 \tag{F.8.12}$$

的曲线称为**零短程线**. 由于 ds=0, 所以在 (F.8.1)~(F.8.2) 中不能取 $\lambda = s$, λ 应为另一参量, $\mathrm{d}\lambda \neq 0$. 此时方程 (F.8.12) 可写为

$$\frac{\mathrm{d}^2x^\mu}{\mathrm{d}\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\nu\tau}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^\tau}{\mathrm{d}\lambda} = 0,$$

$$g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu = 0. \tag{F.8.13}$$

此即**零短程线方程**.

在引力场中, **静止质量为零的粒子**(如光子)**沿零短程线运动**.

F.9 共形曲率张量

1. 共形变换

设在同一个流形上由度规

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu$$

和

$$d\tilde{s}^2 = \tilde{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{F.9.1}$$

确定两个黎曼空间 V_n 和 $\tilde{V}_n$, ds^2 和 $d\tilde{s}^2$ 之间存在变换关系

$$d\tilde{s}^2 = e^{2\sigma(x)} ds^2 \quad 或 \quad \tilde{g}_{\mu\nu} = e^{2\sigma(x)} g_{\mu\nu}. \tag{F.9.2}$$

变换 (9.2) 称为**共形变换**, 空间 V_n 和 $\tilde{V}_n$ 称为**共形空间**.

在流形中任意一点 p, 两个方向 dx^μ 和 δx^μ 之间的夹角在空间 V_n 中表示为

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{\delta x^\nu}{\delta s}\\ &= g_{\mu\nu} dx^\mu \delta x^\nu (g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta)^{-\frac{1}{2}} (g_{\nu\tau}\delta x^\nu \delta x^\tau)^{-\frac{1}{2}};\end{aligned}$$

在空间 $\tilde{V}_n$ 中表示为

$$\begin{aligned}\cos\tilde{\alpha} &= \tilde{g}_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tilde{s}}\frac{\delta x^\nu}{\delta \tilde{s}}\\ &= \tilde{g}_{\mu\nu} dx^\mu \delta x^\nu (\tilde{g}_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta)^{-\frac{1}{2}} (\tilde{g}_{\nu\tau}\delta x^\nu \delta x^\tau)^{-\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

将 (F.9.2) 代入, 得到

$$\cos\alpha = \cos\tilde{\alpha}.$$

所以共形变换又称**保角变换**.

2. Weyl 张量

由曲率张量和度规张量构成一个具有重要性质的张量 $C_{\mu\nu\rho\sigma}$, 称为**共形张量**, **或外尔** (Weyl) **张量**; 它的定义为

$$\begin{aligned}C_{\mu\nu\rho\sigma} \equiv{}& R_{\mu\nu\rho\sigma} - \frac{1}{2}(g_{\mu\rho}R_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}R_{\nu\rho} - g_{\nu\rho}R_{\mu\sigma} + g_{\nu\sigma}R_{\mu\rho})\\ &-\frac{1}{6}(g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho} - g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma})R.\end{aligned} \tag{F.9.3}$$

下面我们讨论外尔张量的一系列重要性质.

外尔张量具有和曲率张量相同的对称性

$$C_{\mu\nu\rho\sigma} = -C_{\nu\mu\rho\sigma} = -C_{\mu\nu\sigma\rho}, \tag{F.9.4}$$

$$C_{\mu\nu\rho\sigma} = C_{\rho\sigma\mu\nu}, \tag{F.9.5}$$

$$C_{\mu\nu\rho\sigma} + C_{\mu\sigma\nu\rho} + C_{\mu\rho\sigma\nu} = 0. \tag{F.9.6}$$

外尔张量对任意二指标缩并都等于零, 所以是无迹的

$$C^{\rho}_{\alpha\rho\beta} = g^{\rho\sigma}C_{\sigma\rho\beta} = 0. \tag{F.9.7}$$

在一维、二维和三维空间中, 外尔张量恒等于零; 在四维空间中, 它有 10 个独立分量. 下面我们证明, 在共形变换下外尔张量保持不变:

$$\tilde{C}^{\mu}_{\nu\tau\lambda} = C^{\mu}_{\nu\tau\lambda}. \tag{F.9.8}$$

由 (F.9.2) 可得

$$\tilde{g}^{\mu\nu} = \mathrm{e}^{-2\sigma(x)}g^{\mu\nu}, \tag{F.9.9}$$

于是得到克里斯托费尔符号的变换关系为

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\nu\tau} = \mathrm{e}^{2\sigma}(\Gamma_{\mu\nu\tau} + g_{\mu\nu}\sigma_{,\tau} + g_{\mu\tau}\sigma_{,\nu} - g_{\nu\tau}\sigma_{,\mu}), \tag{F.9.10}$$

$$\tilde{\Gamma}^{\mu}_{\nu\tau} = \tilde{g}^{\mu\alpha}\tilde{\Gamma}_{\alpha\nu\tau} = \Gamma^{\mu}_{\nu\tau} + \delta^{\mu}_{\nu}\sigma_{,\tau} + \delta^{\mu}_{\tau}\sigma_{,\nu} - g_{\nu\tau}g^{\mu\alpha}\sigma_{,\alpha}). \tag{F.9.11}$$

由此可得

$$\begin{aligned}\tilde{R}_{\mu\nu\tau\lambda} =& \frac{1}{2}(\tilde{g}_{\mu\lambda,\nu\tau} + \tilde{g}_{\nu\tau,\mu\lambda} - \tilde{g}_{\mu\tau,\nu\lambda} - \tilde{g}_{\nu\lambda,\mu\tau}) \\ &+\tilde{g}_{\alpha\beta}(\tilde{\Gamma}^{\alpha}_{\nu\tau}\tilde{\Gamma}^{\beta}_{\mu\lambda} - \tilde{\Gamma}^{\alpha}_{\nu\lambda}\tilde{\Gamma}^{\beta}_{\mu\tau}) \\ =& \mathrm{e}^{2\sigma}[R_{\mu\nu\tau\lambda} + (g_{\mu\lambda}\sigma_{\nu\tau} + g_{\nu\tau}\sigma_{\mu\lambda} - g_{\mu\tau}\sigma_{\nu\lambda} \\ &-g_{\nu\lambda}\sigma_{\mu\tau}) + (g_{\mu\lambda}g_{\nu\tau} - g_{\mu\tau}g_{\nu\lambda})(\sigma_{;\alpha}\sigma^{;\alpha})],\end{aligned} \tag{F.9.12}$$

式中

$$\sigma_{\mu\nu} = \sigma_{\nu\mu} \equiv \sigma_{;\mu\nu} - \sigma_{;\mu}\sigma_{;\nu}, \tag{F.9.13}$$

$$\sigma_{;\mu}\sigma^{;\mu} = g^{\mu\nu}\sigma_{;\mu}\sigma_{;\nu}. = g^{\mu\nu}\sigma_{,\mu}\sigma_{,\nu}. \tag{F.9.14}$$

里奇张量的变换式可由上式得到:

$$\begin{aligned}\tilde{R}_{\mu\nu} =& \tilde{g}^{\alpha\beta}\tilde{R}_{\alpha\mu\beta\nu} \\ =& R_{\mu\nu} - 2\sigma_{\mu\nu} - (\Box\sigma + 2\sigma_{;\rho}\sigma^{;\rho})g_{\mu\nu},\end{aligned} \tag{F.9.15}$$

$$\Box\sigma = \sigma^{;\mu}_{;\mu} = g^{\mu\nu}\sigma_{;\mu\nu}. \tag{F.9.16}$$

从而得到曲率标量的变换式

$$\tilde{R} = \tilde{g}^{\mu\nu}\tilde{R}_{\mu\nu} = \mathrm{e}^{-2\sigma}(R - 6\Box\sigma - 6\sigma^{;\mu}_{;\mu}). \tag{F.9.17}$$

由 (F.9.15) 和 (F.9.17) 得到

$$\sigma_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}(\tilde{R}_{\mu\nu} - R_{\mu\nu}) + \frac{1}{12}(\tilde{R}g_{\mu\nu} - Rg_{\mu\nu}) + \frac{1}{2}(\sigma^{;\rho}\sigma_{;\rho})g_{\mu\nu}. \tag{F.9.18}$$

把 (F.9.12) 中指标 μ 升高, 然后将 (F.9.18) 代入, 便得到

$$\tilde{C}^{\mu}_{\nu\tau\lambda} = C^{\mu}_{\nu\tau\lambda}. \tag{F.9.19}$$

即在共形变换下外尔张量保持不变. 还可以证明, 常曲率空间的外尔张量恒等于零, 这表明常曲率空间和欧几里得空间是共形的.

参考文献

何香涛. 2002. 观测宇宙学. 北京：科学出版社.

李宗伟，肖兴华. 2000. 天体物理学. 北京：高等教育出版社.

梁灿彬，周彬. 2006. 微分几何入门与广义相对论. 第 2 版. 北京：科学出版社.

刘辽，赵峥. 2004. 广义相对论. 第 2 版. 北京：高等教育出版社.

刘辽，赵峥，田贵花，等. 2008. 黑洞与时间的性质. 北京：北京大学出版社.

王永久，唐智明. 1990. 引力理论和引力效应. 长沙：湖南科学技术出版社.

王永久. 2008. 经典黑洞和量子黑洞. 北京：科学出版社.

王永久. 2010. 经典宇宙和量子宇宙. 北京：科学出版社.

俞允强. 2003. 热大爆炸宇宙学. 北京：北京大学出版社.

赵书城. 1991. 可积 (度量)Weyl 时空中的引力和共形规范场理论. 物理学报, 40: 849.

赵峥. 1999. 黑洞的热性质与时空奇异性. 北京：北京师范大学出版社.

赵峥, 刘文彪. 2010. 广义相对论基础. 北京：清华大学出版社.

Adam M G. 1959. A new determination of the center mass. MNRAS, 119: 460.

Albrecht A, Steinhardt P J. 1982. Cosmology for grand unified theories with radiatively induced symmetry. Phys Rev Lett, 48: 1220.

Alexander S, Malecki J, Smolin L. 2004. Quantum gravity and inflation. Phys Rev D, 70: 044025. Malecki J. 2004. Inflationary quantum cosmology: General framework and exact Bianchi solution. Phys Rev D, 70: 084040.

Andersson N, Howls C J. 2004. The asymptotic quasinormal mode spectrum of non-rotating black holes. Class Quantum Grav, 21: 1623.

Andersson N. 1997. Evolving test fields in a black-hole geometry. Phys Rev D, 55: 468.

Anninos P, Hbbill D, Sdidel E, et al. 1993. Collision of two black holes. Phys Rev Lett, 71: 2851

Arkani-Hamed N, Dimopoulos S, Dvali G. 1998. The hierarchy problem and new dimensions at a millimeter. Phys Lett B, 429: 263.

Ashtekar A, Bojowald M. 2006. Quantum geometry and the Schwarzchild singularity. Class. Quantum Grav, 23: 391. Ashtekar A, Bojowald M, Lewandowski J. 2003. Mathematical structure of loop quantum cosmology. Adv Theo Math Phys, 7: 233-268. Ashtekar A, Bojowald M, Willis J. 2004. Corrections to Friedmann equations induced by quantum geometry. IGPG preprint.

Ashtekar A, Bombeli L, Corichi A. 2005. Semiclassical states for constrained systems. Phys Rev D, 72: 025008. Ashtekar A, Lewandowski J. 2001. Relation between polymer and fock excitations. Class Quantum Grav, 18: L117. Ashtekar A, Lewandowski J. 2004.

Background independent quantum gravity: A status report. Class. Quantum Grav, 21: R53. Ashtekar A, Pawlowski T, Singh P. 2006. Quantum nature of the big bang. Phys Rev Lett, 96: 141301.

Barack L. 1999. Late time dynamics of scalar perturbations outside black holes I a shell toy model. Phys. Rev D, 59: 044016.

Barbon J L, Emparan R. 1995. Quantum black hole entropy and Newton constant renormalization. Phys Rev D, 52: 4527.

Barrero T, Decarlos B, Copeland E J. 1998. Stabilizing the dilaton in superstring cosmology. Phys Rev D, 58: 083513.

Basseler S. Improved test of the equivolence principle for gravitational self-energy. Phys Rev Lett, 83: 3583.

Bateman H, Erdelyi A. 1954. Tables of Integral Transformations. New York: Mc Graw-Hill Book Company.

Beams J M, et al. Determination of the gravitational constant G. Phys Rev Lett, 23: 655.

Bekenstein J D. 1973. Do we understand black hole entropy? 7th Marcel Grossman meeting on general relativity at Stanford University. Phys Rev D, 7: 2333.

Bennett D. 1986. Evolution of cosmic strings. Phys Rev D, 33: 872.

Bento M C, Bertolami O, Sen A A. 2003. Generalized chaplygin gas and CMBR constraints. Phys Rev D, 67: 063003.

Bergmamm P G. 1976. Introduction to The Theory of Relativity. New York: Dover Publications INC.

Berti E, Cardoso V, Yoshida S. 2004. Highly damped quansinormal modes of Kerr black holes: A complete numerical investigation. Phys Rev D, 69: 124018.

Birkhoff G D. 1927. Relativity and Modern Physics. Cambridge: Cambridge University Press.

Blamont J E. Roddier F. 1961. Precise observation of the profile of the fraunhofer strontium resonance line evidence for the gravitational red shift on the sun. Phys Rev Lett, 7: 437.

Blau S, Guth A. 1987. Inflationary cosmology. in: Three Hundred Years of Gravitation. Hawking S, Israel W. eds. Cambridge: Cambridge University Press.

Bojowald M, Date G. 2004. Quantum suppression of the general chaotic behavior close to cosmological singularities. Phys Rev Lett, 92: 071302. Bojowald M, Date G, Vandersloot K. 2004. Homogeneous loop quantum cosmology: The role of the spin connection. Class Quantum Grav, 21: 1253. Bojowald M, Hernandez H H, Morales-Tecotl H A. 2001. Perturbative degrees of freedom in loop quantum gravity: Anisotropies. Class Quantum Grav, 18: L117. Bojowald M, Hinterleitner F. 2003. Isotropic loop quantum cosmology with matter II: The Lorentzian constraint. Phys Rev D, 68: 124023. Bojowald M, Maartens R, Singh P. 2004. Loop quantum gravity and the cyclic universe.

Phys Rev D, 70: 083517.

Bojowald M. 2001. Absence of singularity in loop quantum cosmology. Phys Rev Lett, 86: 52275230. Bojowald M. 2002. Isotropic loop quantum cosmology. Class Quantum Grav, 19: 2717. Bojowald M. 2002. Inflation from quantum geometry. Phys Rev Lett, 89: 261301. Bojowald M. 2005. Non-singular black holes and degrees of freedom in quantum gravity. Phys Rev Lett, 95: 061301. Bojowald M. 2005. Loop quantum cosmology. Liv Rev Rel, 8: 11. Bojowald M. 2006. Spherically symmetric quantum geometry: Hamiltonian constraint. Class Quantum Grav, 23: 2129.

Bondi H, Gold T. 1948. The Steady- state theory of the expanding universe. Mon Not R Astron Soc, 108: 252.

Bonnor W B. 1979. A three-parameter solution of the static Einstein-Maxwell equations. J Phys A, 12: 851.

Bousso R, Hawking S W. 1996. Pair creation of black holes during inflation. Phys Rev D, 54: 6312.

Brans C, Dicke R H. 1961. Mach's principle and a relativistic theory of gravitation. Phys Rev, 124: 925.

Brault J. 1963. The gravitational redshift in the solar spectrum. Bull Amer Phys Soc, 8: 28.

Brax P, van de Bruck C. 2003. Cosmology and brane worlds. Class Quant Grav, 20: R201.

Bruni M, Germani C, Maartens R. 2001. Gravitational Collapse on the Brane: A No-Go Theorem. Phys Rev Lett, 87: 231302.

Brustein R, Veneziano G. 1994. The graceful exit problem in string cosmology. Phys Lett B, 329: 429.

Bucher M, Goldhaber A S, Turok N. 1995. An open universe from inflation. Phys Rev D, 54: 3314.

Bucher M, Turok N. 1995. Open inflation with an arbitrary false vacuum mass. Phys Rev D, 52: 5538.

Burko L M, Khanna G. 2003 Radiative falloff in the background of rotating black holes. Phys Rev D, 67: 081502(R).

Burko L M, Khanna G. 2004. Universality of massive scalar field late-time tails in black-hole spacetimes. Phys Rev D, 70: 044018.

Caldarelli M M, Cognola G, Klemm D. 1998. Thermodynamics of Kerr-Newman-AdS black holes and conformal field theories. hep-th/9908022.

Canuto V, et al. Superdense neutron matter. ApJ, 221: 274.

Cardoso V, Lemos J P S. 2003. Quasinormal modes of the near extremal Schwarzschild-de Sitter black hole. Phys Rev D, 67: 084020. Cardoso V, Yoshida S, Dias O J C, et al. 2003. Late-time tails of wave propagation in higher dimensional spacetimes. Phys Rev D, 68: 061503(R).

Carlip S. 1995. Entropy from conformal field theory at killing horizons//Carlip S. 1995. Logarithmic corrections to black hole entropy from the Cardy formula. Statistical mechanics of the (2+1)-dimensional black hole. Phys Rev D, 51: 632. Carlip S. 1997. Statistical mechanics of the threedimensional Euclidean black hole. Phys Rev D, 55: 878.

Carmeli M. 1982. Classical Fields: General Relativity and Gauge Theory. New York: John Wiley and Sons.

Carrol S, Press W, Turner E. 1992. The cosmological constant. Annu Rev Astron Astrophys, 30: 499.

Chandrasekhar S. 1939. An Introduction to the Study of Stellar Structure. Chicago: University of Chicago Press.

Cheeger J. 1983. Spectral geometry of singular Riemannian spaces. J Differential Geometry, 18: 575.

Cheng H. 1988. Possible Existence of Weyl's Vector Meson. Phys Rev Lett, 61: 2182.

Chillingworth D. 1976. Differential Topology with a View to Applications. London: Pitman Publishing.

Ching E S C, Leung P T, Suen W M, et al. 1995. Wave propagation in gravitational systems: Late time behavior. Phys Rev D, 52: 2118.

Cho H T. 2003. Dirac quasinormal modes in Schwarzschild black hole spacetimes. Phys Rev D, 68: 024003.

Christodoulou D. 1970. Reversible and irreversible transformation in black-hole physics. Phys Rev Lett, 25: 1596.

Cline J M, Jeon S, Moore G D. 2004. The phantom menaced: constraints on low-energy effective ghosts. Phys Rev D, 70: 043543.

Coleman S, De Luccia F. 1980. Gravitational effects on and of vacuum decay. Phys Rev D, 21: 3305.

Coleman S. 1988. Why there is nothing rather than something: A theory of the cosmological constant. Nucl Phys B, 310: 643.

Copeland E J, Easther R, Wands D. 1997. Vacuum fluctuations in axion-dilatom cosmologies. Phys Rev D, 56: 873.

Cox A N. 1999. Allen's Astrophysical Quantities. 4th ed. New York: Springer Verlag.

Damour T, Nordtvedt K. 1993. Phys. General relativity as a cosmological attractor of tensor-scalar theories. Phys Rev Lett, 70: 2217.

Damour T, Ruffini R. 1976. Black-hole evaporation in the Klein-Saute-Heisenberg-Euler formalism. Phys Rev D, 14: 332.

Das S, Ghosh A, Mitra P. 2003. Statistical entropy of Schwarzschild black strings and black holes. Hep-th/0005108. de Alwis S P, Ohta N. 1995. Thermodynamics of quantum fields in black hole backgrounds. Phys Rev D, 52: 3529.

Date G, Hossain G M. 2005. Genericity of inflation in isotropic loop quantum cosmology. Phys Rev Lett, 94: 011301. Date G, Hossain G M. 2005. Genericity of big bounce in isotropic loop quantum cosmology. Phys Rev Lett, 94: 011302.

Date G. 2005. Absence of Kasner singularity in the effective dynamics of loop quantum cosmology. Phys Rev D, 71: 127502.

Demers J G, Lafrance R, Myers R C. 1995. Black hole entropy without brick walls. Phys Rev D, 52: 2245.

Deser S. 1970. Self-interaction and gauge invariance. Gen Rel Grav, 1: 9.

Dicke R H. 1964. Relativity, Group and Topology, New York: Gorden and Breach, 167. D:cke R H, 1965. Cosmic-black-body radiation. ApJ, 142: 414. ibid. 1974 The oblateness of the Sun and relativity. Science, 184:419.

Dolgov A, Zeldovich Y. 1981. Cosmology and elementary particles. Rev Mod Phys, 53: 1.

Dowker J S. 1994. A note on Polyakovs non-local form of the effective action. Class Quantum Grav, 11: L7.

Dreyer O. 2003. Quasinormal modes, the area spectrum, and black hole entropy. Phys Rev Lett, 90: 081301.

Duncombe R L. 1965. Relativity effects for the three inner planets. Astron J, 61: 174.

Dvail G, Gabadadze G, Kolanovic M, Nitti F. 2001. The power of brane-induced gravity. Phys Rev D, 64: 084004.

Eddington A S. 1922. The Mathematical Theory of Relativity. Cambridge: Cambridge Univercity Press.

Einstein A. 1916. Die Grundlage der allgemeinen Relativitatstheorie. Annalen der Phys, 49: 769. Einstein A. et al. 1923. The Principle of Relativity. Dover: Dover publications, 35.

Ernst F J. 1968. New Formulation of the Axially Symmetric Gravitational Field Problem. Phys Rev, 167:1175.

Farle F J M, et al. The anomolous magnetic moment of the negative muon. Nuovo Cimento A, 45: 281.

Felder G N, Frolov A V, Kofman L, Linde A V. 2002. Cosmology with negative potentials. Phys Rev D, 66: 023507.

Ferrari V, Mashoon B. 1984. New approach to the quasinormal modes of a black hole. Phys Rev D, 30: 295.

Ferrari V, Mashoon B. 1984. Oscillations of a black hole. Phys Rev Lett, 52: 1361.

Freedman W, et al. 2001. Final results from the hubble space telescope key project to measure the hubble constant. Astrophys J, 553: 47.

Frolov V P, Fursaev D V, Zelnikov A I. 1996. Black hole entropy: Off shell versus on shell. Phys Rev D, 54: 2711. Frolov V P, Fursaev D V. 1998. Thermal fields, entropy and black holes. Class Quantum Grav, 15: 2041. Frolov V P, Novikov I. 1993. Dynamical

origin of the entropy of a black hole. Phys Rev D, 48: 4545. Frolov V P, Israel W, Solodukhin S N. 1996. One-loop quantum corrections to the thermodynamics of charged black holes. Phys Rev D, 54: 2732. Frolov V P, Zelenikov A I. 1998. Quantum Gravity: Proceedings of the Fourth Seminar on Quantum Gravity. Singapore: World Scientific Publishing Company.

Frolov V P. 1992. Two-dimensional black hole physics. Phys Rev D, 46: 5383.

Fronsdal C. 1959. Completion and embedding of the Schwarzschild solution. Phys Rev, 116: 778.

Fukui T. 1993. 5D geometrical property and 4D property of matter.General Relativity and Gravitation, 25: 731.

Fulton T, Rohrlich F, Witten L. 1962. Conformal invariance in physics. Rev Mod Phys, 34: 442.

Fursaev D V. 1995. Temperature and entropy of a quantum black hole and conformal anomaly. Phys Rev D, 51: 5352.

Fursaev D. Euclidean and canonical formulations of statistical mechanics in the presence of killing horizons. hep-th/9709213.

Gamow G. 1946. Prescient paper predicting the existence of a uniform and diffuse relic radiation field from the Hot Big Bang. Phy Rev, 70: 572.

Gao C J, Shen Y G. 2002. Relation between black holes entropy and quantum field spin. Phys Rev D, 56:084043.

Gasperini M, Veneziano G. 2003. The pre-big bang scenario in string cosmology. Phys Rept, 373: 1.

Geroch R A, Jang P S. 1975. Motion of a body in general relativity. J Math Phys, 16: 65.

Geroch R A. 1971. A Method for generating solutions of Einstein's equations. Journal of Mathematics and Physics, 12: 918.

Gleiser R J, Nicasio C O, Price R H, et al. 1996. Colliding black holes: how far can the close approximation go? Phys Rev Lett, 77: 4483.

Glendenning N K. 1997. Compact Stars. New York: Springer-Verlag.

Gradshteyn I S, Ryzhik I M. 1994. Table of Integrals, Series, and Products. New York: A Cademic Press.

Granshow T E, et al. 1960. Measurement of the gravitational red shift using the Mossbauer effect in Fe^{57}. Phys Rev Lett, 4: 163.

Greenstein J L, et al. 1971. Spectra of white Dwarfs with circular polarization. ApJ, 169: L63.

Gui Y X. 1990. Quantum-field in Eta-Zeta-spacetime. Phys Rev D, 42: 1988. Gui Y X. 1992a. $\eta - \xi$ spacetime and thermo fields. Phys Rev D, 46: 1869. Gui Y X. 1992b. Fermion fields in $\eta - \xi$ spacetime. Phys Rev D, 45: 697.

Gundlach C, Price R H, Pullin J. 1994. Late-time behavior of stellar collapse and explosions

I. Linearized perturbations. Phys Rev D, 49: 883. Gundlach C, Price R H, Pullin J. 1994. Late-time behavior of stellar collapse and explosions II Nonlinear evoution. Phys Rev D, 49: 890.

Gupta Ś N. 1957. Einstein's and other theories of gravitation. Rev Mod Physics, 29: 334.

Gusev Yu, Zelnikov A. 1989. Finite temperature nonlocal effective action for scalar fields. hp-th/0709074.

Guth A H. 1981. Inflationary universe: a possible solution to the horizon and flatness problems. Phys Rev D, 23: 347.

Guth A H. 1983. Speculations on the orgin of the matter, energy and entropy of the universe. In: Asymptotic Realms of Physics: Essays in Honor of Francis E Low. Guth A H, Huang K, Jaffe R L. eds. Cambridge: MIT Press.

Hafele J C, Keating R E. 1972. Around-the-world atomic clocks: predicted relativistic time gains. Science, 177:166; Around-the-world atomic clocks: observed relativistic time gains. Science, 177:168.

Halliwel J J, Hawking S W. 1985. Origin of structure in the universe. Phys Rev D, 31: 1777

Harrison E R, et al. 1965. Gravitation Theory and Gravitational Collaps. Chicago: University of Chicago Press.

Hartle J B, Hawking S W. 1976. Path-integral derivation of black-hole radiance. Phys Rev D, 13: 2188.

Hartle J B, Hawking S W. 1983. Wave function of the universe. Phys Rev D, 28: 2960.

Hawking S W, Ellis G F R. 1973. The Large Scale Structrue of Space-Time. Cambridge: Cambridge University Press. Hawking S W, Luttrell J C. 1984. Higher derivatives in quantum cosmology: (I) The isotropic case. Nucl Phys, B247: 250. Hawking S W, Turok N. 1998. Comment on 'Quantum creation of an open universe', by Andrei Linde. gr-qc/9802062. ibid. 1998. Open inflation without false vacua. Phy Lett B, 425: 25. Hawking S W, Moss I G. 1985. Fluctuations in the inflationary universe. Nucl Phys. B 224: 180.

Hawking S W. 1976. Breakdown of predictability in gravitational collapse. Phys Rev D, 14: 2460. ibid. 1966. Singularities in the Universe. Phys Rev Lett, 17: 444. ibid.1966. Pertubations of an expanding universe. ApJ, 145: 544. ibid. 1966. The occurrence of singularities in cosmology. Proc Roy Soc London A, 295: 490.

Hertog T, Horowitz G. 2005. Holomorphic description of ADS cosmologies. JHEP, 0504: 005.

Heusler M. 1996. Black Hole Uniqueness Theorems. Cambridge: Cambridge University Press.

Hill H A, Clavton P D, Patz D L, et al. 1974. Solar oblateness, excess brightness and relativity. Phys Rev Lett, 33: 1497.

Ho J, Kim W T, Park Y J, et al. 2000. Entropy in the Kerr-Newman black hole. gr-qc/9704032.

Hod S. 1998. Both's correspondence principle and the area spectrum of quantum black holes. Phys Rev Lett, 81: 4293. Hod S. 2000. Radiative tail of realistic rotating gravitational collapse. Phys Rev Lett, 84: 10. Hod S, Prain T. 1998. Late-time evolution of charged gravitational collapse and decay of charged scalar hair II Phys Rev D, 58: 024018. Hod S, Piran T. 1998. Late-time tails in gravitational collapse of a selfinteracting(massive) scalar-field and decay of a self-interacting scalar hair. Phys Rev D, 58: 044018.

Hofmann S, Winkler O. The spectrum of fluctuations in inflationary quantum cosmology. astro-ph/0411124.

Hossain G M. 2005. Primordial density perturbations in effective loop quantum cosmology. Class. Quantum Grav, 22: 2511.

Hovdebo J L, Myers R C. 2003. Bouncing braneworlds go crunch! JCAP, 0311: 012.

Hoyle F. 1948. A new model for the expanding universe. Mon Not R Astron Soc, 108: 372

Hubble E. 1929. A relation between distance and radial velocity among extragalactic nebulae. Proc Nat Acad Sci U S, 15: 168.

Hwang J C. 2002. Cosmological structure problem of the ekpyrotic scenario. Phys Rev D, 65: 063514.

Israel W. 1967. Event horizons in static vacuum space-times. Phys Rev, 164: 1776.

Ivanitzkaya O S. 1979. Lorentz base and effects of gravitation. Minsk: Science Press.

Iyer S, Will C M. 1987. Black-hole normal modes: A WKB approach. I Foundations and application of a higher-order WKB analysis of potential-barrier scattering. Phys Rev D, 35: 3621. Iyer S, Will C M. 1987. Black-hole normal modes: A WKB approach. II Schwarzschild black holes. Phys Rev D, 35: 3632.

Jacobson T. 2003. Black hole entropy and induced gravity. gr-qc/9404039.

Jaffe A H, et al. 2001. Cosmology from maxima-1,boomerang and COBE/DMRCMB observations. Phys Rev Lett, 86: 3475.

Jing J L,Wang S L. 2005a. Can the "brick wall" model present the same results in different coordinate representations? Phys Rev D, 69: 024011. Jing J L,Wang S L. 2005b. Dirac quasinormal modes of the Reissner-Nordstrom de Sitter black hole. Phys Rev D, 72: 084009. Jing J L,Wang S L. 2005c. Late-time evolution of charged massive Dirac fields in the Reissner-Nordström black-hole background. Phys Rev D, 72: 027501.

Jing J L.2005. Dirac Quasinormal modes of Schwarzschild black hole. Phys Rev D, 71: 124006. Jing J L. 2004a. Late-time behavior of massive Dirac fields in a Schwarzschild background. Phys Rev D, 70: 065004. Jing J L.2004b. Dirac quasinormal modes of the Reissner-Norstrom-de Sitter black hole. Phys Rev D, 69: 084009. Jing J L. 2001. Quantum entropy of the Kerr black hole arising from the gravitational pertur-

bation. Phys Rev D, 64: 064015. Jing J L.1999.Quantum entropy of a nonextreme stationary axisymmetric black hole due to a minimally coupled quantum scalar field. Phys Rev D, 60: 084015. Jing J L, Pan Q Y. 2005. Dirac quasinormal frequencies of Schwarzschild-anti-de sitter and Reissner-Nordstrom-anti-de sitter black hole. Phys Rev D, 72: 124011.

Johnson M, Ruffini R. 1974. Generalized Wilkins effect and selected orbits in a Kerr-Newman geometry. Phys Rev D, 10: 2324.

Kabat D, Strassler M J. 1994. A comment on entropy and area. Phys Lett B, 329: 46.

Kallosh R, Kofman L, Linde A D, et al. 2001. BPS branes in cosmology. Phys Rev D, 64: 123524.

Kanno S, Soda J. 2002. Radion and holographic brane gravity. Phys Rev D, 66: 083506.

Karori K D, Barua J. 1975. A singularity-free solution for a charged fluid sphere in general relativity. J Phys A, 8: 508.

Kaul R K, Majumdar P. Logarithmic correction to the Bekenstein- Hawking entropy. gr-qc/0002040.

Kerr R P. 1963. Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically speciametric. Phys Rev Lett, 11: 237.

Khoury J, Ovrut B A, Seiberg N, et al. 2001. The Ekpyrotic universe: colliding branes and the origin of the hot big bang. Phys Rev D, 64: 123522. Khoury J, Ovrut B A, Steinhardt J P, et al. 2002. From big crunch to big bang. Phys Rev D, 65: 086007. Khoury J, Ovrut B A, Steinhardt P. J, et al. 2002. Density perturbations in the ekpyrotic scenario. Phys Rev D, 66: 046005. Khoury J, Zhang R. 2002. The friedmann equation in brane-world scenarios. Phys Rev Lett, 89: 061302.

Kinnerleg W, Chitre D M. 1978. Group Transformation That Generates the Kerr and Tomimatsu-Sato Metrics. Phys Rev Lett, 40: 1608.

Kinnersley W. 1969. Field of an arbitrarily accelerating point mass. Phys Rev,186: 1335.

Kiselev V V. 2003. Quintessence and blackhole. Class Quant Grav, 22: 4651.

Kokkotas K D, Schmidt B G. 1999. Quasi-normal modes of stars and black holes. Living Rev Relativ, 2: 2.

Kolb E W, Turner M S. 1990. The Early Universe. Redwood: Addison-Wesley Publishing Company.

Koyama H, Tomimatsu A. 2001. Asymptotic tails of massive scalar fields in a Schwarzschild background. Phys Rev D, 64: 044014. Koyama H, Tomimatsu A. 2001. Asymptotic power-law tails of massive scalar fields in a Reissner-Nordstrom background. Phys Rev D, 63: 064032. Koyama H, Tomimatsu A. 2002. Sloly decaying tails of massive scalar fields in spherically symmetric spacetimes. Phys Rev D, 65: 084031.

Kramer D, Stephani H, Lerlt E, et al. 1980. Exact Solutions of Einstein's Field Equations. Cambridge: Cambridge University Press.

Krivan W. 1999. Late-time dynamics of scalar fields on rotating black hole backgrounds. Phys Rev D, 60: 101501.

Kruskal M D. 1960. Maximal extension of Schwarzschild metric. Phys Rev, 119: 1743.

Kuang Z Q, Li J Z, Liang C B. 1986. Gauge freedom of plane-symmetric line elements with semi-plane-symmetric null electromagnetic fields. Phys Rev D, 34: 2241.

Leaver E W. 1985. An analytic representation for quasi-normal modes of Kerr black holes. Proc R Soc London A, 402: 285. Leaver E W. 1986. Spectral decomposition of the perturbation response of the Schwarzschild geometry. Phys Rev D, 34: 384.

Li X Z. 1994. Dimensionally continued wormhole solutions. Phys Rev D, 50: 3787-3794. Li X Z, Hao J G. 2002. Global monopole in asymptotically $\mathrm{d}S/A\mathrm{d}S$ space-time. Phys Rev D, 66: 107701. Li X Z, Hao J G. 2003. Kantowski - Sachs universe cannot be closed. Phys Rev D, 68: 083512. Li X Z, Hao J G. 2004. Phantom field with O(n) symmetry in an exponential potential. Phys Rev D, 69: 107303. Li X Z, Sun C B, Xi P. 2009. Torsion cosmological dynamics. Phys Rev D, 79: 027301 .

Liang C B. 1995. A family of cylindrically symmetric solutions to Einstein-Maxwell equantions. Gen Rela Grav, 27: 669.

Lidsey J E. 2004. Early universe dynamics in semiclassical loop quantum cosmology. JCAP, 0412: 007.

Linde A D. 1982. A new inflationary universe scenario: A Possible solution of the horizon, flatness, homogeneity, isotropy and primordial monopole problems. Phys Lett B, 108: 389. Linde A D. 1995. Inflation with variable Ω. Phys Lett B, 351: 99. Linde A D, Mezhlumian A. 1995. Inflation with $\Omega \neq 1$. Phys Rev D, 52: 6789.

Linder E. V. 2003. Exploring the expansion history of the universe. Phys Rev Lett, 90: 091301.

Liu L. 1993. Wormhole created from vacuum fluctuation. Phys Rev D, 48: R5463.

Longair M S. 1998. Galaxy Formation. Berlin: Springer-Verlag.

Lukas A, Ovrut B. A, Stelle K. S, et al. 1999. Universe as a domain wall. Phys Rev D, 59: 086001. Lukas A, Ovrut B. A, Stelle K. S, et al. 1999. Heterotic M-theory in five dimensions. Nucl Phys B, 552: 246.

Maartens R, Wands D, Bassett B. A, et al. 2000. Chaotic inflation on the brane. Phys Rev D, 62: 041301.

Mäkelä J, et al. 2001. Quantum-mechnical model of the Kerr-Newman black hole. Phys Rev D, 64: 024018. Mäkelä J, Repo P. 1998. Quantum-mechanical model of the Reissner-Nordstrom black hole. Phys Rev D, 57: 4899.

Malecki J. 2004. Inflationary quantum cosmology: General framework and exact Bianchi solution. Phys Rev D, 70: 084040.

Mann R B, Solodukhin S N. 1996. Conical geometry and quantum entropy of a charged Kerr black hole. Phys Rev D, 54: 3932. Mann R B, Tarasov L, Zelnikov A. 1992. Brick

walls for black holes. Class Quantum Grav, 9: 1487.

Mather J C, et al. 1990. First result from COBE on the spectrum of the microwave background radition. ApJ, 354: L37.

Misner C W, Thorne K S, Wheeler J A. 1973. Gravitation. San Fracisco: W H Freeman and Company.

Modesto L. Loop quantum black hole. gr-qc/050978.

Moller C. 1955. The Theory of Relativity. London: Oxford Univ Press, 250 .

Moretti V, Iellici D. ς- function regularization and one-loop renormalization of field fluctuations in curved space-times. gr-qc/9705077.

Motl L. 2003. An analytical computation of asymptotic Schwarzschild quasinormal frequencies. Adv Theor Math Phys, 6: 1135. Motl L, Neitzke A. 2003. Asymptotic black hole quasinormal frequencies. Adv Theor Math Phys, 7: 307.

Movahed M. S, Rahvar S. 2006. Observational constraints on a variable dark energy model. Phys Rev D, 73: 083581.

Mück W, Viswanthan K S, Volovich I V.2000. Geodesics and Newton's law in brane backgrounds. Phys Rev D, 62: 105019.

Mukhanov V, Abramo L, Brandenberger R. 1997. Backreaction problem for cosmological perturbations. Phys Rev Lett, 78: 1624.

Mukhanov V, Feldman H, Brandenberger R. 1992. Theory of cosmological perturbations, Phys Rep, 215.

Mukherji S, Peloso M. 2002. Bouncing and cyclic universes from brane models. Phys Lett B, 547: 297.

Myers R C. 1994. Black hole entropy in two dimensions. Phys Rev D, 50:6412.

Nesseris S, Perivolaropoulos L. 2004. A comparison of cosmological models using recent supernova data. Phys Rev D, 70: 043531.

Newman E T, Penrose R. 1962. An approach to gravitational radiation by a method of spin coefficients. J Math Phys, 3:566.

Nojiri S, Odintsov S D , Tsujikawa S.2005. Properties of singularities in(phantom) dark energy universe,Phys Rev D, 71: 063004.

Nojiri S, Odintsov S D. 2003. Quantum de sitter cosmology and phantom matter. Phys Lett B, 562: 147. Nojiri S, Odintsov S D. 2003. De sitter brane universeinduced by phantom and quantum effects. Phys Lett B, 565: 1.

Nollert H P. 1993. Quasinormal modes of Schwarzschild black holes: The determination of quasinormal frequencies with very large imaginary parts. Phys Rev D, 47: 5253. Nollert H P. 1999. Quasinormal modes: The characteristic 'sound' of black holes and nertron stars. Class Quantum Grav, 16: R159.

Nordtvedt K J. 1977. Astady of one-and two-way Doppler tracking of a clock on an arrow toward the Sun. In. Procedings of the International Meeting on Experimental

Gravitation. Rome: Academia Nzionale dei Lincei, 247.

Novikov I D, Frolov V P. 1989. Physics of Black Holes. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Oppenheimer J R, Snyder H. On continued gravitational contraction. Phys Rev, 56: 455.

Oppenheimer J R, Volkoff G M. 1938. On massive neutron cores. Phys Rev, 55: 374.

Peebles P J E. 1993. Principles of Physical Cosmology. Princeton: Princeton University Press. Peebles P J E, Ratra B. 2003. The cosmological constant and dark energy. Rev Mod Phys, 75: 599.

Peiris H V, et al. 2003. First year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe(WMAP) Observations: implications for inflation, Astrophys J Suppl, 148213.

Penrose R. 1964. Conformal treatment of infinity. In: Relativity, Groups and Topology, ed C DeWitt and B DeWitt. New York: Gordon and Breach. ibid. 1965. Gravitational collapse and space-time singularities. Phys Rev Lett, 14: 57. ibid. 1968. Lectures in Mathematics and Physics. New York: Benjamin.

Penzias A A, Wilson R W. A measurement of excess antenna temperature at 4080 Mc/s. ApJ, 142: 419.

Perez A. 2006. On the regularization ambiguities in loop quantum gravity. Phys Rev D, 73: 044007. Vandersloot K. 2005. Hamiltonian constraint of loop quantum cosmology. Phys Rev D, 71: 103506.

Perlmutter S, et al. 1999. Measurements of Ω and from 42 high-redshift supernovae. Astrophys J, 517: 565

Peter P, Pinto-Neto N. 2002. Primordial perturbations in a nonsingular bouncing universe model. Phys Rev D, 66: 063509.

Piao Y, Zhang Y. 2004. Phantom inflation and primordial perturbation spectrum. Phys Rev D, 70: 063513. Piao Y, Zhou E. 2003. Nearly scale-invariant spectrum of adiabatic fluctuations may be from a very slowly expanding phase of the universe. Phys Rev D, 68: 083513.

Polchinski J. 1999. String Theory: Two Volumes. Cambridge: Cambridge University Press.

Polyakov A M. 1981. Quantum geometry of bosonic strings. Phys Lett B, 103: 207.

Pound R V, Rebka G A Jr. 1960. Apparent weight of photons. Phys Rev Lett, 4: 337. Pound R V, Snider J L. 1965. Effect of gravity on gamma radiation. Phys Rev B, 140: 788. ound R V, Snider J L. 1964. Effect of gravity on nuclear resonance. Phys Rev Lett, 13: 539.

Randall L. 1999. An alternative to compactification. Phys Rev Lett, 83: 4690. Randall L, Sundrum R. 1999. Large mass hierarchy from a small extra dimension. Phys Rev Lett, 83: 3370. Randall L, Sundrum R. 1999. An alternative to compactification. Phys Rev Lett, 83: 4690.

Ratra B, Peebles P J E. 1998. Cosmological consequences of a rolling homogeneous scalar

field. Phys Rev D, 37: 3406.

Riess A G, et al. 1998. Observational evidence from supernovae for an accelerationg universe and a cosmological constant. Astron J, 116: 1009.

Rindler W. 1982. Introduction to Special Relativity. Oxford: Clarendon Press.

Roades C E Jr, Ruffini R. 1974. Maximum mass of a neutron star. Phys Rev Lett, 32: 324.

Rovelli C. 2004. Quantum Grav, CUP, Cambridge.

Sawyer R F, Scalapino D J. 1973. Pion condensation in superdeuse nuclear matter. Phys Rev D, 7: 953.

Schiff L I. 1960. Possible new experimental test of general relativity theory. Phys Rev Lett, 4: 215. ibid. On Experimental tests of the general theory of relativity. Amercan Jouranl of Physics, 28: 340.

Schramm D N, Wagoner R. 1977. Element product in early universe. Ann Rev of Nuclear Science, 27: 37.

Schutz B F. 1980. Geometrical Methods of Mathematical Physics. Cambridge: Cambridge University Press. Schutz B, Will C. 1985. Black hole normal modes-A semianalytic approach. Astrophys J, 291: 133.

Schwarzschild K. 1916. Uber das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie Sitzber. Preuss Akad Wiss, 189.

Scranton R, et al. 2004. Physical evidence for dark energy. Astro-ph/0307335.

Shapiro I I. 1972 Mercury's perihelion advance:determination by radar. Phys Rev Lett, 28: 1594. ibid 1976. Verification of the principle of eguivalence for massive bodies. Phys Rev Lett, 36: 555.

Shen Y G. 2000. The femionic entropy of spherically symmetric blacd holes. Mod Phys Lett, A15: 1901. Gao C J, Shen Y G. 2002. Entropy in Kerr-Newman-Kasuya spacetime. Class Quantum Grav, 20: 119. Shen Y G. 2002. Entropy of Horowitz-Strominger black holes due to arbitrary spin fields. Physics Letters B, 537: 187.

Shtanov Y, Sahni V. 2003. Bouncing braneworlds. Phys Lett B, 557: 1.

Shu FW, Shen Y G. 2004. Quasinormal modes of charged black holes in string theory. Physic Review D, 70: 084046.

Simon J, Verde L, Jimenez R. 2005. Constraints on the redshift dependence of the dark energy potential. Phys Rev D, 71: 123001.

Singh P. 2005. Effective state metamorphosis in semiclassical loop quantum cosmology. Class. Quantum Grav. 22: 4203-4216. Singh P, Vandersloot K. 2005. Semiclassical states, effective dynamics and classical emergence in loop quantum cosmology. Phys Rev D, 72: 084004.

Solodukhin S N. 1995. Conical singularity and quantum corrections to the entropy of a black hole. Phys Rev D, 51: 609.

Soloviev V O. 2002. Black hole entropy from Poisson brackets(demystification of some

calculation). Hep-th/9905220.

Stephani H. 1982. General Relativity. Cambridge: Cambridge University Press. Stephani H. 1982. General relativity: An Introduction to the Theory of the Gravitational Field. Cambridge: Cambridge University Press.

Straumann N. 1984. General Relativity and Relativistic Astrophysics. Berlin: Springer-Verlag

Sun Z Y, Shen Y G. 2006. Dark energy cosmology. Int J Theor Phys, 45: 813.

Suneeta V. 2003. Quasinormal modes for the SdS black hole: an analytical approximation scheme. Phys Rev D, 68: 024020.

Susskind L, Uglum J. 1994. Black hole entropy in canonical quantum gravity and superstring theory. Phys Rev D, 50: 2700.

Synge J L. 1960. Relativtiy, the general theory. Amsterdam: North-Holland.

't Hooft G. 1985. On the quantum structure of a black hole. Nucl Phys B, 256: 727.

Taub H. 1951. Empty space-times admitting a there parameter group of motions. Ann Math, 53: 472.

Tegmark M, et al. 2004. Cosomlogical parameters from SDSS and WMAP. Phys Rev D, 69: 103501.

Teukolsky S. 1972. Rotationg black holes-separable wave equations for gravitational and electromagnetic perturbations. Phys Rev Lett, 29: 1114.

Thirring W. 1961. An alternative approach to the theory of gravitation. Ann Phys(U. S. A), 16: 96.

Thome K S, Price R H, Macdonald D A. 1986. Black holes: the membrane paradigm. New Haven CT: Yale University Press.

Tolman R G. 1949. The age of the universe. Rev Mod Phys, 21: 374.

Tsujikawa S, Singh P, Maartens R. 2004. Loop quantum gravity effects on inflation and the CMB. Class. Quantum Grav, 21: 5767.

Turner M S. 1999. Dark matter, dark energy and fundamental physics. Astro-ph/9912211. Turner M S. 2002. The case for Ω =0.33±0.035. arXiv: astro-ph/0106035v2.

Van Patten H M, Everitt C W F. 1976. Possible experiment with two counter-orbiting drag-free satellites to obtain a new test of Einstein's general theory of relativity and improved measurements in geodesy. Phys Rev Lett, 36: 629.

Vishveshwara C. 1970. Scattering of gravitational radiation by a Schwarzschild black-hole. Natrue, 227: 936.

Volovik G E. 2004. Simulation of quantum field theory and gravity in superfluid He-3. condmat/9706172.

Wald R. 1984. General Relativity. Chicago: University of Chicago Press.

Wang Y J, Tang Z M. 2002a. Energy levels of electron near Kerr black hole. Astrophysics and Space Science, 281: 689. Wang Y J, Tang Z M. 2002b. Gravitational properties

of an accelerating celestial body with a large number of monopoles. Astrophysics and Space Science, 282: 363. Wang Y J, Tang Z M. 2002c. On density perturbations and missing mass. Science in China, 45: 508. Wang Y J, Tang Z M.2001. Metric of the gravitational field outside the neutron star. Science in China, 44: 801. Aigen Li, Misset K A, Wang Y J. 2006. On the unusual depletions toward Sk 155. Astrophys J Lett, 640: 151. Jing J L, Wang Y J, Zhu J Y. 1994. Generalized first law of themody-namics for black-holes in spacetimes which Are not asymptotically Flat. Physics Letters A, 187: 31. Jing J L, Yu H W, Wang Y J. 1993. Thermodynamics of a black hole with a global monopole. Physics Letters A, 178: 59. Chen J H, Wang Y J. 2003. Chaotic dynamics of a test paricle around a grawitational field with a dipple. Class Quantum Grav, 20: 3897. Wang Y J, Tang Z M. 1986. Field of an accerlerating celestial body with a large number of magnetic monopoles. Scientia Sinica, 29: 639. Wang Y J, Peng Q H. 1985. Gravitational properties of the Neutron star with magnetic chargeand magnetic moment. Scientia Sinica, 28: 422.

Wang Y, Mukherjee P. 2006. Robust dark energy constraints from supernovae,galaxy clustering,and three-year Wilkinson microwave anisotropy probe observations. Astrophys J, 650: 1. Wang Y, Li A.2008. On dust extinctionof GR bursthost gal. Astrophys J, 685: 1046-1051. Li A, Chen J H, Wang Y J. 2008. On buckyonions as an interstellar grain component. Mon Not R Astron Soc, 390: 39. Wang Y J, Li A. 2006. On the unusual depletions toward Sk 155, Astrophys J Lett, 640: 151. 3. Chen J H, Wang Y J. 2003. Chaotic dynamics of test particle around gravitational field with a dipole, Class. Quantum Grav, 20: 3897.

Weber J. 1969. Evidence for discovery of gravitational radiation. Phys Rev Lett, 22: 1320

Weinberg S. 1972. Gravitation and Cosmology: Principles and Aplications of The General Theory of Relativity. New York: John Wiley. 邹振隆，张历宁等译. 1980. 引力论和宇宙论：广义相对论的原理和应用. 北京：科学出版社. Weinberg S. 1989. The cosmological constant problem. Mod Phys , 61: 1. Weinberg S. 1965. Photons and gravitons in perturbation theory: derivation of Maxwell/s and Einstein/s equations. Phys Rev B, 138: 988.

Weisberg J M, Taylor J H. 1984. Observations of post-Newtonian timing effects in the binary pulsar PSR 1913+16. Phys Rev Lett, 52: 1348.

Weyl H. 1922. Space Time Matter. London: Methuen, 238.

Wheeler J A. 1962. Geometrodynamics. In: Gravitation. Witten L ed. New York: John Wiley &Sons Inc, 412.

Will C M. 1981, 1993. Theory and Experiment in Gravitational Physics. Cambridge: Cambridge University Press.

Williams J G, Dicke R H, et al. 1976. New test of the equivalence principle from lunar laser ranjing. Phys Rev Lett, 36: 551.

Willis J. 2004. On the low energy ramifications and a mathematical extension of loop quantum gravity. Ph.D Dissertation, The Pennsylvaina State University. Ashtekar A, Bojowald M, Willis J. 2004. Corrections to Friedmann equations induced by quantum geometry. IGPG preprint..

Witten E. 1984. Cosmic separation of phases. Phys Rev D, 30: 272.

Wu P X, Yu H W. 2005. Avoidance of big rip in phantom cosmology by gravitational back reaction. Nucl Phys B, 727: 355.

Wu Z C. 2002. Quantum Kaluza-Klein Cosmologies (V). Gen Rel Grav, 34: 1121. Wu Z C. 2004. Dimensionality in the Freund-Rubin Cosmology Phys Lett B, 585: 6 .

Yang I-Ching, Yeh Ching-Tzung, Hsu Rue-Ron, et al. 2005. On the energy of a charged dilaton black hole. gr-qc/9609038.

Youm D. 2000. Extra force in brane worlds. Phys Rev D, 62: 084002.

Yu H W. 2002. Decay of massive scalar hair in the background of a black hole with a global monopole. Phys Rev D, 65: 087502. Yu H W, Zhu Z Y. 2006a. Spontaneous absorption of an accelerated hydrogen atom near a conducting plane in vacuum, Phys Rev D, 74: 044032. Yu H W, Zhu Z Y. 2006b. Spontaneous absorption of an accelerated hydrogen atom near a conducting plane in vacuum. Phys Rev D, 74: 044032. Yu H W, Zhou W T. 2007a. Relationship between Hawking radiation from black holes and spontaneous excitation of atoms. Phys Rev D, 76: 027503. Yu H W, Zhou W T. 2007b. Relationship between Hawking radiation from black holes and spontaneous excitation of atoms. Phys Rev D, 76: 027503. Yu H W, Zhou W T. 2007c. Do static atoms outside a Schwarzschild black hole spontaneously excite? Phys Rev D, 76: 044023. Wu P X, Yu H W. 2007. Constraints on the generalized Chaplygin gas model from recent Supemova date and baryonic acoustic oscillations. ApJ, 658:663.

Zaslavskii O B. 1996. Role of a boundary in the relationship between black hole temperature and the trace anomaly. Phys Rev D, 53: 4691.

Zeldovich Y A B, Novikov I D. 1971. Relativistic Astrophysics I. Chicago: Univ of Chicago Press, 110.

Zerilli F J. 1974. Perturbation analysis for gravitational and electromagnetic radiation in a Reissner-Nordstrom geometry. Phys Rev D, 9: 860.

Zhang L F. 2003. Geodesic in brane cosmology, Comm Theor Phys, 39 : 353.

Zhao Z. 1991. The transitivity of thermal equilibrium and the transitivity of clock rate synchronization. Science in China A, 34: 835-840. Zhao Z, Luo Z Q, Dai X X.1994. Hawking effect of some axially symmetric non-stationary black holes IL NUOVO CIMENTO, 109B(5): 483. Tian G H, Zhao Z. 2003. Can an observer really catch up with light ? Classical and Quantum Gravity, 20: 3927. Zhang J Y, Zhao Z. 2006. Charged particles' tunneling from the Kerr-Newman black hole. Physics Letters B, 638: 110-113.

Zhidenko A. 2004. Quasi-normal modes of Schwarzschild-de sitter black holes. Class Quantum Grav, 21: 273.

Zurek W H, Thorne K S. 1985. Statistical mechanical origin of the entropy of a rotating, charged black hole. Phys Rev Lett, 54: 2171.